DER KREIS

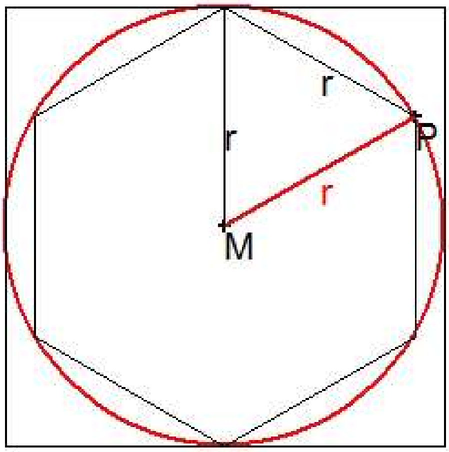
Version 2.0 © Herbert Paukert

Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

Der Umfang des Kreises

Der Kreis ist die Menge aller Punkte P, welche von einem Mittelpunkt M gleichweit entfernt sind.

Der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt wird Radius r genannt. Der doppelte Radius heißt Durchmesser d.



Weil alle Kreise zueinander ähnlich sind, muss das Verhältnis von Umfang U und Durchmesser d konstant (k) sein, d.h $U = k * d$.
Ein dem Kreis eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck hat die Seite r und daher den Umfang $U1 = 3 * d$. Ein umgeschriebenes Quadrat hat die Seite d und daher den Umfang $U2 = 4 * d$. Daraus folgt: $3*d < k*d < 4*d$. Also liegt k zwischen 3 und 4. Die wichtige Konstante k wird auch Kreiszahl "pi" genannt.

Näherungsweise Berechnung der Zahl "pi"

Ein dem Kreis eingeschriebenes regelmäßiges N-Eck hat eine Seitenlänge a. Mit dem Lehrsatz von Pythagoras wird die Länge b des regelmäßigen 2N-Ecks berechnet:

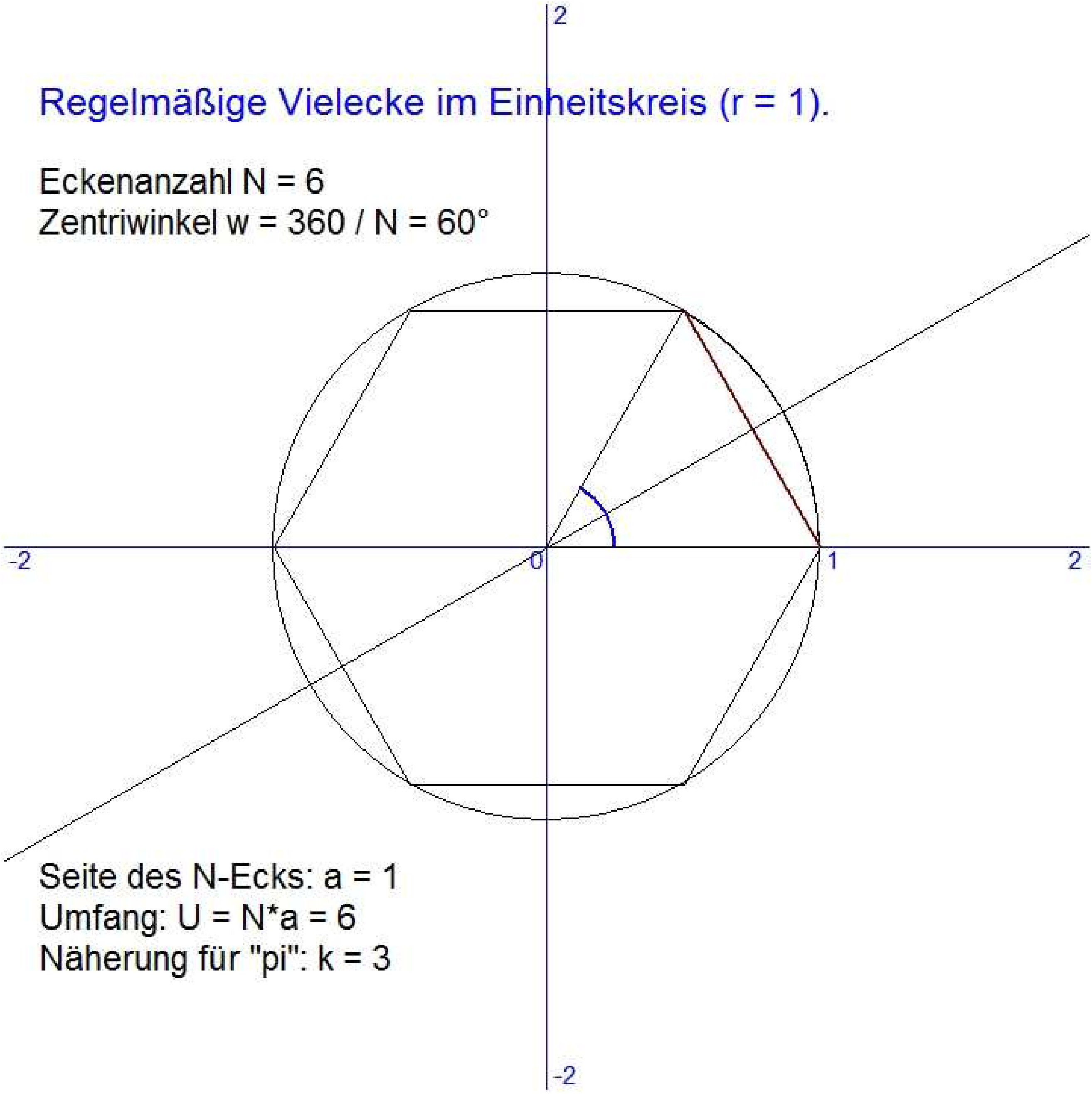
b = sqrt(2r² - r*sqrt(4r² - a²))   mit r als Kreisradius
b = sqrt(2 - sqrt(4 - a²))   mit r = 1 im Einheitskreis

