Lineare Gleichungen und Textaufgaben

Erweiterte Version 4.0 © Herbert Paukert

Vorausgesetzt wird hier nur, dass man die Zahlen und die vier Grundrechenoperationen kennt. Weiter wird noch vorausgesetzt, dass man das Koordinatensystem kennt und weiß, was eine gerade Linie ist.

Hinweis: In Dezimalzahlen wird anstelle des Kommas ein Dezimalpunkt geschrieben.

(1) Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Variable und Terme

Variable sind Platzhalter für Zahlen. Sie werden mit Buchstaben a, b, c,... bezeichnet.

Ein Rechenausdruck oder Term enthält Zahlen und Variable, welche durch Rechenoperationen miteinander verknüpft sind.
Beispiel: 2*a + 3*b.

Setzt man in einen Term für die vorkommenden Variablen bestimmte Zahlen ein, dann erhält man einen Wert des Terms. Beispielsweise für a = 5 und b = 2 gilt 2*a + 3*b = 2*5 + 3*2 = 16.

Die Menge der zulässigen Zahlen, die in einen Term eingesetzt werden dürfen, nennt man die Definitionsmenge D des Terms. Beispielsweise darf in den Term 1 / a für die Variable a die Zahl Null nicht eingesetzt werden. Also liegt die Zahl Null nicht in der Definitionsmenge des Terms.

a + a = 2*a, für a = 3 ist 2*a = 6.
a + 2*a + a = 4*a, für a = 5 ist 4*a = 20.
a + a + b + b + b = 2*a + 3*b.
a*(b + c) = a*b + a*c, Verteilungsgesetz der Multiplikation.
2*a*(b + 3) = 2*a*b + 6*a, wegen dem Verteilungsgesetz.

Gleichungen

Gegeben sind zwei Terme L(x) und R(x) mit ein und derselben Variablen x. Werden die beiden Terme gleichgesetzt, dann heißt die Aussageform L(x)= R(x) eine "Gleichung" in der Variablen x. Beispielsweise 2*x = x + 3. Hier ist L(x)= 2*x und R(x)= x + 3. L(x) und R(x) heißen linke und rechte Seite der Gleichung.

Die Definitionsmenge D einer Gleichung enthält alle zulässigen Zahlen, welche in beide Terme eingesetzt werden dürfen.

Jene Zahlen, welche nach ihrer Einsetzung die Gleichung zu einer "wahren" Aussage (w.A.) machen, heißen Lösungen der Gleichung. Zahlen, welche zu einer "falschen" Aussage (f.A.) führen, sind keine Lösungen. Die Lösungen einer Gleichung bilden die Lösungsmenge. Diese Lösungsmenge ist eine Teilmenge der Definitionsmenge.

Die Lösungen einer Gleichung werden im einfachsten Fall durch Ausprobieren gefunden.

Betrachten wir die Gleichung 2*x = x + 3, dann gilt für x = 5: L(5) = 2*5 = 10 und R(5) = 5 + 3 = 8. Also ist L(x) = R(x) für x = 5 eine falsche Aussage und x = 5 keine Lösung. Setzt man aber x = 3 ein, dann gilt: L(3) = 6 und R(3) = 6. Man erhält eine wahre Aussage L(3) = R(3) und x = 3 ist daher eine Lösung.

Wenn die Gleichung komplizierter gebaut ist, dann wird man durch Probieren die Lösung nur sehr schwer finden. Dann wird man die Methode der so genannten "Äquivalenzumformung" verwenden.

Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie dieselben Lösungen haben.

[I] 2*x = x + 3
[II] 2*x - x = 3
[III] x = 3

Alle drei oben stehenden Gleichungen haben die Lösung x = 3 und sind somit äquivalent. Zur Gleichung [II] kommt man, indem man auf beiden Seiten der Gleichung [I] die Variable x subtrahiert. Zur letzten Gleichung [III] gelangt man, indem man in der Gleichung [II] richtig zusammenfasst.

Eine mathematische Umformung einer Gleichung, durch welche die Lösungsmenge der Gleichung NICHT verändert wird, nennt man eine "Äquivalenzumformung" der Gleichung.

Wie das Beispiel zeigt, kann durch Äquivalenzumformungen und durch Zusammenfassen und Vereinfachen von Termen eine Lösung der Gleichung schrittweise gefunden werden.

Die Gleichung L(x) = R(x) kann durch eine zweiarmige Balkenwaage veranschaulicht werden. Diese bleibt im Gleichgewicht, wenn man auf den beiden Waagschalen das gleiche Gewicht dazulegt oder das gleiche Gewicht wegnimmt. Auch ein Verdoppeln oder ein Halbieren der Gewichte auf den Waagschalen verändert das Gleichgewicht nicht. Das entspricht einer Äquivalenzumformung der Gleichung.

Beispiel: 3*x + 5 = 8 + x   Definitionsmenge D = alle Zahlen.

```
3*x + 5 = 8 + X           | - x auf beiden Seiten
2*x + 5 = 8               | - 5 auf beiden Seiten
2*x = 3                   | : 2 auf beiden Seiten
x = 1.5                   | Lösung gefunden
```

Probe: L(1.5) = 3* 1.5 + 5 = 9.5 = R(1.5), wahre Aussage.

Eine Gleichung wird äquivalent umgeformt, wenn man auf beiden Seiten denselben Term addiert oder subtrahiert, oder auf beiden Seiten denselben Term (dessen Wert nicht 0 ist) multipliziert oder dividiert.

Mittels Äquivalenzumformungen können auch kompliziertere Gleichungen gelöst werden. Ziel ist dabei, die Gleichung solange umzuformen, bis auf einer Seite nur mehr die Variable und auf der anderen Seite nur mehr eine Zahl steht.

Beispiel: 5*(x + 2) + x + 4 = 3*x - 1 (D = alle Zahlen)

```
5*x + 10 + x + 4 = 3*x – 1        | Terme vereinfachen
6*x + 14 = 3*x – 1                |-14 auf beiden Seiten
6*x = 3*x – 15                    | - 3*x auf beiden Seiten
3*x = -15                         | : 3 auf beiden Seiten
x = -5                            | Lösung gefunden
```

Probe: L(-5) = 5*(-3) + (-5) + 4 = -16 = R(-5), wahre Aussage.

Man unterscheidet verschiedene Arten von Gleichungen. Einfache Gleichungen sind lineare Gleichungen: a*x + b = 0, wobei a und b feste Zahlen (Konstante) sind. Durch äquivalente Umformung erhält man die eindeutige Lösung: x = - b/a.

Hinweis: Eine Gleichung heißt linear, wenn jede Variable höchstens in der ersten Potenz vorkommt.

Bei Textgleichungen muss die gesuchte Größe mit der Variablen x bezeichnet und dann der Text in eine Gleichung übersetzt werden.

Beispiel 1: Ein Knabe wird in 10 Jahren doppelt so alt sein wie seine Schwester, die heute genau 4 Jahre alt ist. Wie alt ist der Knabe heute?

Lösung 1: Mit x als heutigem Alter des Knaben gilt:
x + 10 = 2*(4+10)
x + 10 = 28
x = 18

Beispiel 2: Man erhält das Dreifache einer Zahl, wenn man diese Zahl von 100 subtrahiert. Wie groß ist diese Zahl?

