DIE BRUCHZAHLEN

Version 2.0 © Herbert Paukert

Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

BRUCHZAHLEN

1. Teil: Die Grundlagen

Bruchzahlen dienen, so wie alle Zahlen der Beschreibung von Merkmalen der Objekte in unserer Welt.

Betrachten wir das Objekt "Rechteck" mit den Seiten a = 3 cm und b = 2 cm. Ein wichtiges Merkmal des Rechtecks ist seine Fläche A. Diese wird mit der Formel A = a * b = 6 cm² berechnet.

Was ist ein Bruch ?

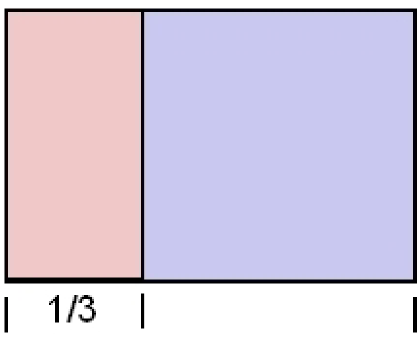
Ein Bruch ist nichts anderes als eine nicht ausgeführte Division. Die Schreibweise der Division 2 : 3 in Bruchform lautet dann:

```
2
-   (man sagt auch "Zwei gebrochen durch Drei")
3
```

Der Dividend (2) wird Zähler und der Divisor (3) wird Nenner genannt. Beide müssen jedoch ganze Zahlen sein. Das Divisionszeichen wird auch Bruchstrich genannt. (Oft wird auch ein Schrägstrich dafür verwendet: 2 / 3).

Welchen Vorteil diese neue Schreibweise hat, wird auf den nachfolgenden Seiten erklärt.

In der Grafik ist ein Rechteck mit der Fläche A = 6 cm² abgebildet.

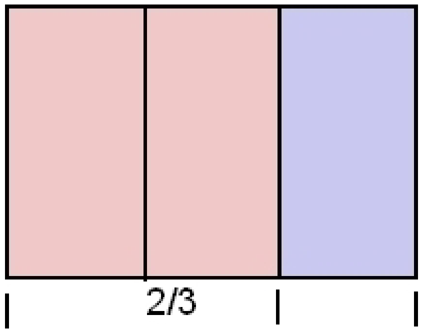


Erste Grundaufgabe:
Teile das Rechteck in genau drei flächengleiche Teile.
(Man sagt "ein Drittel" von 6 cm²).

Wie groß (in cm²) ist dann die Fläche eines solchen Teils ?

Ein Drittel von 6 cm² = 2 cm².

In der Grafik ist ein Rechteck mit
der Fläche A = 6 cm² abgebildet.



Zweite Grundaufgabe:
Verdopple ein Drittel des Rechtecks.
(Man sagt "zwei Drittel" von 6 cm²).

Wie groß (in cm²) ist dann die Fläche
von zwei Dritteln des Rechtecks ?

Zwei Drittel von 6 cm² sind 4 cm².

Erste Grundaufgabe: Teilen (Dividiere durch 3)

$$6 \xrightarrow[:3]{} 2$$

Zweite Grundaufgabe: Vervielfachen (Multipliziere mit 2)

$$2 \xrightarrow[*2]{} 4$$

Beide Grundaufgaben, hintereinander ausgeführt, ergeben dann:

$$6 \xrightarrow[:3]{} 2 \xrightarrow[*2]{} 4$$

Die Zusammenfassung dieser beiden Grundaufgaben lautet
somit: Ermittle zwei Drittel von Sechs.

Die endgültige Aufgabe lautet: Ermittle zwei Drittel von Sechs.
Dafür schreibt man in der neuen Bruchschreibweise einfach:

2
- von 6
3

Die Lösung erfolgt dann durch Hintereinander-Ausführen der Rechenoperationen (Division durch 3 und Multiplikation mit 2).

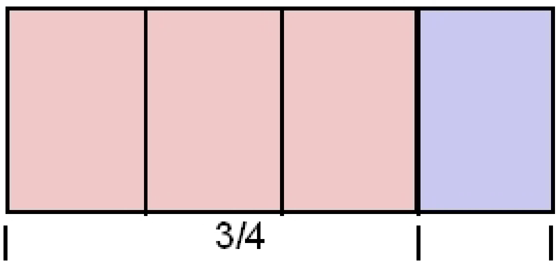
$$6 \xrightarrow[:3]{} 2 \xrightarrow[*2]{} 4$$

Ein Bruchoperator ist daher die Zusammenfassung von genau zwei einfachen Rechenoperationen, nämlich einer Division und einer Multiplikation. Operatoren sind nur Kennzeichen für bestimmte Operationen.

Beispiel: Drei Viertel von Acht.

$$\frac{3}{4} \text{ von } 8 = ?$$

$$8 \xrightarrow[:4]{} 2 \xrightarrow[*3]{} 6$$



Auch das letzte Beispiel "drei Viertel von Acht" kann einfach grafisch dargestellt werden. Man kann ein Rechteck mit den Seiten a = 4 cm und b = 2 cm verwenden.

