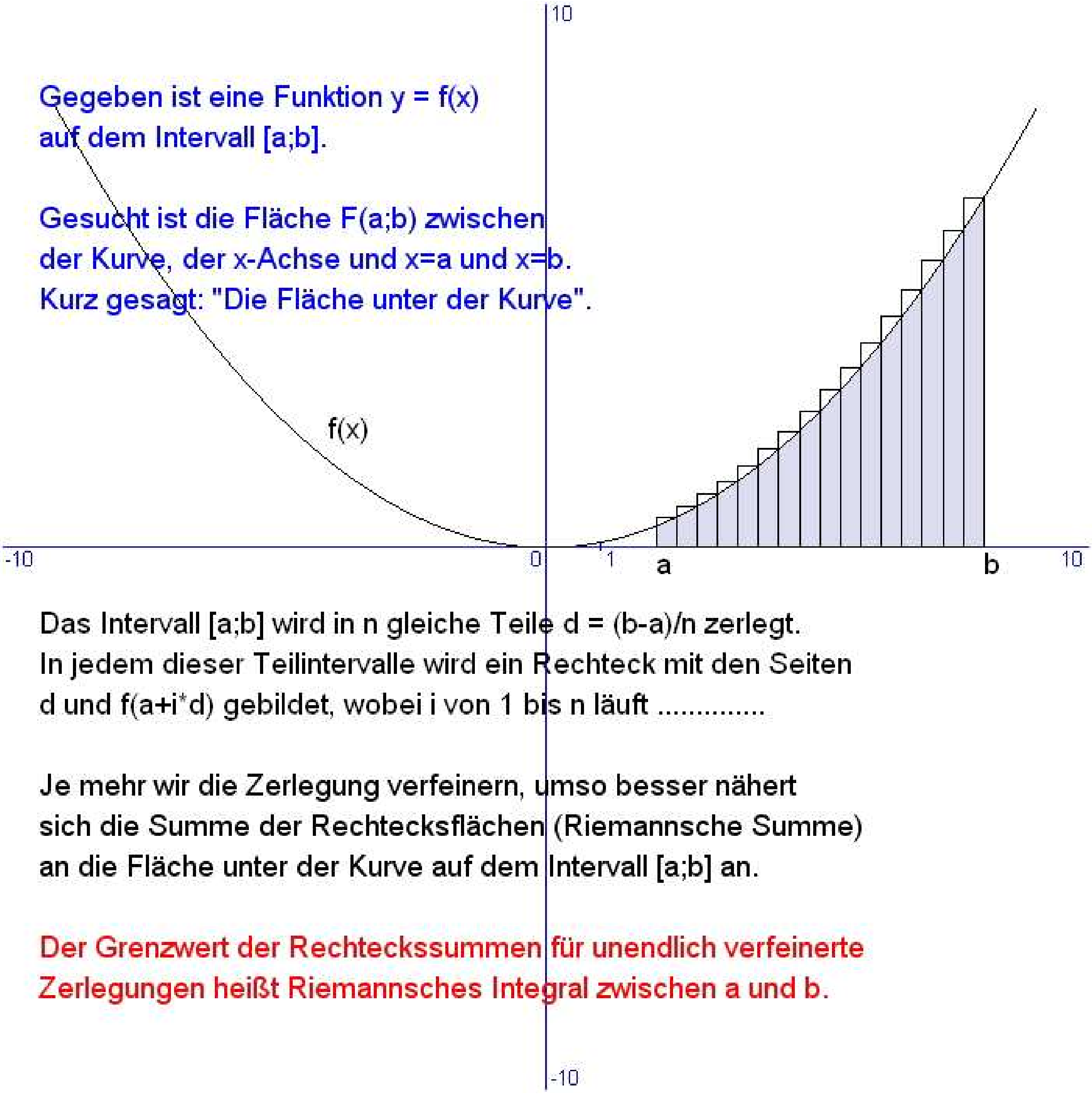
INTEGRALRECHNUNG, Teil 1

Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

Das Riemannsche Integral



Gegeben ist eine Funktion y = f(x)
auf dem Intervall [a;b].

Gesucht ist die Fläche F(a;b) zwischen
der Kurve, der x-Achse und x=a und x=b.
Kurz gesagt: "Die Fläche unter der Kurve".

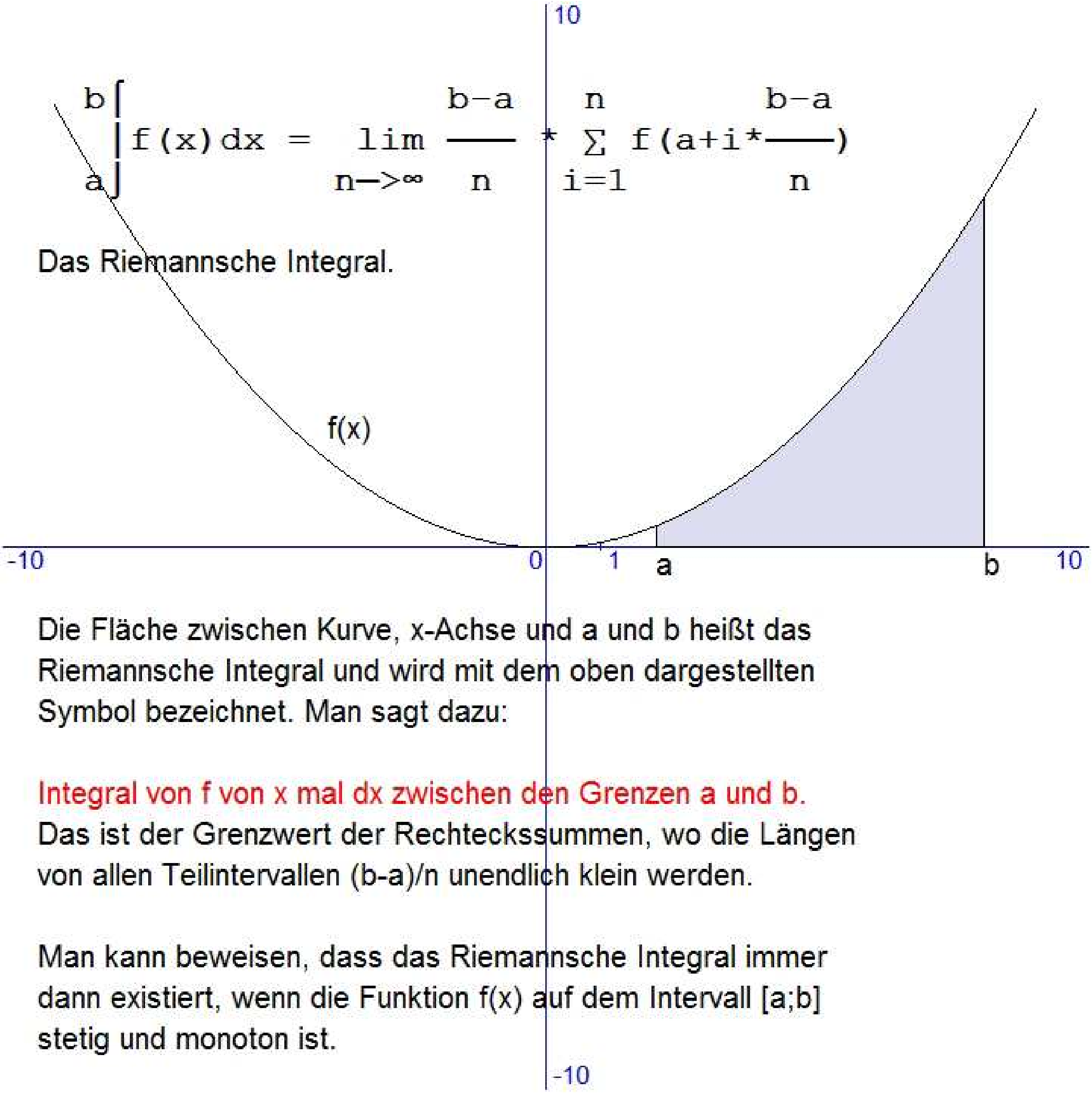
Das Intervall [a;b] wird in n gleiche Teile d = (b-a)/n zerlegt.
In jedem dieser Teilintervalle wird ein Rechteck mit den Seiten
d und f(a+i*d) gebildet, wobei i von 1 bis n läuft ....

Je mehr wir die Zerlegung verfeinern, umso besser nähert
sich die Summe der Rechtecksflächen (Riemannsche Summe)
an die Fläche unter der Kurve auf dem Intervall [a;b] an.