Lösung 2: Mit x als gesuchte Zahl gilt:
3*x = 100 – x
4*x = 100
x = 25

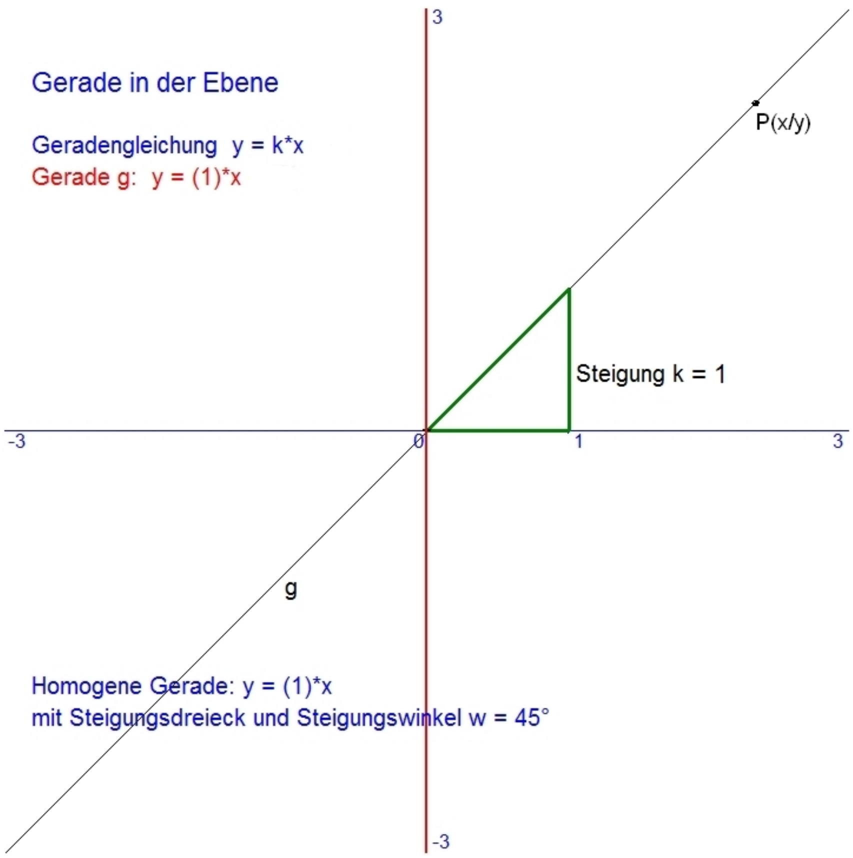
(2) Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Ausgangspunkt ist eine lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y von der Form y = k*x, wobei k ein konstanter Zahlenwert ist. Berechnet man zu verschiedenen x-Werten die zugeordneten y-Werte, so erhält man eine lineare Funktion.

Trägt man in einem Koordinatensystem beliebige x-Werte auf der x-Achse und die zugeordneten y-Werte dann parallel zur y-Achse auf, erhält man eine Menge von Punkten P(x/y), die alle auf einer Geraden liegen.

Das Schaubild einer linearen Funktion der Form y = k*x ist eine steigende oder fallende Gerade, welche immer durch den Ursprung O(0/0) des Koordinatensystems geht.

Die Funktion y = k*x heißt homogene lineare Funktion.

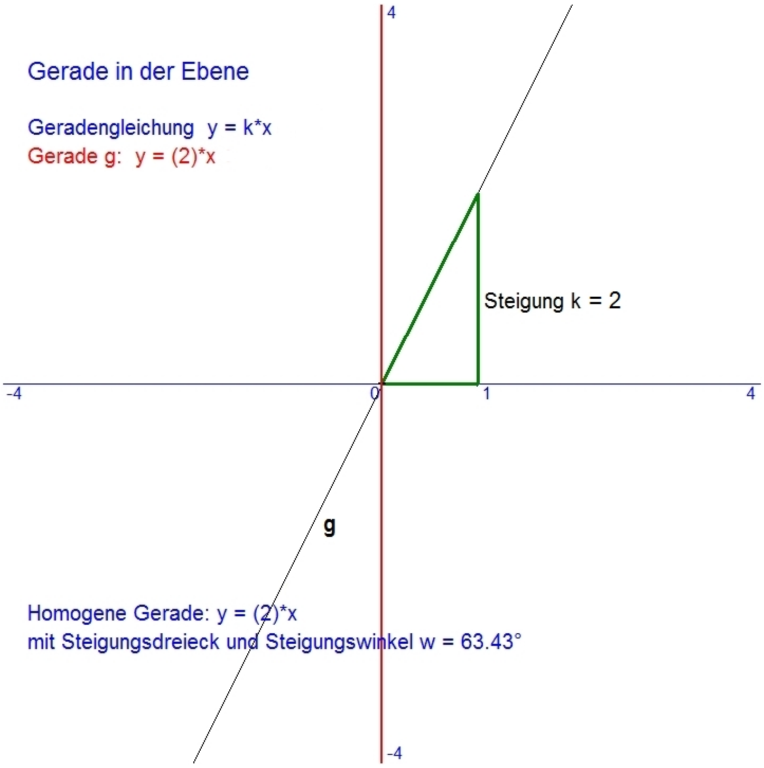


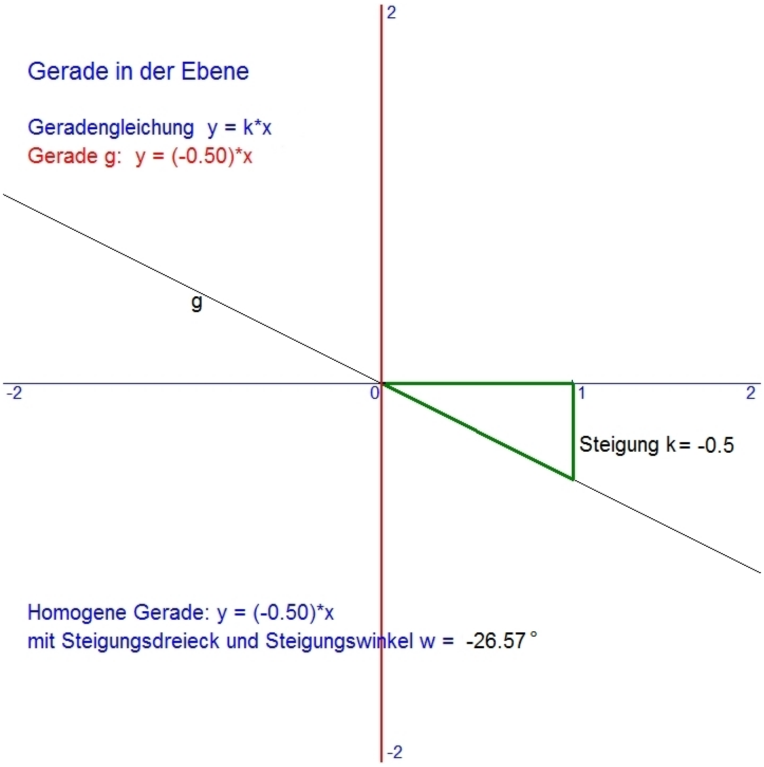
Tabelle

x	y
..	..
..	..
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
..	..
..	..

Hinweis: Wenn wir die homogene lineare Gerade y = k*x ansehen und x = 1 setzen, dann erhalten wir für y die Steigung k. Der Punkt Q(1/k) liegt daher auf der Geraden. Der von der x-Achse und der Geraden eingeschlossene Winkel heißt Steigungswinkel, und das Dreieck O(0/0), P(1/0), Q(1/k) heißt Steigungsdreieck.

Die Konstante k bestimmt die Steigung der Geraden. Das Vorzeichen von k entscheidet, ob die Gerade ansteigt (k > 0), oder ob die Gerade abfällt (k < 0). Der Betrag von k gibt an, wie stark die Gerade steigt oder fällt.