Seine Fläche ist $A = a*b = 8\ cm^2$ und drei Viertel davon sind $(8 : 4) * 3 = 2 * 3 = 6\ cm^2$.

$$\frac{3}{4} \text{ von } 8\ cm^2 = 6\ cm^2$$

Natürlich können wir einen Bruchoperator auf verschiedene Merkmale anwenden: Auf Längen (cm), auf Flächen (cm^2), auf Volumen (cm^3), auf Massen (kg), auf Geldbeträge (€), usw. Ein Operator ist ein Kennzeichen für eine Rechenvorschrift.

Berechne beispielsweise "vier Fünftel von 10 €".

```
4
- von 10 = ?
5

10 ----> 2 ----> 8
    :5      *4

4
- von 10 = 8
5
```

Vorläufige Zusammenfassung

```
Zähler
──────  von einem Merkmal
Nenner
```

Ein Bruchoperator ist also die Aufforderung, zwei Rechenoperationen auf ein bestimmtes Merkmal anzuwenden: Nämlich zuerst eine Division (durch den Nenner) und dann eine Multiplikation (mit dem Zähler). Zu beachten ist dabei, dass Zähler und Nenner immer ganze Zahlen sind und der Nenner niemals Null ist.

Der Nenner benennt einen Bruchteil des Merkmals und der Zähler zählt, wie viele solche Bruchteile vorkommen.

An dieser Stelle müssen unbedingt die Bezeichnungen für Bruchteile erklärt werden. Grundsätzlich werden Bruchteile mit der Nachsilbe "tel" bezeichnet.

1/1 .... ein Eintel = ein Ganzes = 1
1/2 .... ein Halbes
1/3 .... ein Drittel
1/4 .... ein Viertel
....
....
1/10 ... ein Zehntel
1/11 ... ein Elftel
1/12 ... ein Zwölftel
....
....
1/20 ... ein Zwanzigstel
1/21 ... ein Einundzwanzigstel
1/22 ... ein Zweiundzwanzigstel
....
....

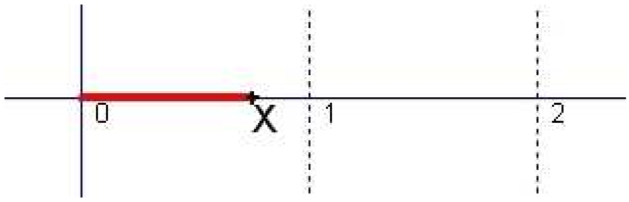
Wir wollen nun unsere Bruchoperatoren auf die Einheit der natürlichen Zahlen, auf die Zahl "Eins" anwenden. Beispielsweise drei Viertel von Eins:

```
3
- von 1 = 0.75
4
```

Dazu müssen wir zuerst 1 durch 4 dividieren. Das ergibt 0.25. Dann wird 0.25 mit 3 multipliziert. Das ergibt genau 0.75. Die ganze Rechnung lautet somit (1/4)*3 = 0.75.

Es ist zu beachten, dass hier in Dezimalzahlen statt einem Komma "," immer ein Dezimalpunkt "." geschrieben wird. Dabei wird automatisch auf zwei Dezimalstellen gerundet. Der Stern bedeutet "Multiplizieren" und der Schrägstrich "Dividieren".

Die Abbildung zeigt
"drei Viertel von Eins"
auf dem Zahlenstrahl.
Das Ergebnis nennt man
eine Bruchzahl.



Den dezimalen Zahlenwert X
erhält man entsprechend der
Rechnung (1/4)*3 = 0.75.

Man kann aber auch sofort
Zähler durch Nenner dividieren
und erhält das gleiche Ergebnis:

X = 3 / 4 = 0.75

Umwandlung einer Bruchzahl in eine Dezimalzahl.

```
2
- von 1 = 0.40
5
```

Betrachten wir jetzt 2 / 5 und führen die Division schrittweise aus:

```
2.0 : 5 = 0.4
  0 Rest
```

Wenn wir den dezimalen Zahlenwert von 2 / 5 ermitteln, dann erhalten wir 0.4. Das ist eine Zahl mit endlich vielen Dezimalstellen, nämlich mit genau einer Dezimalstelle. Solche Dezimalzahlen heißen abbrechend.

Betrachten wir jetzt 2 / 3 und führen die Division schrittweise aus:

```
2.000000 : 3 = 0.666........
  20
   20
    ......
```

Wenn wir den dezimalen Zahlenwert von 2 / 3 ermitteln, dann erhalten wir 0.666........ Das ist eine Zahl mit unendlich vielen Dezimalstellen, weil bei der Division von 2 durch 3 der Rest niemals Null wird. Dabei wiederholt sich die Ziffer 6 periodisch. ("Null Komma Sechs Periodisch").

Betrachten wir jetzt 2 / 7 und führen die Division schrittweise aus:

```
2.0000000 : 7 = 0.28571428....
  60
   40
    50
     10
      30
       20
        60
         40
          ....
```

Weil der Divisor 7 ist, kann es nur höchsten 6 verschiedene Reste geben, nämlich 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Dann müssen die Reste sich wiederholen. Eine solche Dezimalzahl heißt unendlich periodisch.