Der Grenzwert der Rechteckssummen für unendlich verfeinerte
Zerlegungen heißt Riemannsches Integral zwischen a und b.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} * \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i*\frac{b-a}{n}\right)$$

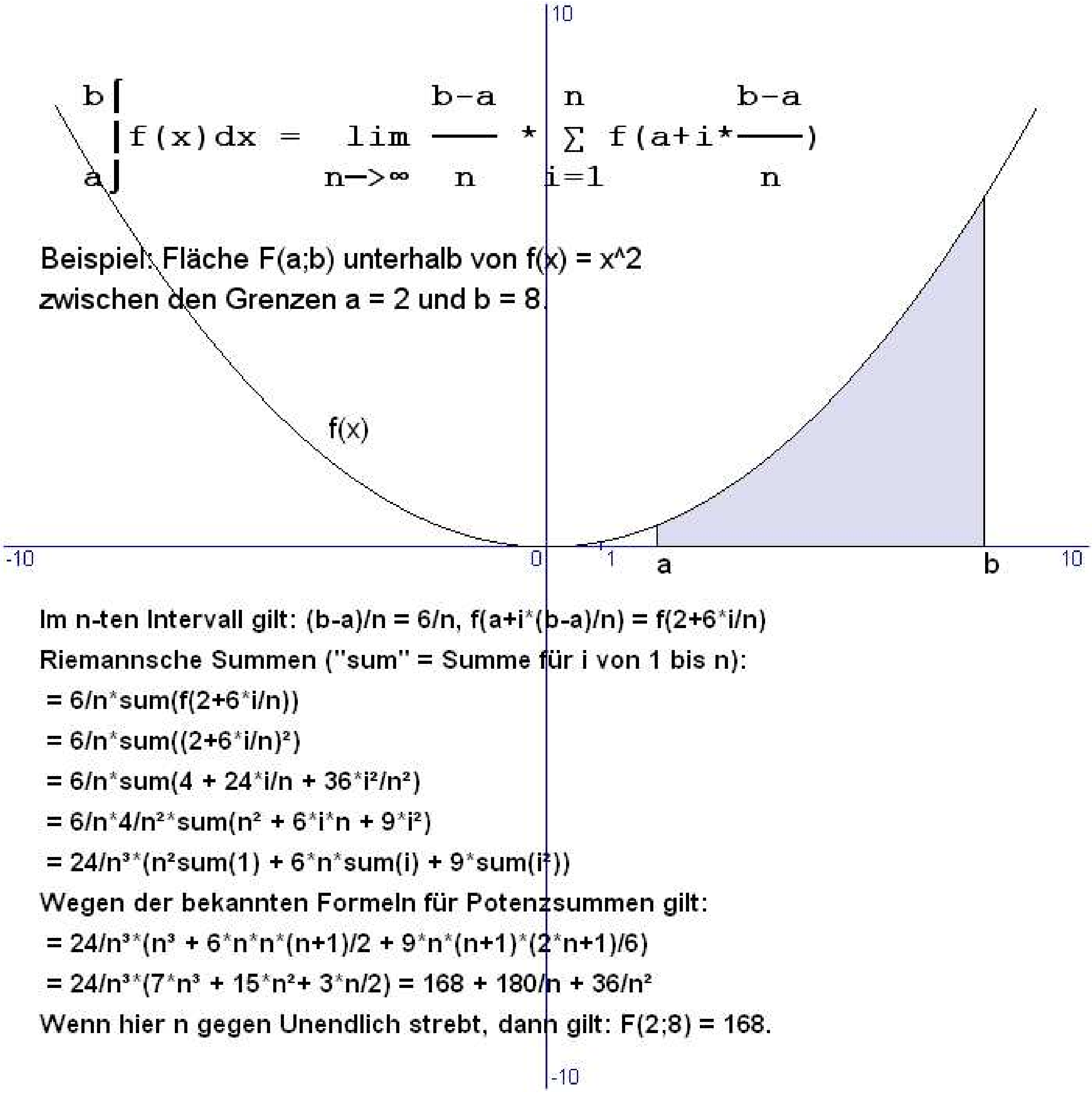
Das Riemannsche Integral.



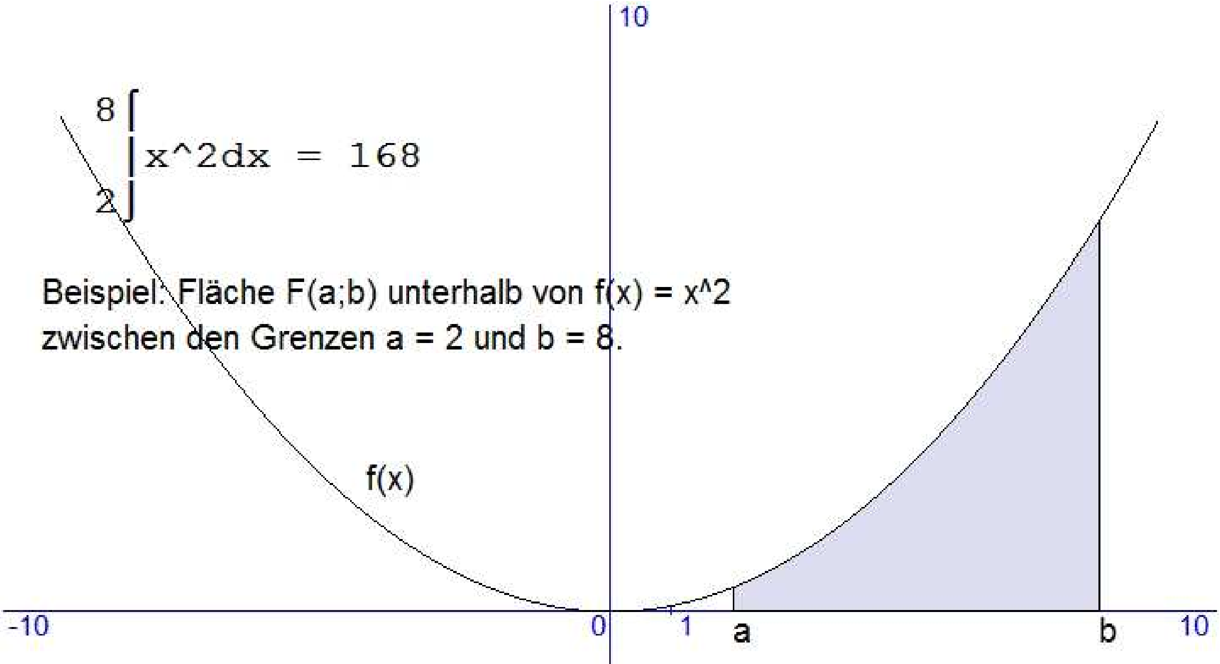
Die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und a und b heißt das Riemannsche Integral und wird mit dem oben dargestellten Symbol bezeichnet. Man sagt dazu:

Integral von f von x mal dx zwischen den Grenzen a und b.
Das ist der Grenzwert der Rechteckssummen, wo die Längen von allen Teilintervallen (b-a)/n unendlich klein werden.

Man kann beweisen, dass das Riemannsche Integral immer dann existiert, wenn die Funktion f(x) auf dem Intervall [a;b] stetig und monoton ist.



$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} * \sum_{i=1}^{n} f(a+i*\frac{b-a}{n})$
Beispiel: Fläche F(a;b) unterhalb von f(x) = x^2
zwischen den Grenzen a = 2 und b = 8.
f(x)
10
-10
0
1
a
b
10
-10
Im n-ten Intervall gilt: (b-a)/n = 6/n, f(a+i*(b-a)/n) = f(2+6*i/n)
Riemannsche Summen ("sum" = Summe für i von 1 bis n):
= 6/n*sum(f(2+6*i/n))
= 6/n*sum((2+6*i/n)²)
= 6/n*sum(4 + 24*i/n + 36*i²/n²)
= 6/n*4/n²*sum(n² + 6*i*n + 9*i²)
= 24/n³*(n²sum(1) + 6*n*sum(i) + 9*sum(i²))
Wegen der bekannten Formeln für Potenzsummen gilt:
= 24/n³*(n³ + 6*n*n*(n+1)/2 + 9*n*(n+1)*(2*n+1)/6)
= 24/n³*(7*n³ + 15*n²+ 3*n/2) = 168 + 180/n + 36/n²
Wenn hier n gegen Unendlich strebt, dann gilt: F(2;8) = 168.



$$\int_2^8 x^2 dx = 168$$

Beispiel: Fläche F(a;b) unterhalb von f(x) = x^2
zwischen den Grenzen a = 2 und b = 8.

Im letzten Beispiel wurde das Riemannsche Integral mit Hilfe von Potenzsummen schrittweise berechnet. Dieses Verfahren ist aufwendig und rechenintensiv.