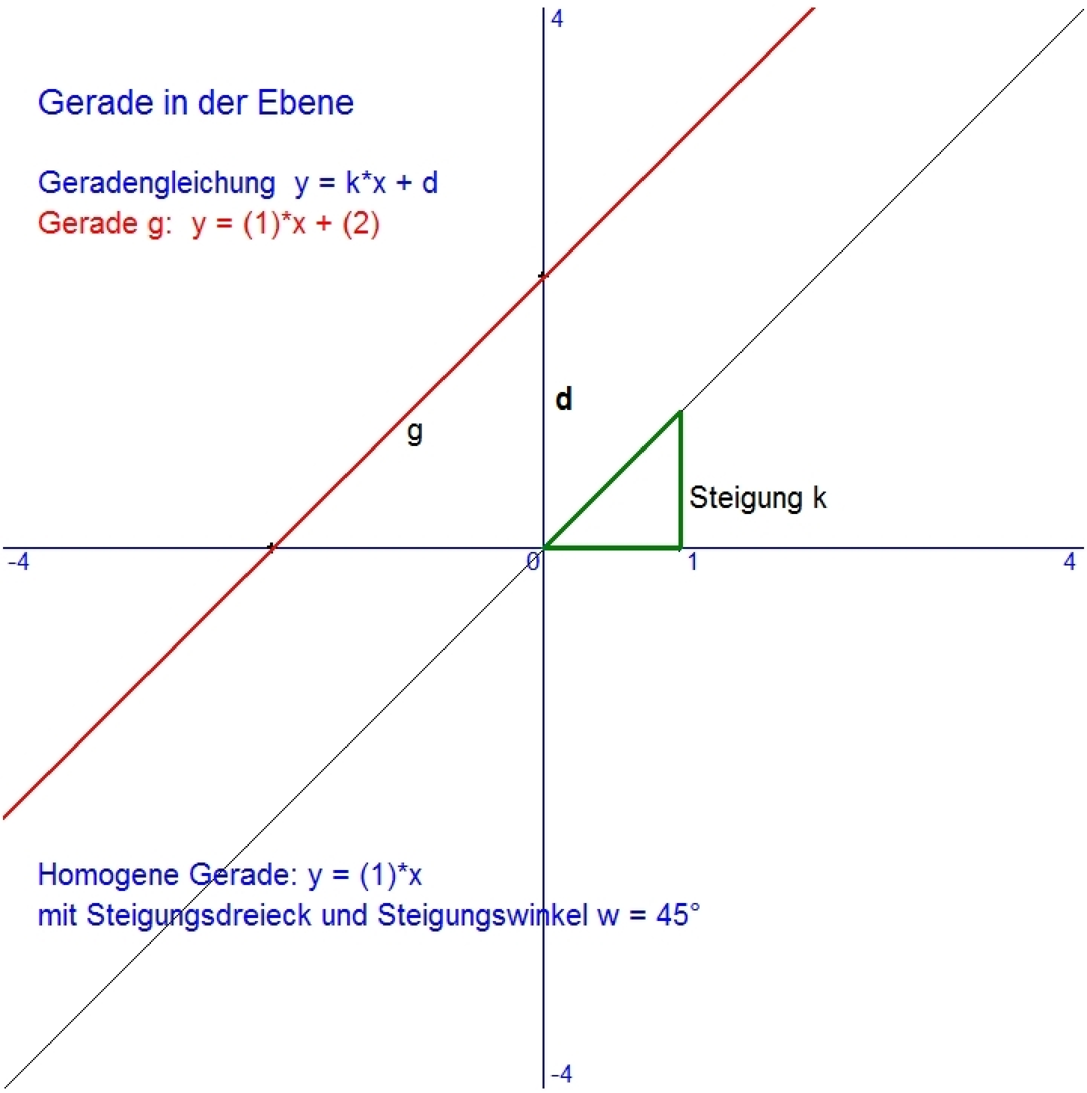




Wenn wir nun die allgemeine lineare Funktion y = k*x + d betrachten, wobei die Konstanten k und d nicht Null sind, so stellen wir fest, dass für x = 0 das zugehörige y = d ist. Also liegt der Punkt P(0/d) auf der Geraden, d.h. die Gerade geht nicht durch den Koordinatenursprung O(0/0).

Der Punkt P(0/d) liegt aber auch auf der y-Achse, weil dort für alle Punkte x = 0 ist. Er ist somit der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Die Konstante d heißt y-Abschnitt.

Die Funktion y = k*x + d heißt inhomogene lineare Funktion.



Tabelle

x	y
..	..
..	..
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5
..	..
..	..

Offensichtlich entsteht eine inhomogene Gerade dadurch, dass jeder Punkt der homogenen Geraden um den Abschnitt d parallel zur y-Achse verschoben wird. Die Steigungen der beiden Geraden sind natürlich gleich.

Eine lineare Gleichung mit den zwei Variablen x und y hat die allgemeine Form:

a*x + b*y = c

Dabei sind a, b und c konstante Zahlenwerte. Durch so genannte Äquivalenzumformungen wird diese Gleichung so lange umgeformt bis die Variable y alleine auf einer Gleichungsseite steht.

```
a*x + b*y = c
      b*y = -a*x + c
        y = (-a/b)*x + (c/b)
```

Durch Umformungen erhalten wir somit: y = (-a/b)*x + (c/b). Diese Gleichungsform heißt explizit, weil y alleine auf einer Seite steht. Andernfalls heißt die Gleichungsform implizit.

y = (-a/b)*x + (c/b)

Setzen wir nun (-a/b) = k und (c/b) = d, dann erhalten wir die Gleichung einer Geraden in der Ebene mit k als Steigung und d als y-Abschnitt: y = k*x + d.

Beispiel:

```
5*x - 4*y   = 8 (implizite Form)
y = 1.25*x - 2 (explizite Form)
```

Will man diese Gerade zeichnen, dann muss man zwei Punkte A und B ermitteln, welche auf der Geraden liegen. Dazu wählt man einen beliebigen x-Wert und rechnet dann den zugehörigen y-Wert aus. Hinweis: Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt.

```
x = 0, y = 1.25*0 - 2 = -2, A(0/-2)
x = 4, y = 1.25*4 - 2 = 3,  B(4/3)
```

Ergebnis:

Die Gerade g mit der Gleichung y = 1.25*x - 2 verläuft durch die zwei Punkte A(0/-2) und B(4/3). Damit kann die Gerade g gezeichnet werden.

Die Zahlenpaare (x,y) in einer linearen Gleichung mit zwei Variablen entsprechen den Punkten P(x/y) auf einer Geraden in der Ebene.

(3) Lineare Gleichungssysteme (Theorie)