Wenn wir einen Bruch z / n als Division ausrechnen, dann können also höchsten (n-1) Reste auftreten. Ob und wie viele Reste sich periodisch wiederholen, hängt vom Zähler z und vom Nenner n ab. Damit haben wir einen ersten wichtigen Lehrsatz gefunden:

Lehrsatz (LS01): Ein Bruch kann entweder in eine abbrechende Dezimalzahl oder in eine periodische Dezimalzahl umgewandelt werden. Die Art der Dezimalzahl ist abhängig von dem Zähler und dem Nenner des Bruches.

$$\frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{(abbrechende Dezimalzahl)}$$

$$\frac{2}{7} = 0.285714285714 2..... \quad \text{(periodische Dezimalzahl)}$$

Kurze Schreibweise: 2 / 7 = 0.$\underline{2}$8571$\underline{4}$

Dabei ist die Periode 6 Ziffern lang; die erste und letzte wird unterstrichen. (Es kann auch ein Punkt über die erste und letzte Ziffer gesetzt werden).

Es sei hier nicht verschwiegen, dass es neben den abbrechenden und den periodischen Dezimalzahlen auch Zahlen gibt, die unendlich viele nicht periodische Dezimalstellen besitzen.

Beispiel: X = 0.1010010001000010000010...............

Denke Dir diese Zahl aus unendlich vielen Dezimalstellen aufgebaut, wobei zwischen zwei "Einsern" immer eine um 1 wachsende Anzahl von "Nullen" steht.

Solche Zahlen mit unendlich vielen, nicht periodischen Dezimalstellen heißen irrationale Zahlen. Im Gegensatz dazu nennt man die Bruchzahlen auch rationale Zahlen.

In der Mathematik gibt es viele wichtige irrationale Zahlen, beispielsweise die Ludolfsche Zahl ¶, die Eulersche Zahl **e** oder auch manche sogenannte Wurzeln. Unter der Wurzel von 2 ($\sqrt{2}$) versteht man jene Zahl X, welche mit sich selbst multipliziert genau 2 ergibt (X * X = 2). Es gilt $\sqrt{2}$ = 1.41421356....... Man kann beweisen, dass alle Wurzeln aus Primzahlen irrational sind.

Betrachten wir zum Abschluss die periodischen Dezimalzahlen etwas genauer. Berechne dazu im Taschenrechner den dezimalen Wert der Bruchzahl 2 / 11.

2 / 11 = 0.181818..........

Berechne nun imTaschenrechner den Dezimalwert der Bruchzahl 5 / 6.

5 / 6 = 0.833333..........

Bei 2 / 11 beginnen die sich periodisch wiederholenden Dezimalen sofort nach dem Dezimalpunkt (bzw. Komma). Bei 5 / 6 hingegen beginnt die Periode weiter hinten, nämlich erst ab der Hundertstel-Stelle. Dabei nennt man die Ziffergruppe zwischen dem Dezimalpunkt und der ersten Periode die Vorperiode. In unserem Beispiel ist diese Vorperiode genau eine und die Periode ebenfalls genau eine Ziffer lang.

Beispiel: $43 / 210 = 0.2\underline{047619}0476190$

Länge der Periode = 6 und Länge der Vorperiode = 1.

Zahlen, bei denen die Periode sofort nach dem Dezimalpunkt beginnt, nennt man rein periodisch. Dezimalzahlen mit einer Vorperiode heißen gemischt periodisch.

Ein Bruch wird in eine Dezimalzahl umgewandelt, indem man seinen Zähler durch seinen Nenner dividiert. Wir haben gesehen, dass man dabei entweder abbrechende oder periodische Dezimalzahlen erhält.

Wie aber werden solche Dezimalzahlen wieder zurück in Bruchzahlen umgewandelt ? Diese Aufgabenstellung wollen wir an drei Beispielen demonstrieren.

Beispiel 1: Abbrechende Dezimalzahlen

X = 0.5 = 5/10
X = 0.073 = 73/1000

Jede abbrechende Dezimalzahl kann offenkundig sofort in einen Bruch umgewandelt werden, dessen Nenner eine entsprechende Zehner-Einheit (10,100,1000,.....) ist. Solche Brüche heißen Dezimalbrüche.

Beispiel 2: Rein periodische Dezimalzahlen

X = 0.232323.......... = $0.\underline{23}$

Wir multiplizieren unsere Zahl X mit einer solchen Zehner-Einheit, dass die erste Periode vor den Dezimalpunkt gelangt, d.h. hier mit 100.

100 * X = 23.2323..........

Davon subtrahieren wir nun genau einmal unsere Zahl X:

```
100 * X  =  23.232323......
 -1 * X  =  -0.232323......
_________________________
 99 * X  =  23
```

Somit haben wir erhalten: 99 * X = 23.
Aus dieser Gleichung bestimmen wir die Bruchzahl X = 23 / 99.

X = 23 / 99 = $0.\underline{23}232323232323$
Also gilt: 0.232323.......... = $0.\underline{23}$ = 23 / 99

Beispiel 3: Gemischt periodische Dezimalzahlen

X = 0.413131313.......... = $0.4\underline{13}$

Wir bringen hier die Vorperiode und die erste Periode vor den Dezimalpunkt. Dann bringen wir nur die Vorperiode vor den Dezimalpunkt. Zuletzt führen wir eine entsprechende Subtraktion durch, sodass der unendliche Periodenschwanz wegfällt.

```
1000 * X  =  413.131313......
 -10 * X  =   -4.131313......
____________________________
 990 * X  =  409
```

Somit haben wir erhalten: 990 * X = 409.
Aus dieser Gleichung ermitteln wir die Bruchzahl X = 409 / 990.