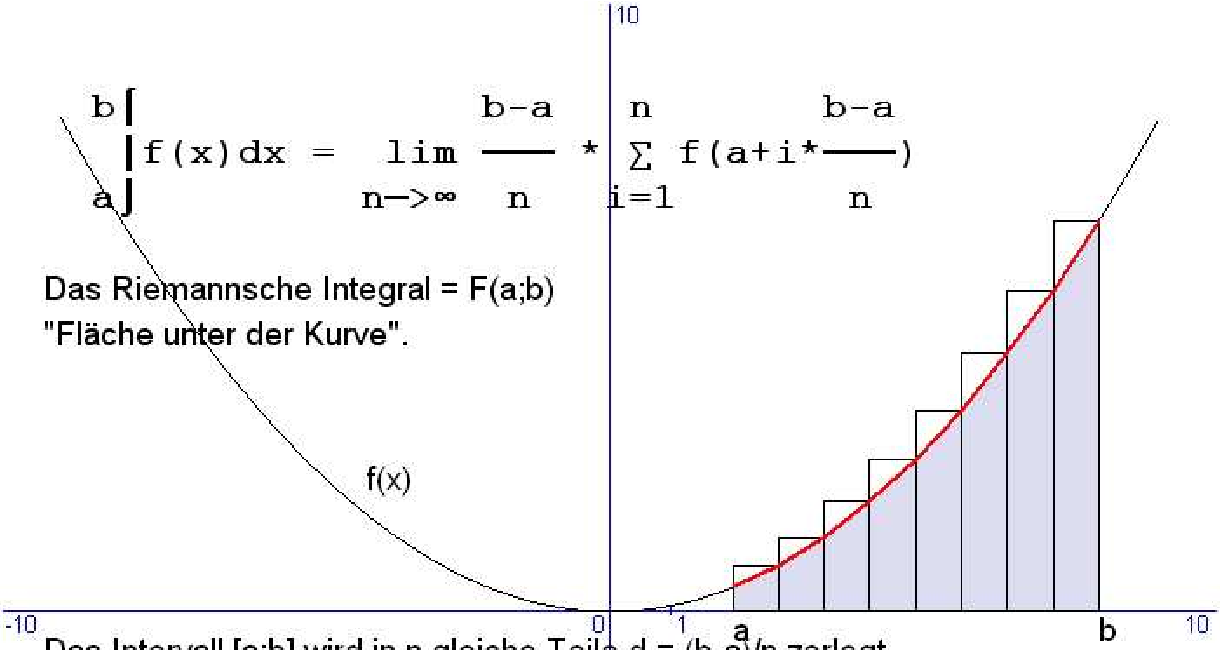
Es besteht auch die Möglichkeit mit "numerischen Methoden" die Fläche F(a;b) näherungsweise zu berechnen.

Viel schneller und eleganter kann das Riemannsche Integral mit dem "Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung" bestimmt werden.

Numerisches Integrieren

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} * \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i*\frac{b-a}{n}\right)$$

Das Riemannsche Integral = F(a;b)
"Fläche unter der Kurve".



Das Intervall [a;b] wird in n gleiche Teile d = (b-a)/n zerlegt.
Je größer n wird, umso besser nähert sich die Summe der Rechtecksstreifen der Fläche unter der Kurve F(a;b) an.
Ersetzt man die Rechtecksflächen durch Trapezflächen, dann erhält man: F(a;b) = d*(y1+y2)/2 + d*(y2+y3)/2 + d*(y3+y4)/2 + ...)

F(a;b) = (b - a)/(2*n) * (y1 + 2*y2 + 2*y3 + 2*y4 + . . . + yN)

Dabei sind y1, y2, ..., yN die benachbarten Funktionswerte in obiger Zerlegung des Intervalls [a;b]. Solche näherungsweise Flächenermittlung heißt numerische Integration (Trapezregel).

-10

Numerische Integration nach Simpson:

y = f(x) sei eine im Intervall [u;v] stetige Funktion.
Es ist w = (u+v)/2. Durch die drei Punkte A(u/f(u))
B(w/f(w)), C(v/f(v)) wird eine Parabel p(x) gelegt,
welche f(x) in [u;v] annähern soll.

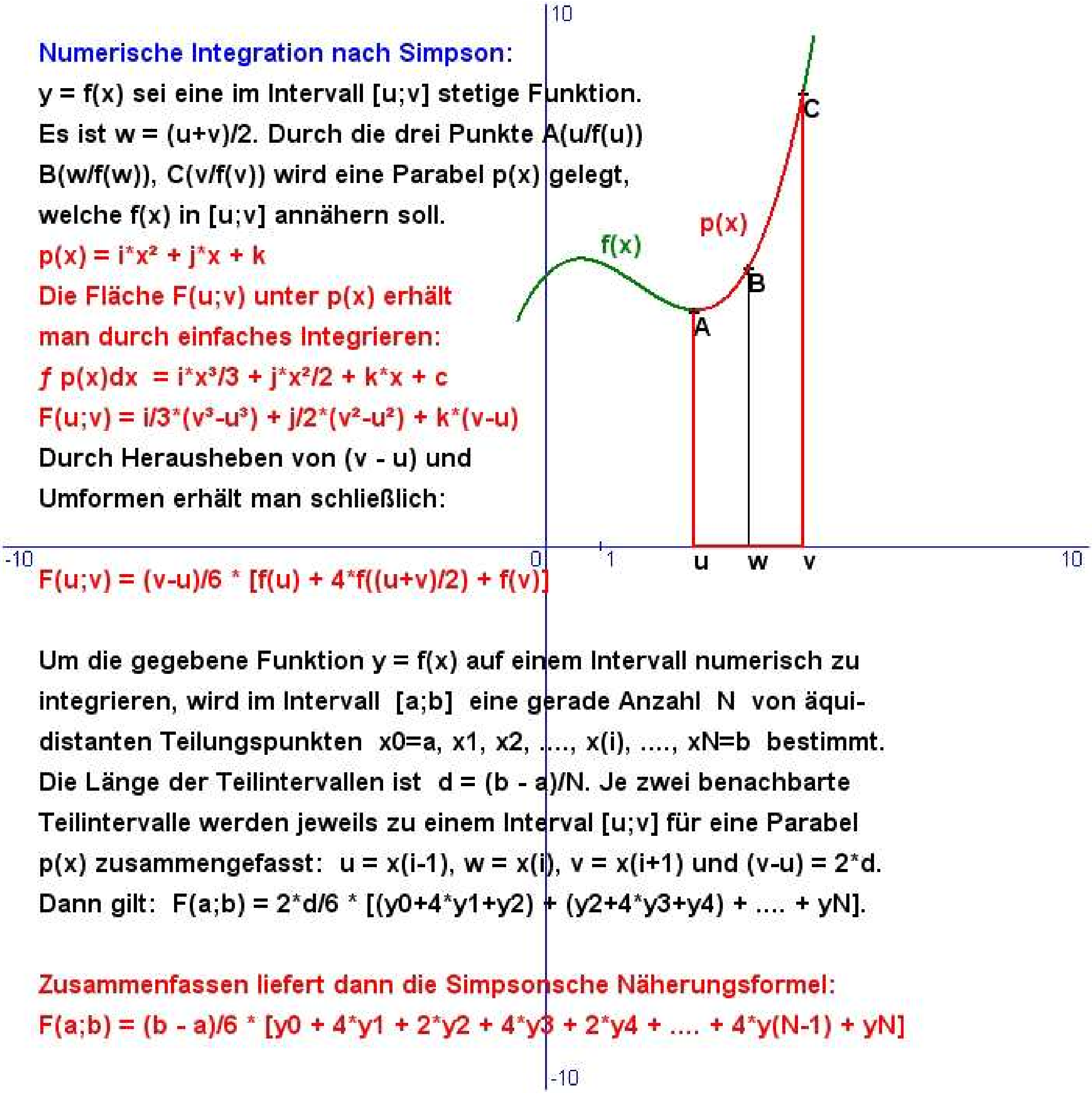
$p(x) = i*x^2 + j*x + k$

Die Fläche F(u;v) unter p(x) erhält
man durch einfaches Integrieren:

$\int p(x)dx = i*x^3/3 + j*x^2/2 + k*x + c$

$F(u;v) = i/3*(v^3-u^3) + j/2*(v^2-u^2) + k*(v-u)$

Durch Herausheben von (v - u) und
Umformen erhält man schließlich:



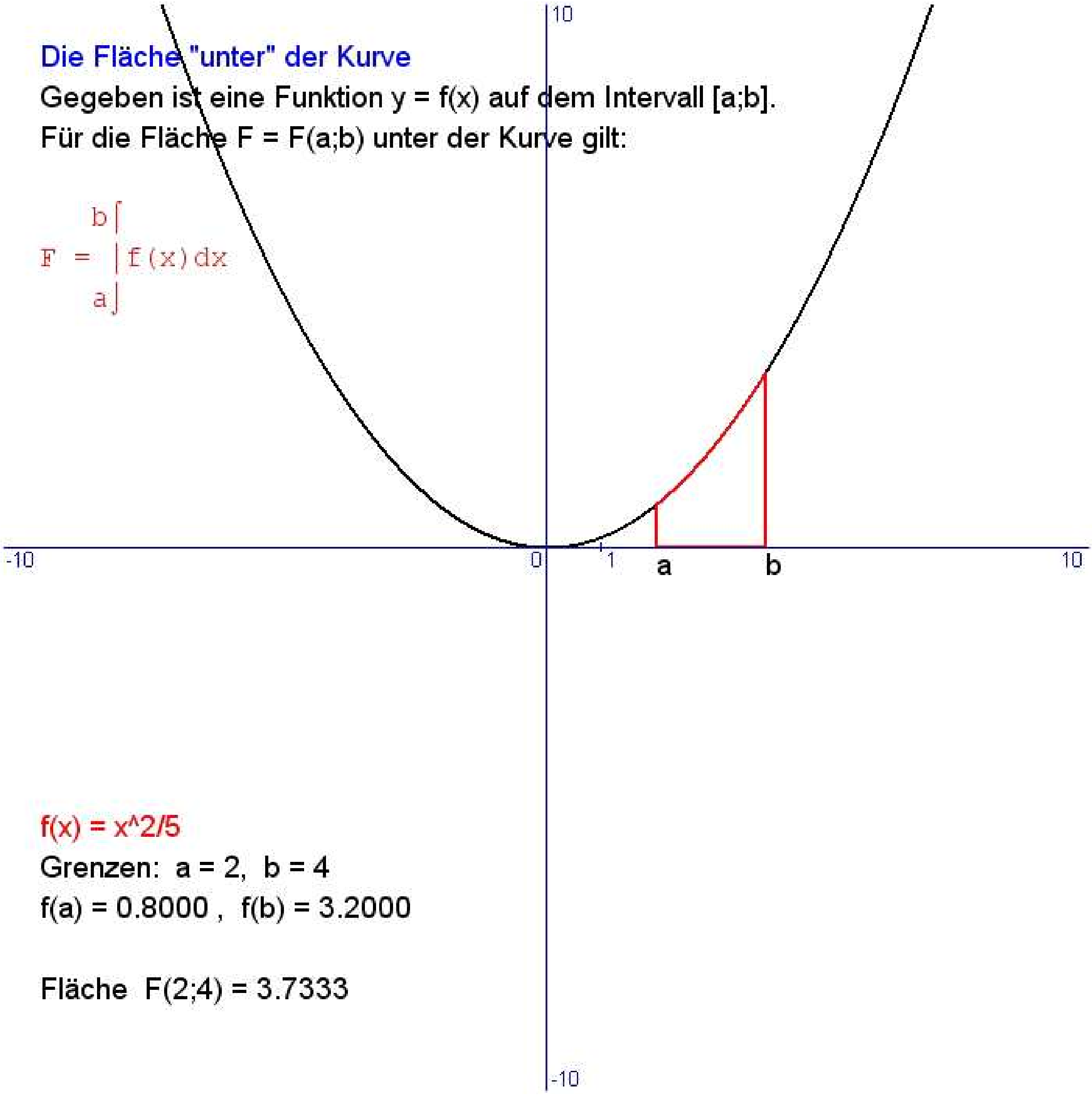
$F(u;v) = (v-u)/6 * [f(u) + 4*f((u+v)/2) + f(v)]$

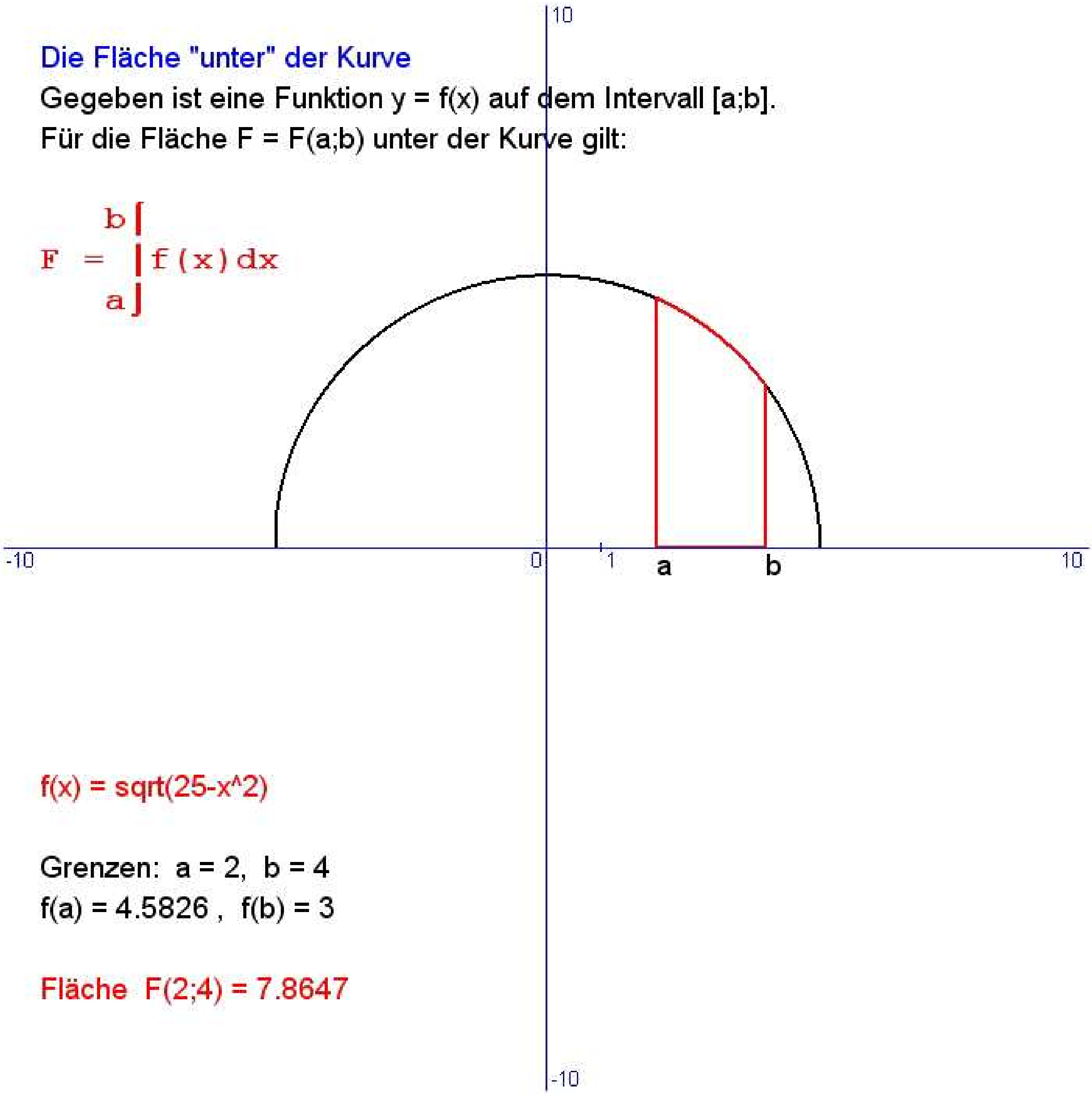
Um die gegebene Funktion y = f(x) auf einem Intervall numerisch zu
integrieren, wird im Intervall [a;b] eine gerade Anzahl N von äqui-
distanten Teilungspunkten x0=a, x1, x2, ..., x(i), ..., xN=b bestimmt.
Die Länge der Teilintervallen ist d = (b - a)/N. Je zwei benachbarte
Teilintervalle werden jeweils zu einem Interval [u;v] für eine Parabel
p(x) zusammengefasst: u = x(i-1), w = x(i), v = x(i+1) und (v-u) = 2*d.
Dann gilt: F(a;b) = 2*d/6 * [(y0+4*y1+y2) + (y2+4*y3+y4) + ... + yN].

Zusammenfassen liefert dann die Simpsonsche Näherungsformel:

F(a;b) = (b - a)/6 * [y0 + 4*y1 + 2*y2 + 4*y3 + 2*y4 + ... + 4*y(N-1) + yN]

Die Fläche unter der Kurve




Die Fläche "unter" der Kurve
Gegeben ist eine Funktion y = f(x) auf dem Intervall [a;b].
Für die Fläche F = F(a;b) unter der Kurve gilt:
$F = \int_a^b f(x)\,dx$
10
-10
0
1
a
b
10
-10
f(x) = sqrt(25-x^2)
Grenzen: a = 2, b = 4
f(a) = 4.5826 , f(b) = 3
Fläche F(2;4) = 7.8647

Einfache Integralsätze

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} * \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i*\frac{b-a}{n}\right)$$

Das Riemannsche Integral von f(x) mit den Grenzen a und b ergibt die Fläche F(a;b) "unter" der Kurve f(x).