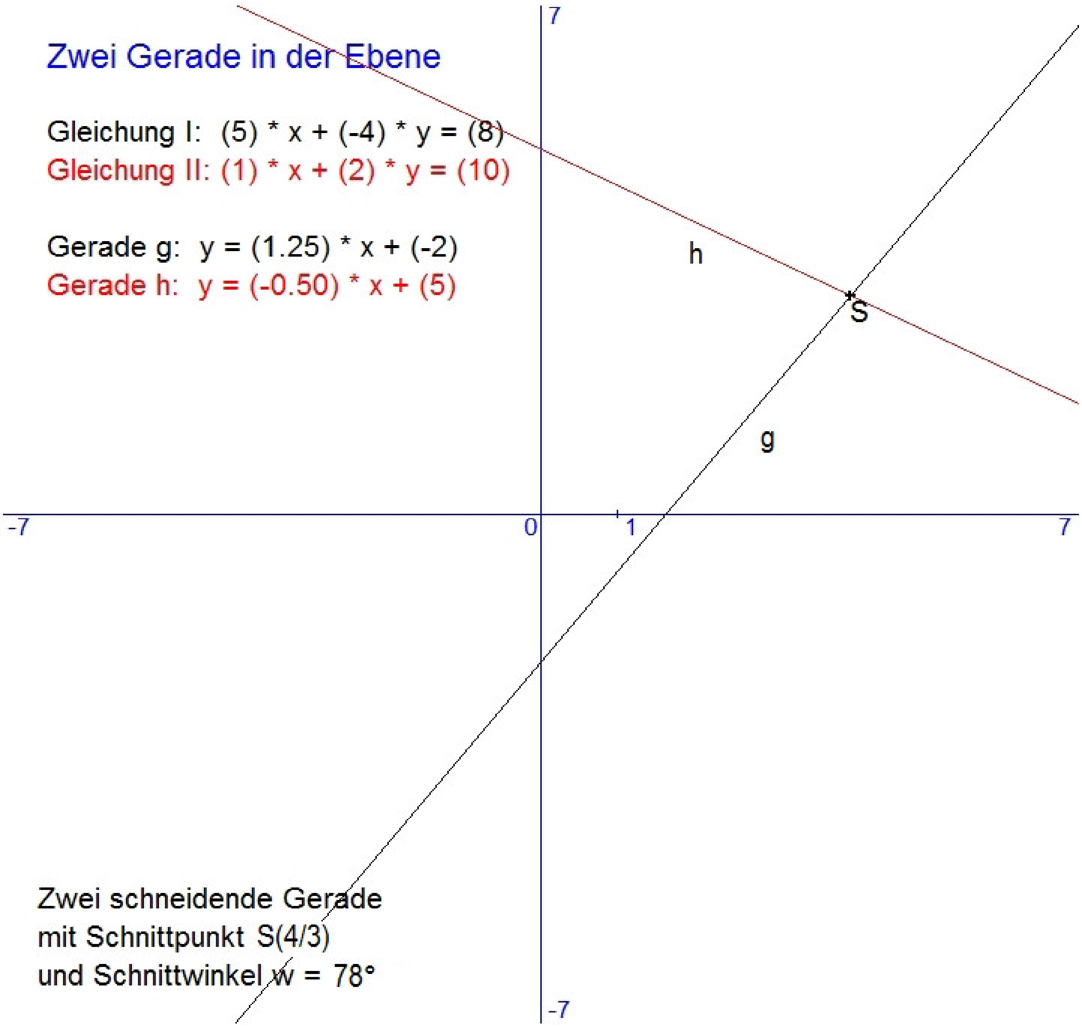
Es sind zwei Geraden in der Ebene mit ihren linearen Gleichungen gegeben, beispielsweise:

```
(g) 5*x - 4*y =  8
(h)   x + 2*y = 10

(g) y = 1.25*x - 2   (Steigung k = 1.25, Abschnitt d = -2)
(h) y = -0.5*x + 5   (Steigung k = -0.5, Abschnitt d = 5)
```

Wenn es einen Schnittpunkt S(x/y) gibt, dann muss er auf beiden Geraden liegen, d.h. wenn man seine Koordinaten in die beiden Gleichungen einsetzt, erhält man zwei wahre Aussagen.

Grundsätzlich können zwei Geraden in der Ebene entweder identisch, parallel oder einander schneidend sein. Ihre gegenseitige Lage hängt im Wesentlichen von ihren Steigungen ab. Nur wenn die Steigungen der Geraden verschieden sind, gibt es einen eindeutigen Schnittpunkt.



Wie wird der Schnittpunkt S(x/y) von zwei Geraden ermittelt? Ausgangspunkt der Ermittlung des Schnittpunktes sollen die beiden impliziten Geradengleichungen (g) und (h) sein:

```
(g)  5*x - 4*y =  8
(h)    x + 2*y = 10
```

Wir multiplizieren die beiden Seiten der zweiten Gleichung mit 2. (Durch diese Umformung wird die Lösungsmenge nicht verändert.)

```
(g)  5*x - 4*y =  8
(h)  2*x + 4*y = 20
```

Dann addieren wir die Seiten der beiden Gleichungen, wodurch die Variable y eliminiert wird (Eliminationsmethode). (Durch diese Umformung wird die Lösungsmenge nicht verändert.)

```
(g) + (h):  7*x + 0*y = 28.  Daraus folgt x = 4.
```

Den erhaltenen x-Wert setzen wir nun in die zweite Gleichung ein und berechnen den y-Wert: 4 + 2*y = 10. Daraus folgt y = 3.

Somit haben wir den Schnittpunkt S(4/3) der Geraden ermittelt. Als Probe können wir den Schnittpunkt in beide Gleichungen ein-setzen. Erhalten wir wahre Aussagen, haben wir richtig gerechnet.

Das besprochene Lösungsverfahren heißt Eliminationsmethode, weil dabei immer eine Variable eliminiert (ausgeschaltet) wird.

Ein zweites Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme ist die Substitutionsmethode (Einsetzungsmethode). Diese wollen wir nun auf unsere beiden Geradengleichungen anwenden:

```
(g)  5*x - 4*y =  8
(h)    x + 2*y = 10
```

Wir stellen aus der zweiten Gleichung die Variable x explizit dar und setzen den Ausdruck für x in die erste Gleichung ein. Dann berechnen wir durch Umformung die Variable y.

```
(g)  5*x - 4*y = 8
(h)    x = 10 - 2*y
```

```
(g)  5*(10 - 2*y) - 4*y = 8.  Daraus folgt y = 3.
```

Den erhaltenen y-Wert setzen wir nun in die zweite Gleichung ein und berechnen den x-Wert: x = 10 - 2*3. Daraus folgt x = 4. Somit haben wird den Schnittpunkt S(4/3) der Geraden ermittelt.

Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems:

(g) a*x + b*y = c
(h) d*x + e*y = f

Die Steigung der Geraden g ist k1 = -a/b.
Die Steigung der Geraden h ist k2 = -d/e.

Das System hat keinen Schnittpunkt, wenn k1 = k2 ist. Dann sind die Geraden parallel. Dann gilt:

-a/b = -d/e
a*e = b*d
a*e - b*d = 0

Der Ausdruck (a*e - b*d) heißt die Determinante DET des Systems. Wenn dieser Ausdruck Null ist, schneiden die Geraden sich nicht.

Somit gilt folgender Hauptsatz:
Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante DET = (a*e - b*d) nicht gleich Null ist.

Beispiel:

(g) 5*x - 4*y = 8
(h) x + 2*y = 10

DET = 5*2 - (-4)*1 = 14. Das System ist eindeutig lösbar.

Schreibt man die konstanten Zahlenwerte (Koeffizienten) a, b, c und d, e, f in zwei Zeilen und drei Spalten an, so nennt man eine solche Anordnung eine (2 x 3)-Matrix. Hier nennt man sie auch die erweiterte Systemmatrix.

a b c
d e f

Die zwei linken Spalten bilden eine (2 x 2)-Matrix, die man nur Systemmatrix nennt. (Solche Matrizen heißen auch quadratisch.)

a b
d e

Die Hauptdiagonale (rot) der Matrix geht von links oben nach rechts unten, die Nebendiagonale (blau) von rechts oben nach links unten. Die Determinante der Matrix DET = (a*e - b*d) wird so gebildet, dass man das Produkt der Zahlen aus der Nebendiagonale von dem Produkt der Zahlen aus der Hauptdiagonale subtrahiert. Das liefert eine einfache Merkregel für die Berechnung der Determinante.

Betrachten wir noch einmal das lineare Gleichungssystem. Wir wollen zum Abschluss eine allgemeine Lösungsformel herleiten. Damit können die Lösungen (x/y) direkt aus den Koeffizienten a, b, c, d, e, f berechnet werden.