X = 409/990 = $0.4\underline{13}13131313131$
Also gilt: 0.4131313......... = $0.4\underline{13}$ = 409 / 990

Beispiele:

1/3	=	0.3333.....	= $0.\underline{3}$
7/11	=	0.636363.....	= $0.\underline{63}$
5/13	=	0.384615384615384615.....	= $0.\underline{384615}$
3/10	=	0.3	= 0.3
7/100	=	0.07	= 0.07
1/6	=	0.1666.....	= $0.1\underline{6}$
5/12	=	0.41666.....	= $0.41\underline{6}$
9/28	=	0.3214285714285714285 7....	= $0.32\underline{142857}$

Endgültige Zusammenfassung

Brüche sind nichts anderes als nicht ausgeführte Divisionen, wobei Zähler und Nenner immer ganze Zahlen sein müssen.

$$\textbf{Bruch} = \frac{\textbf{Zähler}}{\textbf{Nenner}}$$

Ein Bruch kann ZWEI Bedeutungen haben:

(1) Bruchoperator: Der Bruch bezieht sich auf ein Merkmal und bestimmt einen Bruchteil davon. So sind beispielsweise 3/4 von einer Fläche mit 20 cm² genau 15 cm², weil ja (20 / 4) * 3 = 15. Ein Bruch ist eine Rechenvorschrift für Teilen und Vervielfachen.

(2) Bruchzahl: Der Bruch bezieht sich auf die Zahl "Eins". So sind beispielsweise 3/4 = 0.75, weil ja (1 / 4) * 3 = 0.75. Jeder Bruchzahl entspricht eine abbrechende oder periodische Dezimalzahl.

BRUCHZAHLEN

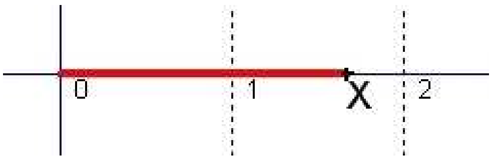
2. Teil: Kürzen und Erweitern

Im ersten Teil haben wir gelernt, was Bruchzahlen sind:

Brüche sind nichts anderes als nicht ausgeführte Divisionen, wobei Zähler und Nenner immer ganze Zahlen sein müssen.

$$\textbf{Bruch} = \frac{\textbf{Zähler}}{\textbf{Nenner}}$$

Wird die Division ausgeführt, dann erhalten wir Dezimalzahlen. Diese können dann auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden, beispielsweise X = 5/3 = $1^2/_3$



Der zweite Teil beschäftigt sich nun mit folgenden Themen:

[1] Kürzen und Erweitern von Bruchzahlen
[2] Vergleichen und Ordnen von Bruchzahlen

Dividiert man den Zähler durch den Nenner eines Bruches, dann erhält man den dezimalen Zahlenwert des Bruches. Statt einem Komma wird immer ein Dezimalpunkt gesetzt.

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{2}{4} = 0.5$$

$$\frac{3}{6} = 0.5$$

Wie man leicht erkennt, haben die drei Brüche den gleichen dezimalen Zahlenwert.

$$\frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{2}{10} = 0.2$$

$$\frac{3}{15} = 0.2$$

Wie man leicht erkennt, haben die drei
Brüche den gleichen dezimalen Zahlenwert.

Brüche mit dem gleichen Zahlenwert heißen gleichwertig.

Wie entstehen nun solche gleichwertigen Brüche ?
Warum sind **1/5** und **3/15** gleichwertige Brüche ?

Es ist offensichtlich, dass aus einem Bruch **Z / N** ein gleichwertiger Bruch entsteht, wenn Zähler **Z** und Nenner **N** mit der gleichen Erweiterungszahl **E** multipliziert werden. Aber warum ist das so ? Diese Frage können wir mit Hilfe eines einfachen Lehrsatzes über die Division von Dezimalzahlen (Erweiterungssatz) beantworten:

Das Ergebnis (der Quotient) einer Division Z : N bleibt unverändert, wenn man Dividend Z und Divisor N mit derselben Zahl E multipliziert.

Z : N = (Z * E) : (N * E)

Diesen Hilfssatz verwenden wir, um eine Zahl durch eine beliebige Dezimalzahl zu dividieren. Dazu werden Dividend und Divisor mit einer entsprechenden Einheit des Zehnersystems (10,100,1000,...) so multipliziert, dass der Divisor zur ganzen Zahl wird.

2 : 0.5 = 20 : 5 = 4, mit Erweiterungszahl E = 10
3 : 0.06 = 300 : 6 = 50, mit Erweiterungszahl E = 100

Wenden wir diesen Hilfssatz auf Brüche an, so ist alles bewiesen.

Welche Erweiterungszahl E muss man nehmen, damit die unten stehenden Gleichungen stimmen.

$$\frac{1}{5} = \frac{1 * ?}{5 * ?} = \frac{4}{20}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 * ?}{4 * ?} = \frac{6}{8}$$

Damit haben wir einen zweiten wichtigen Lehrsatz gefunden:

Lehrsatz (LS02): Der Zahlenwert eines Bruches ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden. Diese Operation nennt man "Erweitern".