Das Integral ist der Grenzwert der Summe einer Reihe, deren Glieder bestimmte Funktionswerte y = f(x) sind. Dazu wollen wir kurz "lim {sum(y)} für N gegen Unendlich" schreiben. Dabei steht der Summenoperator für sum(y) = y1 + y2 + y3 + . . . + yN.

Für den Summenoperator gelten einfache Rechenregeln, die dann auch auf das Integral übertragen werden können.

sum(k*y) = k * sum(y) mit k als konstanten Faktor.
Beweis: sum(k*y) = (k*y1) + (k*y2) + (k*y3) + ... + (k*yN).
sum(k*y) = k*(y1+y2+...+yN) = k*sum(y).

sum(y+z) = sum(y) + sum(z) mit y und z als variable Werte.
Beweis: sum(y+z) = (y1+z1) + (y2+z2) + (y3+z3) + ... + (yN+zN).
sum(y+z) = (y1+y2+...+yN) + (z1+z2+...+zN) = sum(y) + sum(z).

Satz 1:

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Satz 2:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Satz 3:

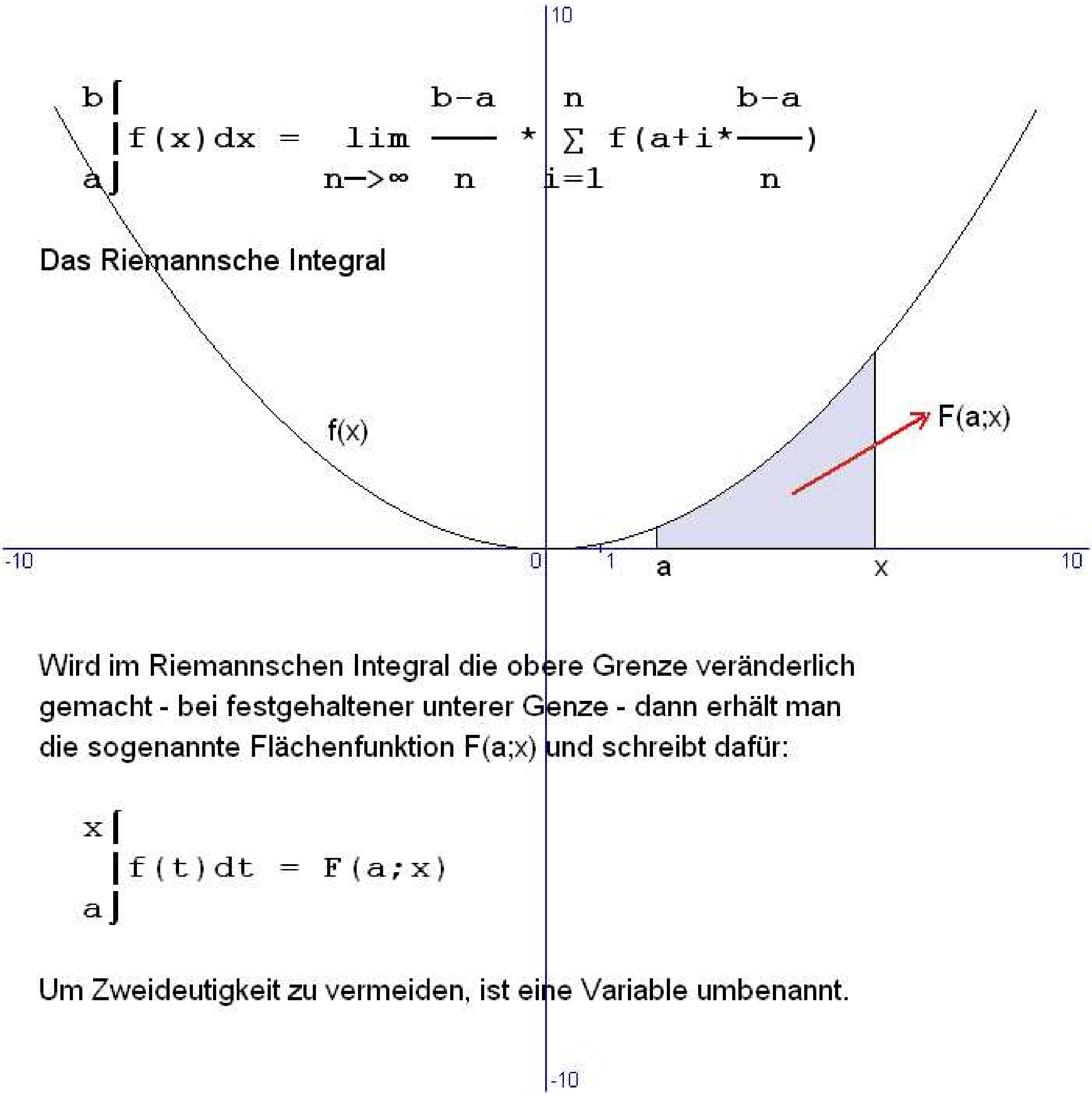
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Satz 4:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Satz 1 und Satz 2 folgen aus den Rechenregeln für den Summenoperator. Satz 3 folgt anschaulich durch ein lückenloses Zusammenfügen der dargestellten Flächen. Satz 4 folgt aus Satz 3 für den Fall, dass $c = a$ gesetzt wird.

Stammfunktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



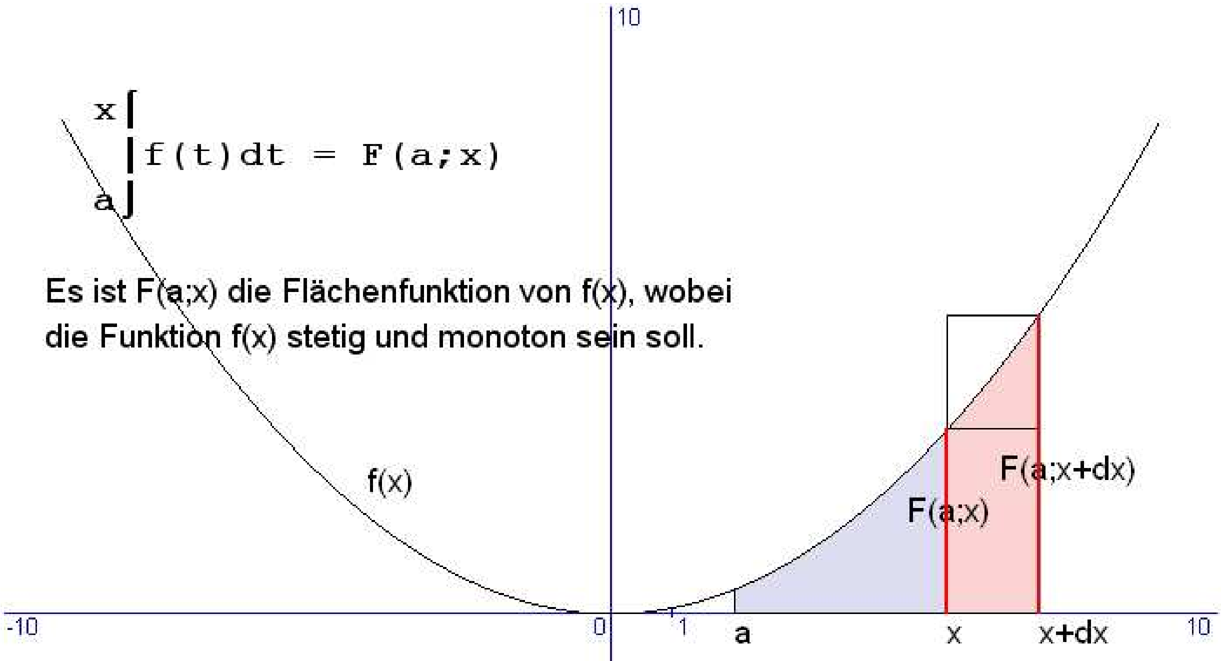
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} * \sum_{i=1}^{n} f\left(a+i*\frac{b-a}{n}\right)$$

Das Riemannsche Integral

Wird im Riemannschen Integral die obere Grenze veränderlich gemacht - bei festgehaltener unterer Genze - dann erhält man die sogenannte Flächenfunktion F(a;x) und schreibt dafür:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(a;x)$$

Um Zweideutigkeit zu vermeiden, ist eine Variable umbenannt.



Wenn der x-Wert um dx wächst, so ändert sich die Flächenfunktion F(a;x) um den Wert dF(a;x) = F(a;x+dx) - F(a;x).
Für diesen Flächenzuwachs gilt folgende Ungleichung:

f(x)*dx <= dF(a;x) <= f(x+dx)*dx

f(x) <= (F(a;x+dx) - F(a;x)) / dx <= f(x+dx)

Wenn nun dx gegen 0 strebt, dann strebt f(x+dx) gegen f(x).
Also muss auch (F(a;x+dx) - F(a;x)) / dx gegen f(x) streben.
Dieser Grenzwert ist aber der Differenzialquotient von F(a;x).
Also ist die gegebene Funktion f(x) die Ableitung ihrer Flächenfunktion F(a;x). Es gilt: F'(a;x) = f(x).