$a*x + b*y = c$ (I)
$d*x + e*y = f$ (II)

Stellt man y aus (II) explizit dar und setzt y in (I) ein, dann erhält man für x:

$x = (c*e - b*f) / (a*e - b*d)$

Setzt man diesen Wert von x in (II) ein, dann erhält man für y:

$y = (a*f - c*d) / (a*e - b*d)$

Die Rechenausdrücke in diesen Formeln sind Determinanten von Teilmatrizen aus der erweiterten Systemmatrix, die man dadurch erhält, dass man eine bestimmte Spalte durch die rechte Spalte ersetzt. Dabei bezeichnet die tiefer gestellte Zahl die Nummer der ersetzten Spalte.

a	b	c	Erweiterte Systemmatrix
d	e	f	

a	b	Systemmatrix mit $DET = a*e - b*d$
d	e	

c	b	Teilmatrix mit $DET_1 = c*e - b*f$
f	e	

a	c	Teilmatrix mit $DET_2 = a*f - c*d$
d	f	

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die oben hergeleiteten Lösungsformeln folgendermaßen anschreiben ("Cramersche Regel"):

$x = DET_1 / DET$

$y = DET_2 / DET$

Hinweis: Die hier hergeleiteten Ergebnisse für lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen können in entsprechend angepasster Form auch auf lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen übertragen werden.

(4) Lineare Gleichungssysteme (Übungen)

Musteraufgabe:

```
  (I)  4*x - y = 3
  (II) 2*x + 3*y = 19
```

Ermittle die Lösungen und mache die Probe.

Lösung nach der Substitutionsmethode:

```
(I)  4*x – y = 3
     y = 4*x – 3

(II) 2*x + 3*(4*x – 3) = 19
     2*x + 12*x – 9 = 19
     14*x = 28
     x = 2

     y = 4*2 – 3 = 5
```

Die Gleichung hat die Lösungen x = 2 und y = 5.

```
Probe: (I)  4*2 – 5 = 3, 3 = 3, w.A.
       (II) 2*2 + 3*5 = 19, 19 = 19, w.A.
```

Löse die nachfolgenden Aufgaben und mache jeweils die Probe.
(Dezimalzahlen werden auf zwei Nachkommastellen gerundet).

```
A01:   2*x + 5*y = -4
       4*x - 6*y =  0

A02:  -3*x + 2*y = 16
       4*x + 4*y = 12

A03:  -4*x + 6*y =  3
       8*x – 6*y = -5

A04:   9*x + 4*y =  7
      -8*x + 3*y =  1

A05:   3*x + 9*y = -2
       8*x + 6*y =  9
```

(5) Verschiedene Textaufgaben

Musteraufgabe:

Adam und Eva sind Geschwister. Adam war vor fünf Jahren doppelt so alt wie Eva. In vier Jahren werden beide zusammen 27 Jahre alt sein. Wie alt sind sie heute?

Lösung in sechs Schritten:

1.Schritt: Die Variablen definieren.

x = heutiges Alter von Adam, y = heutiges Alter von Eva

2.Schritt: Tabellen, Skizzen oder Diagramme anlegen.

Alter	Adam	Eva
vor 5 Jahren:	x-5	y-5
heute:	x	y
in 4 Jahren:	x+4	y+4

3.Schritt: Die Gleichungen aufstellen.

(I) x-5 = 2*(y-5)
(II) (x+4)+(y+4) = 27

4.Schritt: Die Gleichungen äquivalent umformen und lösen.

(I) x-5 = 2*y-10
x = 2*y-5

(II) x+y+8 = 27
x+y = 19

Nun x von (I) in (II) einsetzen:
(2*y-5)+y = 19
3*y-5 = 19
3*y = 24
y = 8
x = 2*8-5 = 11

5.Schritt: Die Antwort formulieren.

Adam ist heute 11 Jahre alt. Eva ist heute 8 Jahre alt.

6.Schritt: Die Probe durchführen.

(I) 11-5 = 6, 2*(8-5) = 6, 6 = 6, w.A.
(II) (11+4)+(8+4) = 15+12 = 27, 27 = 27, w.A.

Löse die nachfolgenden Aufgaben und mache jeweils die Probe. (Dezimalzahlen werden auf zwei Nachkommastellen gerundet).

A06: **In einem Stall befinden sich Hasen und Hühner. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wie viele Hasen und wie viele Hühner sind in dem Stall?**

A07: **Von zwei Zahlen weiß man, dass ihre Differenz um 1 größer ist als das Doppelte der kleineren Zahl. Verringert man ihre Summe um 4, dann erhält man das Dreifache der kleineren Zahl. Wie groß sind die beiden Zahlen?**

A08: **In einem Jugendheim gibt es 18 Zimmer (Vier- und Sechsbettzimmer). Insgesamt können im Heim 84 Jugendliche untergebracht werden. Wie viele Vierbettzimmer und wie viele Sechsbettzimmer gibt es?**

A09: **Zwei Tassen Kaffee und ein Stück Kuchen kosten 8.00 €.**
Drei Tassen Kaffee und vier Stück Kuchen kosten 20.00 €.
Wie hoch sind die Preise für eine Tasse Kaffee und für ein Stück Kuchen?

A10: **Fünf Ochsen und zwei Schafe kosten acht Goldstücke.**
Zwei Ochsen und fünf Schafe kosten denselben Preis.
Wie hoch ist der Preis für jedes einzelne Tier?

A11: **Ein Unternehmer stellt einen Arbeiter für 30 Tage an.**
Wenn dieser arbeitet, dann bekommt er 70 € pro Tag.
Wenn er nicht arbeitet, dann muss er 50 € pro Tag zahlen.
Nach den 30 Tagen ist keiner dem anderen etwas schuldig.
An wie vielen Tagen hat der Arbeiter gearbeitet und wie viele freie Tage hat er gehabt?

A12: **Ein Mann und eine Frau wollen ein Pferd um 11 Gulden kaufen. Der Mann sagt zu der Frau: "Gib mir ein Drittel von deinem Geld. Wenn ich mein Geld dazugebe, dann kann ich das Pferd bezahlen". Daraufhin sagt die Frau zum Mann: "Gib du mir von deinem Geld ein Viertel, dann kann mit meinem Geld zusammen das Pferd gekauft werden". Wie viel Geld hat jeder gehabt?**

A13: **Ein Hamburger und drei Portionen Pommes kosten 9 €.**
Drei Hamburger und zwei Portionen Pommes kosten 13 €.
Wie viel kosten ein Hamburger und eine Portion Pommes?

A14: **Der Preis von 9 Äpfeln vermindert um den Preis von einer Birne beträgt 13 Denare. Der Preis von 19 Birnen vermindert um den Preis eines Apfels beträgt 8 Denare. Wie teuer ist ein Apfel und wie teuer ist eine Birne?**

A15: **20 Personen, Männer und Frauen, essen in einem Wirtshaus. Jeder Mann isst um 8 Groschen. Jede Frau hingegen isst um einen Groschen weniger. Die ganze Rechnung beläuft sich auf 6 Reichstaler, wobei ein Reichstaler gleich 24 Groschen ist. Aus wie vielen Männern und wie vielen Frauen besteht die Personengruppe?**

A16: Gegeben sind zwei Zahlen. Subtrahiert man vom Vierfachen der ersten Zahl das Dreifache der zweiten Zahl, dann erhält man 10. Addiert man das Doppelte der ersten Zahl zur halben zweiten Zahl, dann erhält man 17. Wie lauten diese Zahlen?

A17: Die Zahl 75 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass der eine Summand um 5 kleiner ist als das Dreifache des zweiten Summanden. Wie groß sind die zwei Summanden?

A18: Helga ist in diesem Jahr drei Mal so alt wie Maria. In fünf Jahren wird Helga doppelt so alt sein wie Maria. Wie alt sind Helga und Maria in diesem Jahr?

A19: Michaels Vater ist um 27 Jahre älter als er. Vor neun Jahren war der Vater vier Mal so alt wie Michael. Wie alt sind Vater und Sohn?