Beispiel:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 * 4}{5 * 4} = \frac{8}{20} = 0.4$$

Betrachten wir noch einmal das letzte Beispiel:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 * 4}{5 * 4} = \frac{8}{20}$$

Dabei wird 2/5 mit 4 erweitert. Das ergibt dann 8/20.

Wie kommt man aber vom Bruch 8/20 umgekehrt wieder zurück zum gleichwertigen Bruch 2/5 ? Offenkundig dadurch, dass wir die Erweiterung wieder rückgängig machen, d.h. wir müssen jetzt den Zähler und den Nenner durch 4 dividieren.

$$\frac{8}{20} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Diese Umkehrung des Erweiterns wollen wir mit Kürzen bezeichnen. Natürlich ändert sich auch dabei der Zahlenwert eines Bruches nicht.

Welche Kürzungszahl K muss man nehmen, damit die unten stehenden Gleichungen stimmen.

$$\frac{9}{6} = \frac{9:?}{6:?} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{8:?}{6:?} = \frac{4}{3}$$

Damit haben wir einen dritten wichtigen Lehrsatz gefunden:

<u>Lehrsatz (LS03)</u>: Der Zahlenwert eines Bruches ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert werden. Diese Operation nennt man "Kürzen".

Beispiele:

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{8}{20} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5}$$

In der Mathematik und im Leben sollte man danach streben, die Dinge zu vereinfachen. Betrachten wir z.B. folgenden Bruch:

$$\frac{12}{18}$$

Zerlegen wir Zähler und Nenner in ihre Primfaktoren, dann gilt:

$$12 = 2 * \mathbf{2} * \mathbf{3}$$
$$18 = \mathbf{2} * \mathbf{3} * 3$$

Der größte gemeinsame Teiler von 12 und 18 ist die Zahl 6, d.h. ggT(12,18) = 2 * 3 = 6. Der ggT ist das Produkt aus allen gemeinsamen Teilern. Kürzen wir unseren Bruch durch die Zahl 6, dann ist er offenkunding maximal vereinfacht !

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

Betrachten wir noch einmal das letzte Beispiel:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

Wir sehen dabei, dass wir jeden Bruch maximal vereinfachen, wenn wir durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner kürzen.

Das Ergebnis ist dann ein Bruch, der nicht weiter kürzbar ist.

Der nachfolgende Bruch soll in einen gleichwertigen, aber nicht weiter kürzbaren Bruch umgewandelt werden.

$$\frac{8}{20} = \frac{?}{?}$$

Damit haben wir einen vierten wichtigen Lehrsatz gefunden:

Lehrsatz (LS04): Ein Bruch wird maximal vereinfacht, wenn man ihn durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner kürzt. Das Ergebnis ist dann ein gleichwertiger, nicht weiter kürzbarer Bruch.

Beispiel:

$$\frac{24}{30} = \frac{24 : 6}{30 : 6} = \frac{4}{5}$$

ggT(24,30) = 6

Die Art eines Bruches hängt natürlich von Zähler und Nenner ab.
Bei echten Brüchen ist der Zähler kleiner als der Nenner (z.B. 3/4).
Bei unechten Brüchen ist der Zähler größer oder gleich dem Nenner (z.B. 4/3 oder 3/3).

Unechte Brüche werden auch als gemischte Zahlen angeschrieben:

$$\frac{4}{3} = 1\,{}^{1}/_{3}$$

$$\frac{11}{4} = 2\,{}^{3}/_{4}$$

Gemischte Zahlen bestehen somit aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruchteil.

Wenn der Nenner eines Bruches eine so genannte Zehner-Einheit 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, usw. ist, dann nennt man den Bruch einen Dezimalbruch.

Beispiele: 0.7 = 7/10, 3.1 = 31/10, 0.53 = 53/100, 0.025 = 25/1000.

Wir sehen, dass jede Dezimalzahl mit endlich vielen Dezimalstellen immer in einen Dezimalbruch umgewandelt werden kann.

0.5 = 5/10

2.3 = $2\,{}^{3}/_{10}$

0.14 = 14/100

0.07 = 7/100

4.09 = $4\,{}^{9}/_{100}$

$$2\,{}^{1}/_{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$1\,{}^{3}/_{8} = \frac{11}{8} = 1.375$$

Keine Dezimalbrüche sind folgende Beispiele:

$$1\,{}^{5}/_{9} = \frac{14}{9} = 1.555\ldots = 1.\underline{5}$$

$$3\,{}^{5}/_{6} = \frac{23}{6} = 3.8333\ldots = 3.8\underline{3}$$

$$2\,{}^{4}/_{7} = \frac{18}{7} = 2.571428571\ldots = 2.\underline{571428}$$

Zum Abschluss unseres Projektes wollen wir verschiedene Bruchzahlen ihrer Größe nach vergleichen und dann ordnen.

Wenn wir von zwei Bruchzahlen wissen wollen, welche von den beiden die größere Zahl ist, so können wir zuerst ihre dezimalen Werte ausrechnen, und dann diese direkt vergleichen.