-10

Damit ist der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung bewiesen:

Die stetige Funktion f(x) ist die Ableitung ihrer Flächenfunktion F(a;x). Es gilt: F'(a;x) = f(x).

Eine Funktion J(x), deren Ableitung die Funktion f(x) ist, heißt Stammfunktion von f. Alle Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante C. Weil die Flächenfunktion nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion ist, gilt F(a;x) = J(x) + C. Aus F(a;a) = 0 folgt C = -J(a).

Also gilt: F(a;x) = J(x) - J(a), wobei J eine beliebige Stammfunktion von f ist. Setzen wir nun x = b, dann wird aus der Flächenfunktion das Riemannsche Integral F(a;b), d.h.

$$F(a;b) = \int_a^b f(x)\,dx = J(b) - J(a)$$

Um das Riemannsche Integral der Funktion f(x) zu bestimmen, muss man nur eine Stammfunktion J(x) von f(x) finden. Setzt man dann die Integralgrenzen a, b ein und bildet die Differenz J(b) - J(a), so erhält man den Flächeninhalt F(a;b) !

Das Auffinden der Stammfunktion $J(x)$ zu einer Funktion $f(x)$ ist dann lösbar, wenn man das Differenzieren einsichtig umkehren und daraus ein Integrationsverfahren gewinnen kann. Die Menge aller Stammfunktionen wird auch als unbestimmtes Integral bezeichnet und man verwendet dabei das Integrationssymbol ohne Grenzen.

Es sei $f(x) = x^2$. Dann ist $J(x) = x^3/3 + C$, weil $J(x)' = 1/3*3*x^2 = x^2$. Damit wird schnell und elegant das Flächenproblem gelöst:

$$F(2;8)=\int_2^8 x^2 dx=(x^3/3)\Big|_2^8=512/3-8/3=168.$$

Stammfunktionen, die durch Umkehrung des Differenzierens gewonnen werden, nennt man Grundintegrale. Es sei hier aber nicht verschwiegen, dass es viele Funktionen gibt, welche nicht mit diesen Grundintegralen integriert werden können. Dann müssen oft sehr komplizierte Verfahren angewendet werden, um eine Stammfunktion aufzufinden.

Im nächsten Kapitel werden einige wichtige Verfahren zur Ermittlung der Stammfunktion besprochen.

Wichtige Grundintegrale

Die Funktion J(x) ist eine **Stammfunktion** von f(x), wenn ihre Ableitung J'(x) = f(x) ist. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine konstante Zahl c, weil diese ja beim Differenzieren wegfällt. Die Menge aller Stammfunktionen wird als **unbestimmtes Integral** ∫ bezeichnet.

$$\int f(x)dx = J(x) + c$$

Das Auffinden der Stammfunktion J(x) zu einer Funktion f(x) ist einfach lösbar, wenn man das Differenzieren direkt umkehren und daraus ein Integrationsverfahren gewinnen kann.
Die Stammfunktionen, welche durch eine direkte Umkehrung des Differenzierens gewonnen werden, nennt man auch Grundintegrale.
Nachfolgend sind die wichtigsten davon aufgelistet:

∫(k*f(x)) = k*∫(x)	Faktorregel
∫(f(x)±g(x)) = ∫(f(x))±J(g(x))	Summenregel

∫(x^r) = x^(r+1)/(r+1)	Potenzfunktion für r <> -1
∫(x^(-1)) = ln(x)	Potenzfunktion für r = -1
∫(exp(x)) = exp(x)	Exponentialfunktion y = e^x
∫(sin(x)) = -cos(x)	Sinusfunktion
∫(cos(x)) = +sin(x).	Cosinusfunktion
∫(1/cos²(x)) = tan(x)	
∫(1/sqrt(1-x²)) = arcsin(x)	
∫(1/(1+x²)) = arctan(x)	

Substitutionsmethode

Die Funktion f(x) kann NICHT direkt integriert werden.
Eine geeignete Substitution suchen: x = g(z).
Dabei gilt: dx/dz = g'(z), dx = g'(z)dz.

$$\int f(x)dx = \int f(g(z))*g'(z)dz = \int h(z)dz$$

Funktion h(z) kann nun direkt integriert werden.
(Integrationsgrenzen sind entsprechend zu ersetzen).

Beispiel: ∫tan(x)dx = ?

Substitution: z = cos(x), z' = dz/dx = -sin(x), dx = -dz/sin(x)
∫tan(x)dx = ∫(sin(x)/cos(x))dx = -∫(1/z)dz = -ln(z)
Rück-Substitution:
∫tan(x)dx = -ln(cos(x))

Beispiel: ∫(a*x+b)^ndx = ?

Substitution: z = a*x+b, z' = dz/dx = a, dx = dz/a
∫(a*x+b)^ndx = (1/a)* ∫z^ndz = z^(n+1)/(a*(n+1))
Rück-Substitution:
∫(a*x+b)^ndx = (a*x+b)^(n+1)/(a*(n+1))

Beispiel:

Wenn f(x) = g'(x)*g(x) oder f(x) = g'(x)/g(x), dann
kann eine Substitution z = g(x) sehr hilfreich sein.
z' = g'(x) = dz/dx, dz = g'(x)dx. Für das Integral gilt:
∫f(x)dx = ∫(g'(x)*g(x))dx = ∫zdz = z^2/2 = g^2(x)/2 oder
∫f(x)dx = ∫(g'(x)/g(x))dx = ∫(1/z)dz = ln(z) = ln(g(x))

Partielle Integration

Die Funktion f(x) kann NICHT direkt integriert werden.
Eine geeignete Zerlegung suchen: f(x) = g(x)*h'(x).
Wegen der Produktregel des Differenzierens gilt dann:

$$\int f(x)dx = g(x)*h(x) - \int g'(x)*h(x)dx$$

Funktion g'(x)*h(x) kann nun direkt integriert werden.

Beispiel: ∫ln(x)dx = ?

∫ln(x)dx = ∫(ln(x)*1)dx
g(x) = ln(x), g'(x) = 1/x
h(x) = x, h'(x) = 1

∫ln(x) = ∫(ln(x)*1)dx = ln(x)*x - ∫(1/x)*xdx = ln(x)*x - x
∫ln(x) = x*(ln(x)-1)

Beispiel: ∫exp(x)*cos(x)dx = ?

∫exp(x)*cos(x)dx = exp(x)*sin(x) - ∫exp(x)*sin(x)dx
g(x) = exp(x), g'(x) = exp(x)
h(x) = sin(x), h'(x) = cos(x)

∫exp(x)*sin(x)dx = -exp(x)*cos(x) + ∫exp(x)*cos(x)dx
g(x) = exp(x), g'(x) = exp(x)
h(x) = -cos(x), h'(x) = sin(x)

∫exp(x)*cos(x)dx = exp(x)*sin(x) + exp(x)*cos(x) - ∫exp(x)*cos(x)dx
2*∫exp(x)*cos(x)dx = exp(x)*(sin(x)+cos(x))
∫exp(x)*cos(x)dx = (1/2)*exp(x)*(sin(x)+cos(x))

Beispiel:

Alle Punkte einer Ellipse in Hauptlage mit den Halbachsen a und b erfüllen die Gleichung $b^2*x^2 + a^2*y^2 = a^2*b^2$. Daraus folgt dann die explizite Ellipsengleichung $e(x) = (b/a)*\text{sqrt}(a^2-x^2)$ mit $x <= a$. Um nun eine Fläche unter der Ellipsenkurve zu berechnen, muss e(x) integriert werden.