A20: Der Umfang eines Rechtecks beträgt 64 cm. Wird die längere Seite um 2 cm verlängert und die kürzere Seite um denselben Wert verkürzt, dann wird die Fläche um 16 cm² kleiner. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

A21: Ein Mädchen antwortet auf die Frage, wie viele Geschwister es habe: "Ich habe ebenso viele Brüder wie Schwestern". Einer ihrer Brüder aber erklärt: "Ich habe dreimal so viele Schwestern wie Brüder". Wie viele Knaben und wie viele Mädchen sind es?

A22: Bestimme zwei Zahlen mit folgenden Eigenschaften: Wird die erste um 4 größer und die zweite um 4 kleiner, so wächst das Produkt um 20. Wird hingegen die erste um 9 kleiner und die zweite um 15 größer, so bleibt das Produkt unverändert. Wie lauten die Zahlen?

A23: Eine natürliche Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Summe 6 ist. Schreibt man ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge und addiert zu dieser neuen Zahl die ursprüngliche, so erhält man genau $^{11}/_{4}$ der Zahl. Wie heißt die Zahl?

A24: Ein Mann hat in jeder Hosentasche einen bestimmten Geldbetrag. Nimmt er links 60 Cent weg und gibt sie rechts dazu, so hat er in beiden Taschen gleich viel Geld. Gibt er jedoch einen Euro von rechts nach links, so hat er links doppelt so viel Geld wie rechts. Wie viel Geld hat der Mann in jeder Tasche?

A25: Jemand sagt zu seinem jüngeren Freund: "Ich bin heute doppelt so alt wie du warst zu der Zeit, als ich so alt war, wie du jetzt bist. Beide zusammen sind wir jetzt 49 Jahre". Wie alt ist jeder?

(6) Lösungen der Übungsaufgaben

A01: x = 3, y = -2

A02: x = -2, y = 5

A03: x = -0.50, y = 0.17

A04: x = 0.29, y = 1.10

A05: x = 1.72, y = -0.80

A06: Hasen = 12, Hühner = 23

A07: x = 10, y = 3

A08: Vierbettzimmer = 12, Sechsbettzimmer = 6

A09: Kaffee = 2.40 €, Kuchen = 3.20 €

A10: Ochs = Schaf = 1.14 Goldstücke

A11: Arbeitstage = $12^1/_2$, freie Tage = $17^1/_2$

A12: Geld des Mannes = 8 Gulden, Geld der Frau = 9 Gulden

A13: Hamburger = 3 €, Pommes = 2 €

A14: Apfel = $1^1/_2$ Denare, Birne = $^1/_2$ Denare

A15: Männer = 4, Frauen = 16

A16: x = 7, y = 6

A17: x = 55, y = 20

A18: Helga ist 15 Jahre alt, Maria ist 5 Jahre alt

A19: Michael ist 18 Jahre alt, sein Vater ist 45 Jahre alt

A20: x = 19 cm, y = 13 cm

A21: 2 Knaben und 3 Mädchen

A22: x = 36, y = 45

A23: die Zahl ist 24

A24: links = 5.40 €, rechts = 4.20 €

A25: x = 28 Jahre alt, y = 21 Jahre alt

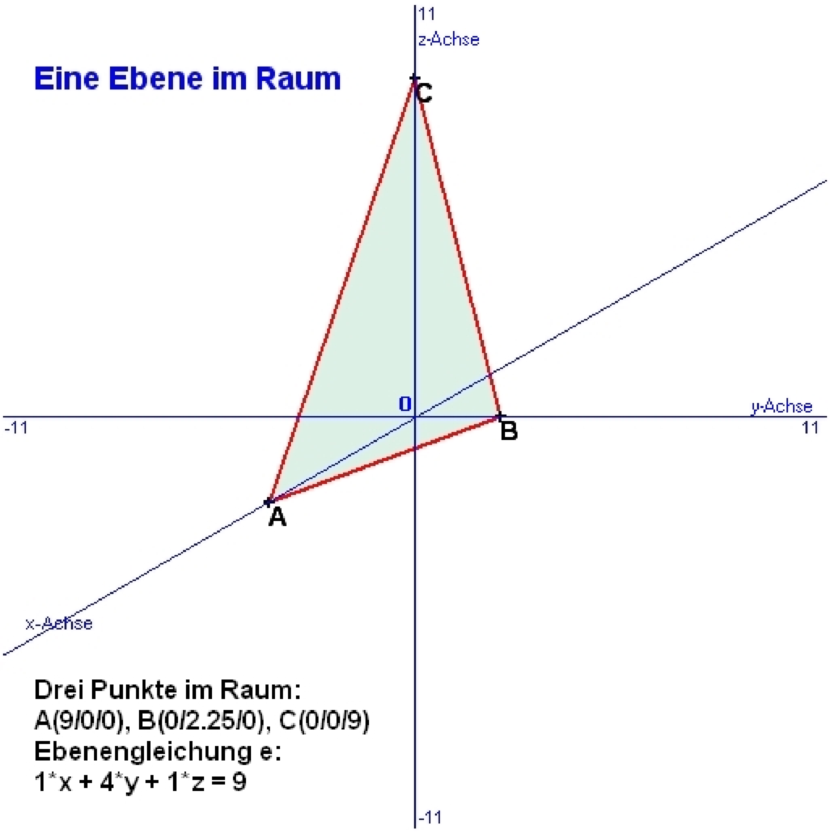
(7) Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystem in drei Variablen (X,Y,Z) mit drei linearen Gleichungen:

$$a_x * X + a_y * Y + a_z * Z = d \quad \text{(I)}$$
$$b_x * X + b_y * Y + b_z * Z = e \quad \text{(II)}$$
$$c_x * X + c_y * Y + c_z * Z = f \quad \text{(III)}$$

Im dreidimensionalen Raum kann, so wie in der zweidimensionalen Ebene, ein Koordinatensystem errichtet werden. Dieses besteht aus dem Koordinatenursprung O und drei aufeinander senkrecht stehenden Koordinatenachsen (X-, Y- und Z-Achse). Ein Punkt P im Raum wird dann durch drei Koordinaten festgelegt: P(X/Y/Z).

Eine Gerade im Raum ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt. Eine Ebene im Raum ist durch drei Punkte eindeutig bestimmt. (So wie auch ein Tisch auf drei Beinen nicht wackelt).



Man kann zeigen, dass die Punkte P(X/Y/Z), welche eine lineare Gleichung in drei Variablen erfüllen, auf einer Ebene liegen.

Den Beweis liefert die Vektorrechnung mit deren Hilfe nachgewiesen werden kann, dass die Koeffizienten (a_x, a_y, a_z) einer linearen Gleichung einen Normalvektor auf die Ebene darstellen.

Zwei Ebenen (I,II) im Raum können entweder parallel liegen oder sich schneiden. Dann enthalten sie eine gemeinsame Schnittgerade. Alle Punkte P(X/Y/Z) dieser Schnittgeraden erfüllen dann die zwei linearen Gleichungen (I,II).

Eine Gerade im Raum kann daher durch zwei lineare Gleichungen beschrieben werden, weil sie der Schnitt von zwei Ebenen ist.

Drei Ebenen (I,II,III) können in verschiedener Art und Weise im Raum liegen. Eine besondere Lage liegt dann vor, wenn sie sich in genau einem Punkt S schneiden. Seine Koordinaten S(X/Y/Z) erfüllen dann die drei linearen Gleichungen (I,II,III).

Sind zwei von den drei Ebenen parallel, dann gibt es natürlich keinen gemeinsamen Schnittpunkt, d.h. es existieren keine Lösungen des linearen Gleichungssystems.