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

$$\frac{7}{10} = 0.70$$

Also gilt: $$\frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

Den Vergleich von 3/4 und 7/10 können wir schneller durchführen: Wir erweitern beide Brüche, sodass sie den gleichen Nenner erhalten. Dafür nehmen wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der beiden Nenner: kgV(4,10) = 20.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 * 5}{4 * 5} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7 * 2}{10 * 2} = \frac{14}{20}$$

Jetzt vergleichen wir nur die beiden Zähler (14 < 15) und erhalten damit:

$$\frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

Brüche mit gleichen Nennern heißen gleichnamig.

Um zwei Bruchzahlen zu vergleichen, müssen wir sie so erweitern, dass sie gleichnamig werden. Von zwei gleichnamigen Bruchzahlen ist natürlich jene die größere, welche den größeren Zähler hat.

Gegeben sind die zwei Bruchzahlen 7/8 und 5/6.
Für ihren kleinsten gemeinsamen Nenner gilt:

kgV(8,6) = 24

Vergleichen vonBruchzahlen:

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \quad \text{weil} \quad {}^{12}/_{18} = {}^{12}/_{18}$$

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3} \quad \text{weil} \quad {}^{9}/_{12} > {}^{8}/_{12}$$

$$\frac{7}{12} < \frac{5}{8} \quad \text{weil} \quad {}^{14}/_{24} < {}^{15}/_{24}$$

Als letzte Fragestellung, wollen wir uns überlegen, wie viele Bruchzahlen zwischen zwei gegebenen Bruchzahlen liegen. Dazu beschränken wir uns auf direkt benachbarte gleichnamige Bruchzahlen, beispielsweise 5/8 und 6/8.

Wir erweitern beide Brüche mit der Zahl 2. Das ergibt dann:

5/8 = 10/16 und 6/8 = 12/16

Wir erkennen nun sofort, dass zwischen 5/8 und 6/8 die Bruchzahl 11/16 liegt.

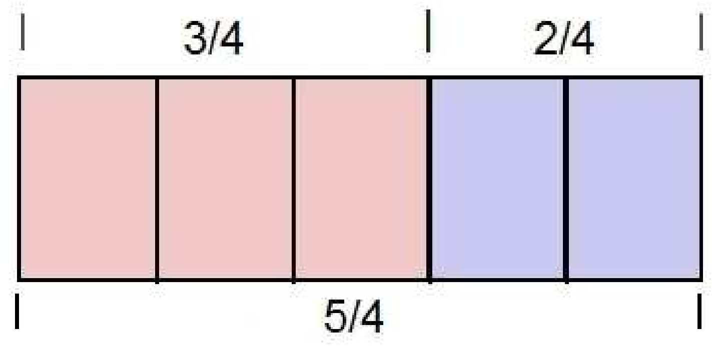
Mit dieser einfachen Technik kann man zwischen zwei Bruchzahlen immer weitere Bruchzahlen erzeugen. Offenbar liegen die Bruchzahlen beliebig dicht nebeneinander.

BRUCHZAHLEN

3. Teil: Addieren und Subtrahieren

Wir wollen zunächst nur gleichnamige Bruchzahlen addieren.
Aus der Grafik erkennt man, dass nur ihre Zähler addiert werden müssen. Der gemeinsame Nenner hingegen bleibt unverändert.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$



Beispiele:

$$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man sowie bei der Addition nur ihre Zähler subtrahiert. Der gemeinsame Nenner bleibt unverändert.

$$\frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Das gilt deswegen, weil die Subtraktion die Umkehrung der Addition ist:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

Beispiele:

$$\frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

Damit haben wir einen wichtigen fünften Lehrsatz gefunden:

Lehrsatz (LS05): Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man nur ihre Zähler addiert oder subtrahiert. Der gemeinsame Nenner bleibt unverändert.

Beispiele:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{6}{7} - \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

Nachdem wir gelernt haben, wie man gleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert, wollen wir uns ungleichnamigen Brüchen zuwenden.

Wie werden zwei ungleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert ?

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = ?$$

Dazu bringen wir die Brüche auf gemeinsamen Nenner. Sinnvoller Weise nehmen wir das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner.

kgV(4,6) = 12

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3*3}{4*3} + \frac{1*2}{6*2} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

Damit haben wir den sechsten Lehrsatz gefunden:

Lehrsatz (LS06): Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie zuerst auf den kleinsten gemeinsamen Nenner bringt. Dann wird mit den gleichnamigen Brüchen weiter gerechnet.

Beispiele:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \qquad kgV(3,2) = 6$$

$$\frac{7}{8} - \frac{2}{4} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8} \qquad kgV(8,4) = 8$$

Wir wollen uns nun mit gemischten Zahlen beschäftigen.

$$5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3} = ?$$

<u>1. Schritt:</u> Umwandlung der gemischten Zahlen in Brüche.

$$\frac{23}{4} - \frac{7}{3} = ?$$

<u>2. Schritt:</u> Auf gemeinsamen Nenner bringen.

$$\frac{69}{12} - \frac{28}{12} = \frac{41}{12}$$

<u>3. Schritt:</u> Gleichnamige Brüche subtrahieren und das Ergebnis wieder in eine gemischte Zahl umwandeln.

$$5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3} = 3\frac{5}{12}$$

Aufgaben:

Bringe die beiden ungleichnamigen Brüche auf den kleinsten gemeinsamen Nenner und addiere sie. Wandle das Ergebnis wieder in eine gemischte Zahl um, wobei der Bruchteil nicht weiter kürzbar sein soll. Führe alle Rechnungen auf einem Papierblatt aus.

$$3\,\frac{5}{6} + 2\,\frac{2}{9} = ?\,\frac{?}{?}$$

$$3\,\frac{1}{4} + 3\,\frac{1}{6} = ?\,\frac{?}{?}$$

$$4\,\frac{3}{4} - 3\,\frac{5}{8} = ?\,\frac{?}{?}$$

$$3\,\frac{2}{7} - 2\,\frac{1}{2} = ?\,\frac{?}{?}$$

BRUCHZAHLEN

4. Teil: Multiplizieren und Dividieren

Multiplizieren eines Bruches mit einer natürlichen Zahl:

$$\frac{2}{3} * 4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{3} * 4 = \frac{2*4}{3} = \frac{8}{3}$$

Weil die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl nichts anderes als eine mehrmalige Addition derselben Zahl ist, ergibt sich folgender einfacher siebenter Lehrsatz:

Lehrsatz (LS07): Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man nur den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner unverändert lässt.

Dividieren eines Bruches durch eine natürliche Zahl:

Fall 1: Die natürliche Zahl teilt den Zähler.

$$\frac{8}{3} : 4 = \frac{2}{3}$$

In diesem Fall muss nur der Zähler durch die natürliche Zahl dividiert werden und der Nenner bleibt unverändert.

$$\frac{6}{5} : 2 = \frac{3}{5}$$

Fall 2: Die natürliche Zahl teilt den Zähler nicht.

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1*2}{3*2} : 2 = \frac{2}{6} : 2 = \frac{1}{6}$$

Der zweite Fall wird auf den ersten Fall zurückgeführt, indem man den Bruch in entsprechender Weise erweitert und dann die Division durchführt. Im Ergebnis ist der Zähler unverändert und der Nenner wird mit der natürlichen Zahl multipliziert.

$$\frac{3}{2} : 4 = \frac{12}{8} : 4 = \frac{3}{8}$$

Somit haben wir den achten Lehrsatz gefunden.

Lehrsatz (LS08): Ein Bruch wird durch eine natürliche Zahl dividiert, indem man nur den Nenner mit der Zahl multipliziert und den Zähler unverändert lässt.

$$\frac{7}{8} : 2 = \frac{?}{?}$$

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{?}{?}$$

Die fehlenden Werte sind zu berechnen.

Gegeben ist eine Bruchzahl und eine natürliche Zahl.
Die beiden Zahlen werden multipliziert und dividiert. Dabei sollen die Rechenergebnisse nicht weiter kürzbare Brüche sein. Die fehlenden Werte sind zu berechnen.

$$\frac{5}{4} * 2 = \frac{?}{?}$$

$$\frac{5}{4} : 2 = \frac{?}{?}$$

Mit dem erworbenen Wissen können wir zwei Brüche multiplizieren:
Wir brauchen nur den ersten Bruch (a / b) mit dem Zähler des zweiten Bruches (c) multiplizieren und dann durch den Nenner (d) dividieren.

```
a   c     a              a*c           a*c
- * -  =  - * c : d  =   --- : d  =    ---
b   d     b               b            b*d
```

Damit haben wir folgenden neunten Lehrsatz gewonnen:

<u>Lehrsatz (LS09)</u>: Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man ganz einfach ihre Zähler und ihre Nenner miteinander multipliziert.

```
a   c   a*c
- * - = ---
b   d   b*d
```

Gegeben sind zwei Bruchzahlen. Die beiden Zahlen werden multipliziert. Dabei soll das Rechenergebnis ein nicht weiter kürzbarer Bruch sein. Die fehlenden Werte sind zu berechnen.

```
3   4    ?
- * - = ---
2   9    ?

5   8    ?
- * - = ---
2   3    ?

6   14    ?
- * -- = ---
7    9    ?
```

Wenn wir bei einem Bruch a / b seinen Zähler mit seinem Nenner vertauschen, dann erhält man einen neuen Bruch b / a. Dieser heißt der Kehrwert des Bruches. Beispielsweise ist der Kehrwert von 3/4 genau 4/3.

Was erhält man, wenn man einen Bruch mit seinem Kehrwert multipliziert ?

$$\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = \frac{a*b}{a*b} = 1$$

Das Produkt eines Bruches a / b mit seinem Kehrwert b / a ergibt somit immer die Zahl 1.

Als letzte Grundrechenart für Bruchzahlen fehlt uns die Division. Bevor wir diese Aufgabe lösen, müssen wir noch einen hilfreichen Lehrsatz über die Division von Dezimalzahlen erklären:

Das Ergebnis (der Quotient) Q einer Division X : Y bleibt unverändert, wenn man Dividend X und Divisor Y mit der selben Zahl E multipliziert.

X : Y = (X * E) : (Y * E) = Q

Mit diesem Hilfssatz können wir eine Zahl durch eine beliebige Dezimalzahl dividieren. Dazu werden der Dividend und der Divisor mit einer entsprechenden Einheit des Zehnersystems (10,100,1000, ...) so multipliziert, dass der Divisor zur ganzen Zahl wird.