$\int(b/a)*\text{sqrt}(a^2-x^2)dx = (b/a)*\int a*\text{sqrt}(1-(x/a)^2)dx = b*\int\text{sqrt}(1-(x/a)^2)dx$

Substitution: $z = x/a,\ dz/dx = 1/a,\ dx = a*dz$
$b*\int\text{sqrt}(1-(x/a)^2)dx = (a*b)*\int\text{sqrt}(1-z^2)dz$
Umformung: $\int\text{sqrt}(1-z^2)dz = \int(1-z^2)/\text{sqrt}(1-z^2)dz =$
$= \int 1/\text{sqrt}(1-z^2)dz - \int z^2/\text{sqrt}(1-z^2)dz$
$= \arcsin(z) - \int z^2/\text{sqrt}(1-z^2)dz$

Partielle Integration von $\int z^2/\text{sqrt}(1-z^2)dz = \int z/\text{sqrt}(1-z^2)*(z)dz$
mit $g(z) = -\text{sqrt}(1-z^2)$, $g'(z) = z/\text{sqrt}(1-z^2)$ und $h(z) = z$, $h'(z) = 1$
$\int g'*h = g*h - \int g*h'$
$\int z/\text{sqrt}(1-z^2)*(z)dz = -\text{sqrt}(1-z^2)*z - \int -\text{sqrt}(1-z^2)*1dz$

$\int\text{sqrt}(1-z^2)dz = \arcsin(z) + \text{sqrt}(1-z^2)*z - \int\text{sqrt}(1-z^2)*dz$
$2*\int\text{sqrt}(1-z^2)dz = \arcsin(z) + \text{sqrt}(1-z^2)*z$
$\int\text{sqrt}(1-z^2)dz = (1/2)*(\arcsin(z) + \text{sqrt}(1-z^2)*z)$

Rück-Substitution:
$\int(b/a)*\text{sqrt}(a^2-x^2)dx = (a*b/2)*((\arcsin(x/a)+(x/a)*\text{sqrt}(1-(x/a)^2))$

Beispiel:

Alle Punkte einer Hyperbel in Hauptlage mit den Halbachsen a und b erfüllen die Gleichung $b^2*x^2 - a^2*y^2 = a^2*b^2$. Daraus folgt dann die explizite Hyperbelgleichung $h(x) = (b/a)*\text{sqrt}(x^2-a^2)$ mit $x >= a$. Hier kann zur Integration der arcsin(z) nicht verwendet werden, weil dessen Argumente z zwischen -1 und +1 liegen, d.h. $z <= 1$ sein muss.

$\int(b/a)*\text{sqrt}(x^2-a^2)dx = (b/a)*\int a*\text{sqrt}((x/a)^2-1)dx = b*\int\text{sqrt}((x/a)^2-1)dx$

Substitution: $z = x/a,\ dz/dx = 1/a,\ dx = a*dz$
$b*\int\text{sqrt}((x/a)^2-1)dx = (a*b)*\int\text{sqrt}(z^2-1)dz$
$\int\text{sqrt}(z^2-1)dz = ?$
Substitution: $\text{sqrt}(z^2-1) = t-z,\ t = \text{sqrt}(z^2-1)+z,$
$z^2-1 = t^2-2*t*z+z^2,\ z = (1/2)*(t+1/t),\ dz/dt = (1/2)*(1-1/t^2)$
$\text{sqrt}(z^2-1) = t-z = t-(1/2)*(t+1/t) = (1/2)*(t-1/t)$
$\int\text{sqrt}(z^2-1)dz = \int(1/2)*(t-1/t)*(1/2)*(1-1/t^2)dt = (1/4)*\int(t-2/t+1/t^3)dt$
$\int\text{sqrt}(z^2-1)dz = (1/4)*\int(t-2/t+1/t^3)dt = (1/4)(t^2/2-2*\ln(t)+1/(2*t^2))$
$\int\text{sqrt}(z^2-1)dz = (1/8)*(t^2-4*\ln(t)+1/t^2)$

Ergebnis:
$\int(b/a)*\text{sqrt}(x^2-a^2)dx = (a*b/8)*(t^2-4*\ln(t)+1/t^2)$
mit $t = (1/a)*(\text{sqrt}(x^2-a^2)+x)$

Teilbruchzerlegung

Eine rationale Funktion f(x) besteht aus einem Zählerpolynom und aus einem Nennerpolynom. Wir dividieren nun, so dass der Grad des Zählerpolynoms g(x) kleiner als der Grad des Nennerpolynoms h(x) wird: f(x) = g(x)/h(x). Das Nennerpolynom soll dabei nur reelle Nullstellen aufweisen.

Teilbruchzerlegung - Variante A

Das Nennerpolynom h(x) hat nur einfach zählende Nullstellen. d.h. es gilt: h(x) = k*(x-a1)*(x-a2)*......* (x-aN), wobei N der Grad von h(x) ist (Fundamentalsatz der Algebra). Gelingt es, alle Nullstellen von h(x) zu ermitteln, kann die Funktion f(x) = g(x)/h(x) in eine Summe von einfachen Teilbrüchen zerlegt werden: g(x)/h(x) = k1/(x-a1) + k2/(x-a2) +...+ kN/(x-aN). Multipliziert man die Gleichung mit h(x) und vergleicht die Koeffizienten gleich hoher Potenzen auf den beiden Seiten der Gleichung, dann kann man k1, k2, k3 ....., kN berechnen. Nach der Integration der einzelnen Teilbrüche erhält man:
∫g(x)/h(x)dx = k1*ln(x-a1)+k2*ln(x-a2)+ ... +kN*ln(x-aN).

Beispiel: $\int (x+5)/(x^2+x-2)dx = ?$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2+x-2 = 0$ ergibt zwei einfach zählende, reelle Nullstellen a1 = 1 und a2 = -2.

Es gilt nun folgende Zerlegung:
$(x+5)/(x^2+x-2) = k1/(x-1) + k2/(x+2)$.

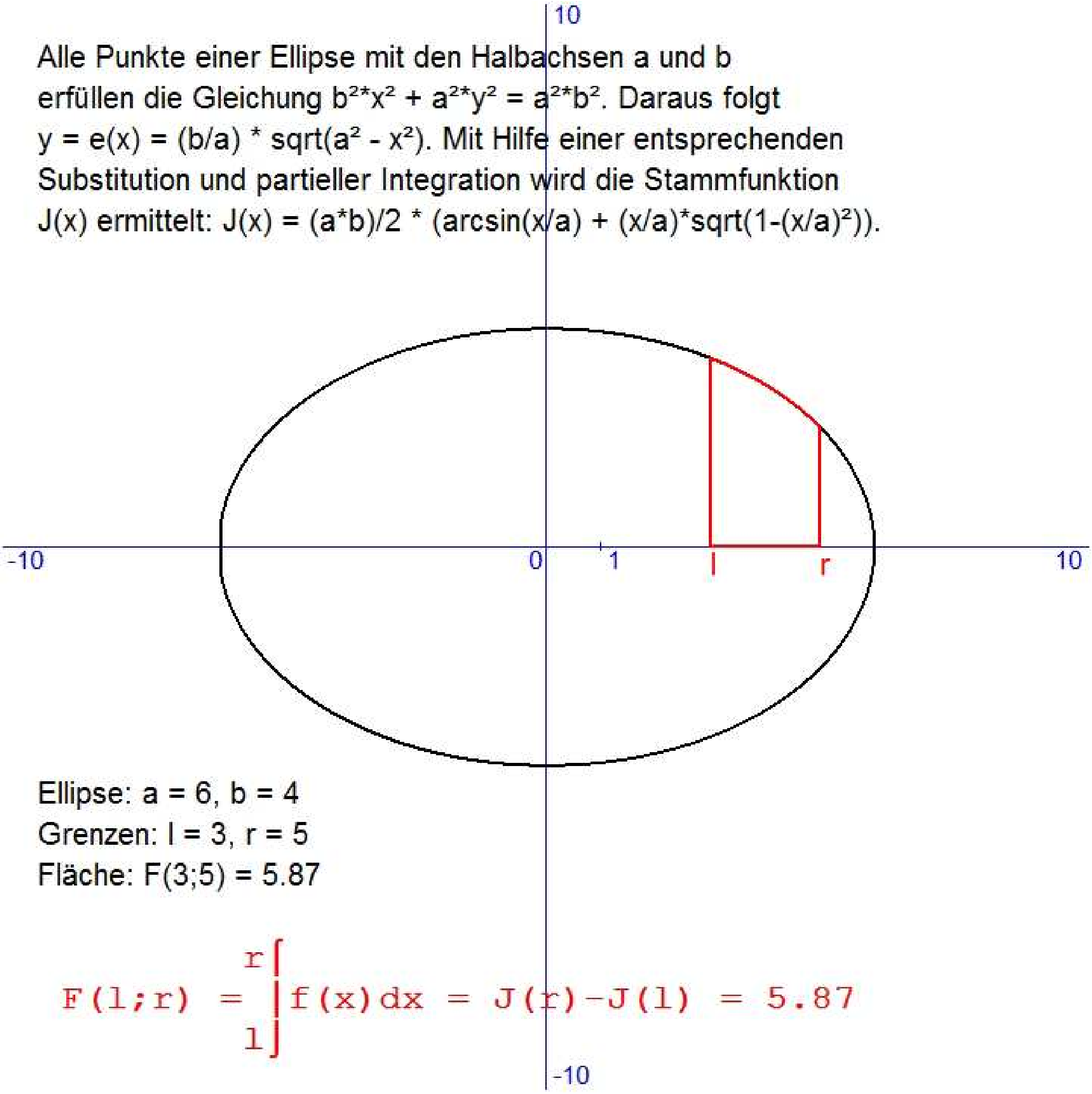
Multiplikation mit dem Nenner $N = (x^2+x-2) = (x-1)*(x+2)$:
x+5 = k1*(x+2) + k2*(x-1)
x+5 = (k1+k2)*x + (2*k1-k2)