Die Lösungen des Gleichungssystems können auf verschiedene Arten ermittelt werden. Das soll mit zwei Beispielen demonstriert werden.

```
Erstes Beispiel:   2*X + 3*Y +   Z =  0  [I]
                     X +   Y +   Z = -1  [II]
                   5*X -   Y + 2*Z =  1  [III]
```

Aus [I] folgt: Z = -2*X - 3*Y.
Einsetzen von Z in [II] und [III] ergibt nach dem "Substitutionsverfahren" ein System mit nur mehr zwei Variablen:

```
-X - 2*Y  = -1  [IV]
 X - 7*Y  =  1  [V]
```

Addiert man die Gleichungen [IV] und [V], so erhält man -9*Y = 0. Daraus folgt Y = 0 und X = 1 und Z = -2. Also ist S(1/0/-2) der Schnittpunkt der drei Ebenen.

Setzt man zur Probe den Punkt in die drei Gleichungen ein, dann ergeben sich drei wahre Aussagen.

Probe:

```
2 + 0 – 2 =  0,  w.A.
1 + 0 – 2 = -1,  w.A.
5 – 0 – 4 =  1,  w.A.
```

Zweites Beispiel:

Eine universelle Lösungsmethode ist das "Eliminationsverfahren" von "Gauss".

```
[G1]   2*X + 6*Y - 2*Z = 8
[G2]   3*X - 9*Y + 3*Z = 6
[G3]   4*X - 4*Y - 2*Z = 4
```

Elimination von von X aus [G2] und aus [G3]:
Erstens wird [G2] durch [G2]-($^3/_2$)*[G1] äquivalent ersetzt.
Zweitens wird [G3] durch [G3]-($^4/_2$)*[G1] äquivalent ersetzt.

```
[G1]   2*X + 6*Y - 2*Z =   8
[G2]       -18*Y + 6*Z =  -6
[G3]       -16*Y + 2*Z = -12
```

Elimination von von Y aus [G3]:
Dazu wird [G3] durch [G3]-($^{-16}/_{-18}$)*[G2] äquivalent ersetzt.

```
[G1]   2*X + 6*Y - 2*Z =   8
[G2]       -18*Y + 6*Z =  -6
[G3]             -10*Z = -20
```

Damit ist das System auf "Halbdiagonalform" gebracht.

Aus [G3] folgt Z = 2.
Aus [G2] folgt Y = 1.
Aus [G1] folgt X = 3.

Die Lösungen sind daher X = 3, Y = 1, Z = 2. Das entspricht dem Schnittpunkt S(3/1/2) der drei Ebenen.

Setzt man die Lösungen in die drei Gleichungen ein, so erhält man drei wahre Aussagen und damit die Bestätigung für die Richtigkeit der Lösungen.

Probe:

```
 6 + 6 – 4 = 8,  w.A.
 9 – 9 + 6 = 6,  w.A.
12 – 4 - 4 = 4,  w.A.
```

(8) Matrizen und Determinanten

Wie kann man feststellen, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, d.h. die entsprechenden drei Ebenen im Raum überhaupt einen gemeinsamen Schnittpunkt haben?

Ausgangspunkt ist unser lineares Gleichungssystem:

$$a_x * X + a_y * Y + a_z * Z = d \quad \text{(I)}$$
$$b_x * X + b_y * Y + b_z * Z = e \quad \text{(II)}$$
$$c_x * X + c_y * Y + c_z * Z = f \quad \text{(III)}$$

Aus Gleichung (I) kann zuerst X explizit dargestellt werden:
$X = d/a_x - a_y/a_x * Y - a_z/a_x * Z$

Nun wird X in die Gleichungen (II) und (III) eingesetzt. Dadurch enthalten diese zwei Gleichungen nur mehr die beiden Variablen Y und Z. Stellt man aus Gleichung (II) die Variable Y explizit dar und setzt sie in Gleichung (III) ein, dann enthält die Gleichung (III) nur mehr die Variable Z. Diese kann dann ausgerechnet werden. Die etwas aufwendige Rechnung liefert schlussendlich folgendes Ergebnis:

$$X = \frac{d*b_y*c_z + a_y*b_z*f + a_z*e*c_y - a_z*b_y*f - d*b_z*c_y - a_y*e*c_z}{a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z}$$

$$Y = \frac{a_x*e*c_z + d*b_z*c_x + a_z*b_x*f - a_z*e*c_x - a_x*b_z*f - d*b_x*c_z}{a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z}$$

$$Z = \frac{a_x*b_y*f + a_y*e*c_x + d*b_x*c_y - d*b_y*c_x - a_x*e*c_y - a_y*b_x*f}{a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z}$$

Auffällig ist dabei, dass alle drei Variable durch Ausdrücke dargestellt werden, welche einen gemeinsamen Nenner haben. Wenn der gemeinsame Nenner Null ist, dann gibt es für die drei Variablen keine reelle Zahlen als Lösungen. Dieser Nenner entscheidet also über die Lösbarkeit des Gleichungssystems. Er wird daher auch Determinante DET genannt.

$$DET = a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z$$

Damit ist der "Hauptsatz" für lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen bewiesen:

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante DET nicht Null ist.

Die Koeffizienten der drei Gleichungen können als Zeilen einer Matrix geschrieben werden. Man unterscheidet dabei die Systemmatrix A und die erweiterte Matrix A_e.

Systemmatrix A:

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}$$

Erweiterte Matrix A_e:

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z & d \\ b_x & b_y & b_z & e \\ c_x & c_y & c_z & f \end{matrix}$$

Eine Hauptdiagonale einer Matrix geht von links oben nach rechts unten, eine Nebendiagonale von rechts oben nach links unten.

Die Determinante einer (3 x 3)-Matrix kann dadurch berechnet werden, dass man zuerst die zwei linken Spalten rechts neben die Matrix schreibt und somit eine (3 x 5)-Hilfsmatrix erhält. Die Determinante DET wird dann nach der Merkregel von "Sarrus" berechnet: Man addiert die Produkte der Zahlen in den drei Hauptdiagonalen und subtrahiert davon die Produkte der Zahlen in den drei Nebendiagonalen.

Hilfsmatrix:

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z & | & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & | & b_x & b_y \\ c_x & c_y & c_z & | & c_x & c_y \end{matrix}$$

$$DET(A) = a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z$$

DET(A) ist die Determinante der Systemmatrix A. DET(A_1) ist die Determinante jener Matrix, die man erhält, wenn man die erste Spalte der Systemmatrix A durch die rechte Spalte der erweiterten Matrix A_e ersetzt. In analoger Weise dazu werden die zwei anderen Determinanten DET(A_2) und DET(A_3) gebildet.

Jede dieser Determinanten wird mit Hilfe der Merkregel von "Sarrus" ermittelt. Dadurch erhält man für die oben ausgerechneten Lösungen X, Y und Z des linearen Gleichungssystems allgemeine Formeln in der Determinanten-Schreibweise. In den Formeln kommen nur die gegebenen Koeffizienten des Systems vor.

$$\begin{matrix} a_x & a_y & a_z & | & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & | & b_x & b_y \\ c_x & c_y & c_z & | & c_x & c_y \end{matrix}$$

$$DET(A) = a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z$$

$$\begin{matrix} d & a_y & a_z & | & d & a_y \\ e & b_y & b_z & | & e & b_y \\ f & c_y & c_z & | & f & c_y \end{matrix}$$

$$DET(A_1) = d*b_y*c_z + a_y*b_z*f + a_z*e*c_y - a_z*b_y*f - d*b_z*c_y - a_y*e*c_z$$

a_x d a_z | a_x d
b_x e b_z | b_x e
c_x f c_z | c_x f

$DET(A_2) = a_x*e*c_z + d*b_z*c_x + a_z*b_x*f - a_z*e*c_x - a_x*b_z*f - d*b_x*c_z$

a_x a_y d | a_x a_y
b_x b_y e | b_x b_y
c_x c_y f | c_x c_y

$DET(A_3) = a_x*b_y*f + a_y*e*c_x + d*b_x*c_y - d*b_y*c_x - a_x*e*c_y - a_y*b_x*f$

Mit dieser Schreibweise erhält man folgende Lösungsformel, welche auch "Cramersche Regel" genannt wird.