2 : 0.5 = 20 : 5 = 4, mit Erweiterungszahl E = 10
3 : 0.06 = 300 : 6 = 50, mit Erweiterungszahl E = 100

Wir wollen nun zwei Bruchzahlen dividieren.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ?$$

Wir multiplizieren nun den ersten Bruch (Dividend) und den zweiten Bruch (Divisor) mit d. Wegen des letzten Lehrsatzes ändert sich das Divisionsergebnis dabei nicht.

$$\left(\frac{a}{b} * d\right) : \left(\frac{c}{d} * d\right) = \frac{a*d}{b} : \frac{c*d}{d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a*d}{b} : \frac{c*\cancel{d}}{\cancel{d}} = \frac{a*d}{b} : c = \frac{a*d}{b*c}$$

Nachdem wir die zwei Brüche entsprechend dem Hilfssatz mit d multipliziert haben, kann der zweite Bruch durch d gekürzt werden. Dann müssen wir nur noch durch c dividieren.

Wenn wir bei einem Bruch c/d seinen Zähler mit seinem Nenner vertauschen, dann erhält man seinen Kehrwert d/c. Beispielsweise ist der Kehrwert von 3/4 genau 4/3.

Betrachten wir nun unsere Division zweier Bruchzahlen, wie wir sie hergeleitet haben:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a*d}{b*c}$$

Wir erkennen, dass wir statt durch c/d zu dividieren auch mit dem Kehrwert d/c multiplizieren können.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a*d}{b*c}$$

Somit haben wir unseren letzten, zehnten Lehrsatz erhalten:

<u>Lehrsatz (LS10)</u>: Man dividiert durch einen Bruch, indem man ganz einfach nur mit seinem Kehrwert multipliziert.

Beispiel:

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{5} = \frac{7}{8} * \frac{5}{3} = \frac{35}{24}$$

Wie multipliziert oder dividiert man eine natürliche Zahl a mit einem Bruch c/d ?

$$a * \frac{c}{d} = ? \qquad\qquad a : \frac{c}{d} = ?$$

Dazu schreibt man die natürliche Zahl a als Bruch an: a = a/1.
Nun kann man wie mit zwei Brüchen weiter rechnen.

$$a * \frac{c}{d} = \frac{a}{1} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{d}$$

$$a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} * \frac{d}{c} = \frac{a*d}{c}$$

Gegeben sind zwei Bruchzahlen. Die beiden Zahlen werden dividiert. Dabei soll das Ergebnis der Rechnung immer ein nicht weiter kürzbarer Bruch sein. Die fehlenden Werte sind zu berechnen.

$$\frac{3}{4} : \frac{8}{9} = \frac{?}{?}$$

$$\frac{6}{7} : \frac{3}{7} = \frac{?}{?}$$

$$\frac{3}{5} : \frac{9}{10} = \frac{?}{?}$$

Zusammenfassung

$$x = \frac{z}{n}$$

Ein Bruch ist zunächst eine Aufforderung ein Merkmal in genau n gleiche Teile zu zerlegen und dann einen solchen Teil genau z-Mal zu vervielfachen.

Dividiert man den Zähler z durch den Nenner n, so erhält man den dezimalen Wert einer Bruchzahl.

Solche Bruchzahlen kann man kürzen, erweitern, addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren. Weil jede Bruchzahl als Dezimalzahl dargestellt werden kann, gelten alle bekannten Rechenregeln für Dezimalzahlen auch für Bruchzahlen, beispielsweise die Vertauschungsregel der Addition oder die Vorrangregeln der vier Grundrechenarten, usw.

Für die Rechenoperationen mit Bruchzahlen haben wir zehn sehr wichtige Lehrsätze bewiesen, die zum Abschluss noch einmal zusammengefasst werden:

Lehrsatz (LS01): Ein Bruch kann entweder in eine abbrechende Dezimalzahl oder in eine periodische Dezimalzahl umgewandelt werden. Die Art der Dezimalzahl ist abhängig von dem Zähler und dem Nenner des Bruches.

Lehrsatz (LS02): Der Zahlenwert eines Bruches ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden. Diese Operation nennt man "Erweitern".

Lehrsatz (LS03): Der Zahlenwert eines Bruches ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert werden. Diese Operation nennt man "Kürzen".

Lehrsatz (LS04): Ein Bruch wird maximal vereinfacht, wenn man ihn durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner kürzt. Das Ergebnis ist dann ein gleichwertiger, nicht weiter kürzbarer Bruch.

Lehrsatz (LS05): Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man nur ihre Zähler addiert oder subtrahiert. Der gemeinsane Nenner bleibt unverändert.

Lehrsatz (LS06): Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie zuerst auf den kleinsten gemeinsamen Nenner bringt. Dann wird mit den gleichnamigen Brüchen weiter gerechnet.

Lehrsatz (LS07): Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man nur den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner unverändert läßt.

Lehrsatz (LS08): Ein Bruch wird durch eine natürliche Zahl dividiert, indem man nur den Nenner mit der Zahl multipliziert und den Zähler unverändert läßt.

Lehrsatz (LS09): Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man ganz einfach ihre Zähler und ihre Nenner miteinander multipliziert.

Lehrsatz (LS10): Man dividiert durch einen Bruch, indem man ganz einfach nur mit seinem Kehrwert multipliziert.