Koeffizientenvergleich auf den beiden Gleichungsseiten:
1 = (k1+k2) und 5 = (2*k1-k2).
Daraus kann k1 = 2 und k2 = -1 bestimmt werden.
$\int((x+5)/(x^2+x-2))dx = 2*\int dx/(x-1) - \int dx/(x+2)$
$\int((x+5)/(x^2+x-2))dx = 2*\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln((x-1)^2/(x+2))$

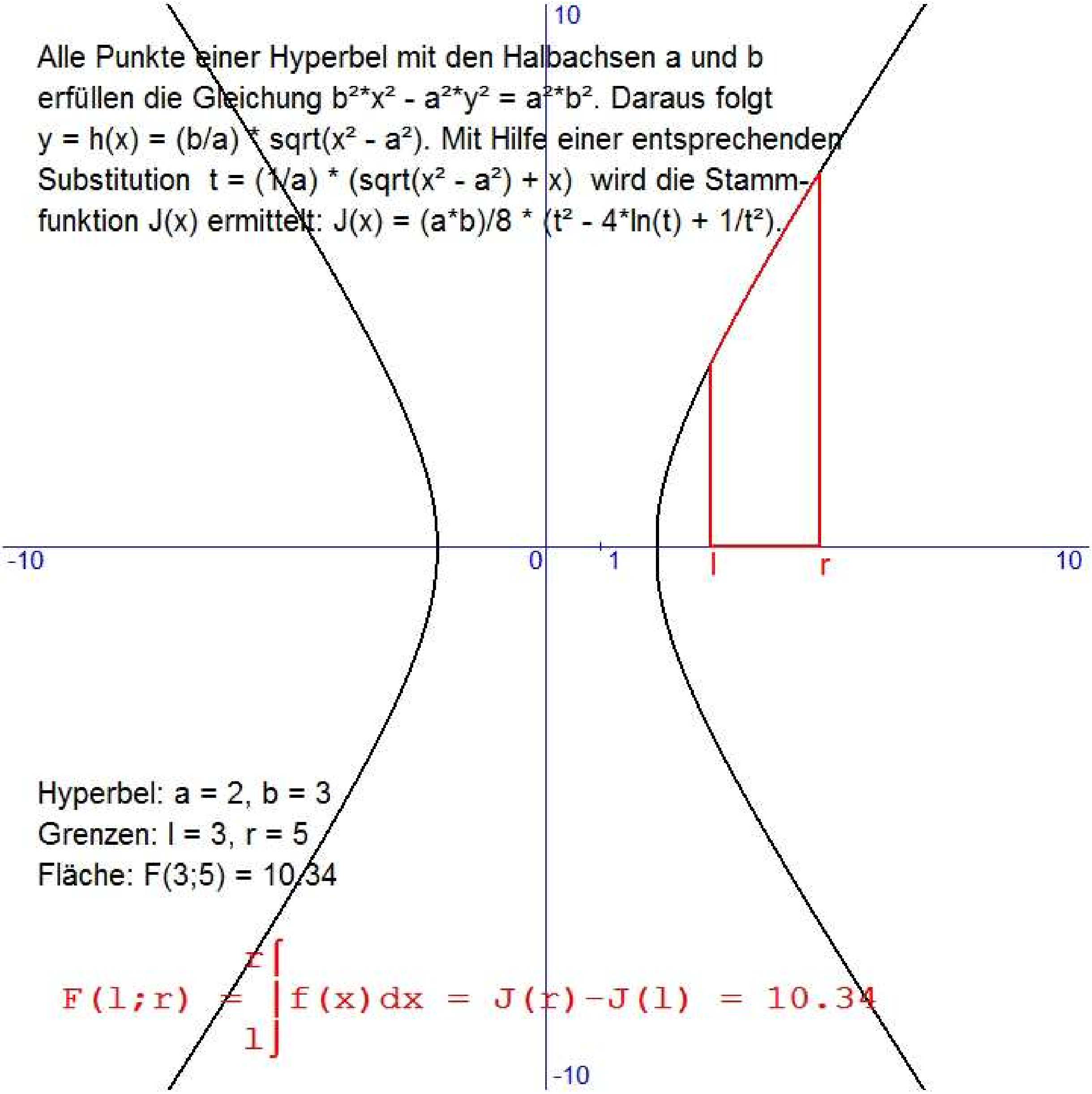
Teilbruchzerlegung - Variante B

Das Nennerpolynom h(x) hat mehrfach zählende Nullstellen. Wenn beispielsweise die Nullstelle a1 die Vielfachheit 3 hat, dann steht in der Zerlegung von h(x) der Faktor (x-a1)^3. Dann muss der entsprechende Teilbruch k1/(x-a1)^3 ersetzt werden durch k11/(x-a1) + k12/(x-a1)^2 + k13/(x-a1)^3. So wie bei der Variante A können auch hier die Konstanten dann durch Koeffizientenvergleiche schrittweise ermittelt werden.

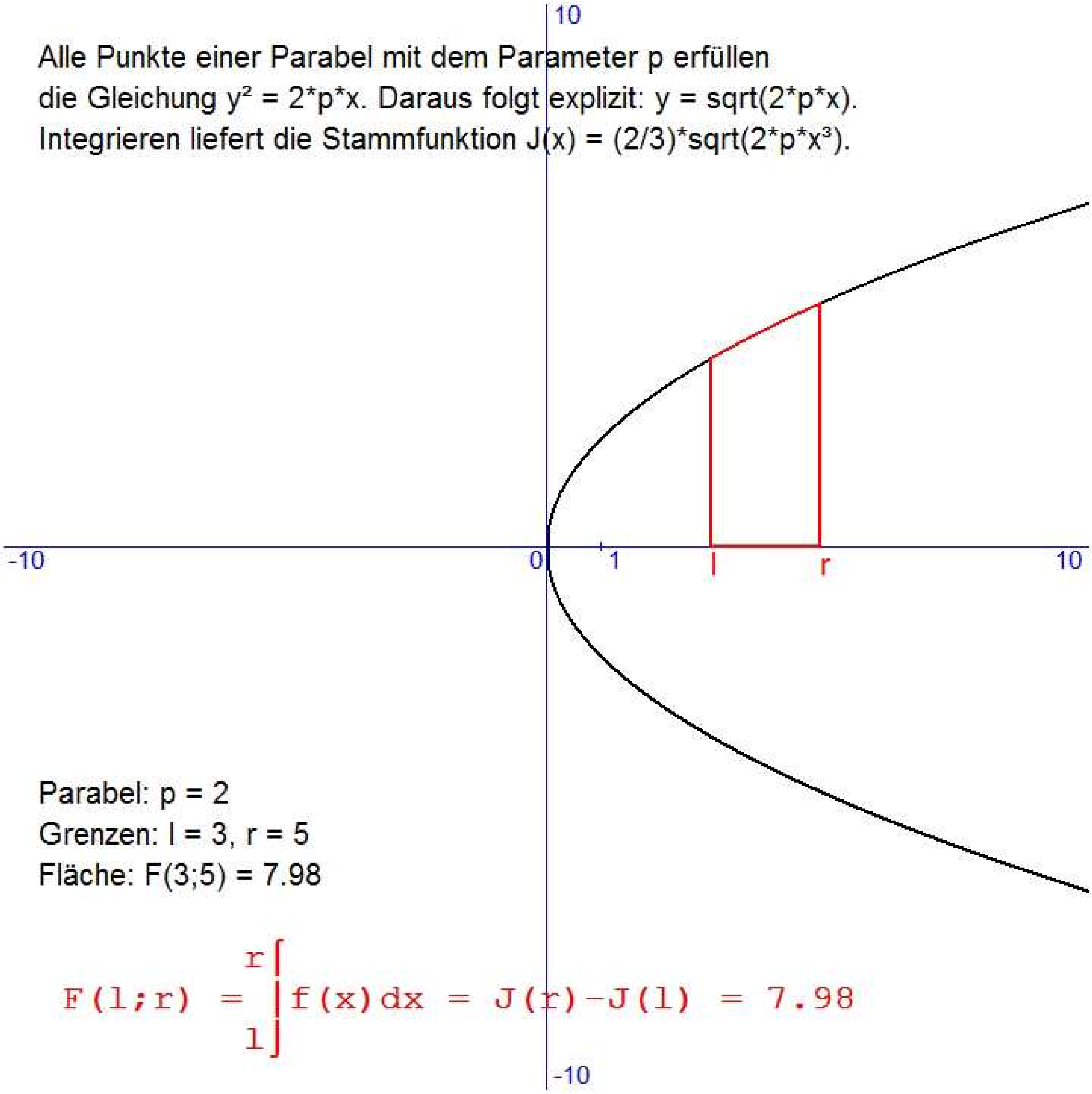
Fläche unter der Ellipse



Fläche unter der Hyperbel



Fläche unter der Parabel



E N D E