$X = DET(A_1) / DET(A)$
$Y = DET(A_2) / DET(A)$
$Z = DET(A_3) / DET(A)$

Erstes Beispiel:
2*X + 3*Y + Z = 0 [I]
X + Y + Z = -1 [II]
5*X - Y + 2*Z = 1 [III]

DET(A) = 4 + 15 + (-1) - 5 - (-2) - 6 = 9
Also ist in diesem Beispiel das lineare System eindeutig lösbar.

$DET(A_1)$ = 0 + 3 + 1 – 1 – 0 – (-6) = 9, X = 9/9 = 1
$DET(A_2)$ = -4 + 0 + 1 – (-5) – 2 – 0 = 0, Y = 0/9 = 0
$DET(A_3)$ = 2 - 15 + 0 – 0 – 2 – 3 = -18, Z = -18/9 = -2

Die Lösungen sind daher: X = 1, Y = 0, Z = -2

Zweites Beispiel:
2*X + 6*Y – 2*Z = 8 [I]
3*X - 9*Y + 3*Z = 6 [II]
4*X – 4*Y - 2*Z = 4 [III]

DET(A) = 36 + 72 + 24 - 72 + 24 + 36 = 120
Also ist in diesem Beispiel das lineare System eindeutig lösbar.

$DET(A_1)$ = 144 + 72 + 48 – 72 + 96 + 72 = 360, X = 360/120 = 3
$DET(A_2)$ = -24 + 96 - 24 + 48 – 24 + 48 = 120, Y = 120/120 = 1
$DET(A_3)$ = -72 + 144 – 96 + 288 + 48 – 72 = 240, Z = 240/120 = 2

Die Lösungen sind daher: X = 3, Y = 1, Z = 2

(9) Weitere Aufgaben und Lösungen

**Löse die nachfolgenden Aufgaben und mache jeweils die Probe.
(Dezimalzahlen werden auf zwei Nachkommastellen gerundet).**

A26:

$$\begin{aligned} X + Y - Z &= 2 \\ X - Y + Z &= 4 \\ -X + Y + Z &= 6 \end{aligned}$$

A27:

$$\begin{aligned} 3*X - 2*Y + 4*Z &= 5 \\ 4*X + 6*Y - Z &= 9 \\ 5*X - 4*Y + 3*Z &= 4 \end{aligned}$$

A28:

$$\begin{aligned} 3*X + 2*Y - 1*Z &= 3 \\ -X + 3*Y + 2*Z &= 0 \\ -2*Y + Z &= 9 \end{aligned}$$

A29:

$$\begin{aligned} 9*X + 5*Y + Z &= -7 \\ 7*X + Y + 7*Z &= -8 \\ 4*X + Y - Z &= 6 \end{aligned}$$

A30:

$$\begin{aligned} 3*X + 5*Y + 2*Z &= 8 \\ -5*X + Y - 8*Z &= -2 \\ -2*X + 9*Y + 6*Z &= -6 \end{aligned}$$

A31:

$$\begin{aligned} 9*X + 4*Y - Z &= 8 \\ -5*X - 3*Z &= -2 \\ 7*X - 8*Y - 8*Z &= -2 \end{aligned}$$

A32:

$$\begin{aligned} -3*X + 7*Y + 2*Z &= -2 \\ -7*X + Y - 5*Z &= -3 \\ -7*X + 3*Y - 6*Z &= 0 \end{aligned}$$

A33: Wie lang sind die drei Seiten eines Dreieckes, wenn ihre paarweisen Summen (a + b), (a + c) und (b + c) jeweils 56 cm, 58 cm und 54 cm betragen?

A34: Eine dreiziffrige Zahl mit der Ziffernsumme 6 hat die Eigenschaften, dass die mittlere Ziffer das arithmetische Mittel der beiden anderen Ziffern ist, und die Differenz aus der ersten und letzten Ziffer um 2 kleiner ist als die mittlere Ziffer. Wie heißt die Zahl?

A35: Die drei Ziffern einer dreistelligen Zahl nehmen von den Hundertern angefangen immer um die jeweilige Einheit ab. Streicht man die Hunderter-Ziffer der Zahl weg und dividiert die ursprüngliche Zahl durch die neu erhaltene Zahl, so erhält man 12 als Quotient und 6 als Rest. Wie heißt die Zahl?

A36: Eine dreiziffrige Zahl mit der Ziffernsumme 16 hat die Eigenschaften, dass ihr Wert um 198 zunimmt, wenn man ihre Ziffern in die umgekehrte Reihenfolge bringt. Nimmt man die Einer-Ziffer rechts weg und setzt sie dann links vor die Hunderter-Ziffer, so wächst die Zahl um 234. Wie heißt die Zahl?

A37: Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Körben. Aus 2 Garben einer guten Ernte und 3 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man 34 Körbe. Aus 1 Garbe guter Ernte, 2 Garben mittelmäßiger Ernte und 3 Garben schlechter Ernte erhält man 26 Körbe. Wie viele Körbe beträgt der Ertrag von jeweils einer Garbe der guten, der mittelmäßigen und der schlechten Ernte?

A38: Jetzt hat man 2 Rinder und 5 Schafe verkauft und damit 13 Schweine gekauft, wobei ein Rest von 1000 Geldstücken übrig blieb. Man hat 3 Rinder und 3 Schweine verkauft und damit 9 Schafe gekauft; das Geld reichte gerade. Man hat 6 Schafe und 8 Schweine verkauft und damit 5 Rinder gekauft, aber das Geld reichte nicht um 600 Geldstücke. Wie hoch ist der Preis von jedem, vom Rind, vom Schaf und vom Schwein?

A39: Drei Personen werden nach ihrem Vermögen gefragt. Der erste und der zweite besitzen zusammen um 20 Denare mehr als der dritte. Der erste und der dritte haben zusammen um 40 Denare mehr als der zweite. Der zweite und der dritte haben zusammen um 30 Denare mehr als der erste. Wie viel besitzt jeder der drei?

A40: Drei Kaufleute gehen spazieren und haben Goldstücke in ihren Taschen. Da sehen sie auf dem Weg eine Geldbörse mit 15 Goldstücken. Einer von ihnen sagt zu den anderen: "Wenn ich diese Börse behalte, so werde ich zweimal so reich sein wie ihr beide zusammen!". Da sagt der zweite von ihnen: "Ich aber werde dreimal so reich sein wie ihr beide zusammen!". Zuletzt sagt der dritte: "Ich werde fünfmal so reich sein wie ihr beide zusammen!" . Wie viel Geld hatte jeder Kaufmann in seiner Tasche?

Lösungen

A26: 3, 4, 5

A27: 1, 1, 1

A28: 4, -2, 5

A29: 2, -4.5, -2.5

A30: 2.38, 0.63, -1.16

A31: 0.5, 0.84, -0.16

A32: 1.56, 0.79, -1.42

A33: 30, 26, 28 cm

A34: 222

A35: 654

A36: 628

A37: $9^1/_4$, $4^1/_4$, $2^3/_4$ Körbe

A38: Rind: 1200, Schaf: 500, Schwein: 300

A39: 30, 25, 35 Denare

A40: 1,3, 5 Goldstücke

.

Hinweis: Viele praktische Textaufgaben aus dem Alltag betreffen Schlussrechnungen und Prozentrechnungen. Dazu findet man ausführliche Erklärungen und Übungsbeispiele im Skript "schlupro.pdf" auf der Homepage www.paukert.at des Autors. Auch findet man dort Mischungs-, Bewegungs- und Leistungsaufgaben.