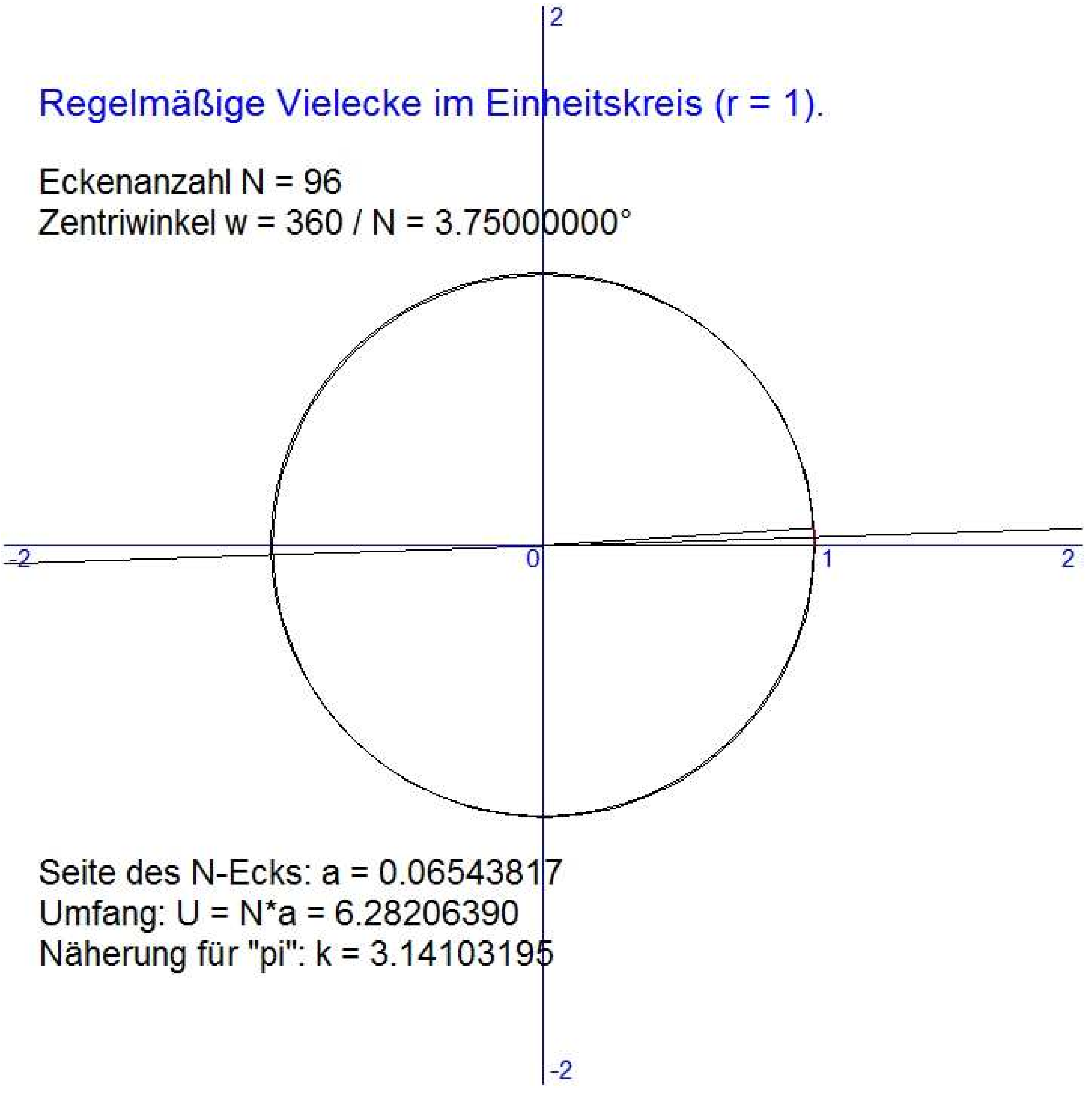
Je größer N ist, umso ähnlicher wird das N-Eck dem Kreis. Nimmt man den Umfang des N-Ecks U = N*a angenähert als Kreisumfang, dann erhält man für die Zahl "pi" folgenden Näherungswert k: Aus U = N*a = k*d folgt k = N*a / d.

Beginnen wir die Annäherung im Einheitskreis (r = 1) mit dem Sechseck, d.h. N = 6 und a = 1 und k = 6/2 = 3. Sodann verdoppeln wir N und berechnen die Seite des 2N-Ecks mit der obigen Formel und die Näherungswerte für Umfang und "pi".

Dieses Verfahren wird solange wiederholt bis ein vorgegebener Grenzwert erreicht ist.

In der folgenden Grafik wird diese Annäherung demonstriert.


2
Regelmäßige Vielecke im Einheitskreis (r = 1).
Eckenanzahl N = 6
Zentriwinkel w = 360 / N = 60°
-2
0
1
2
Seite des N-Ecks: a = 1
Umfang: U = N*a = 6
Näherung für "pi": k = 3
-2


Regelmäßige Vielecke im Einheitskreis (r = 1).
Eckenanzahl N = 96
Zentriwinkel w = 360 / N = 3.75000000°
2
-2
0
1
2
-2
Seite des N-Ecks: a = 0.06543817
Umfang: U = N*a = 6.28206390
Näherung für "pi": k = 3.14103195

Näherungsweise Berechnung der Zahl "pi".
(auf 8 Dezimalstellen gerundet)

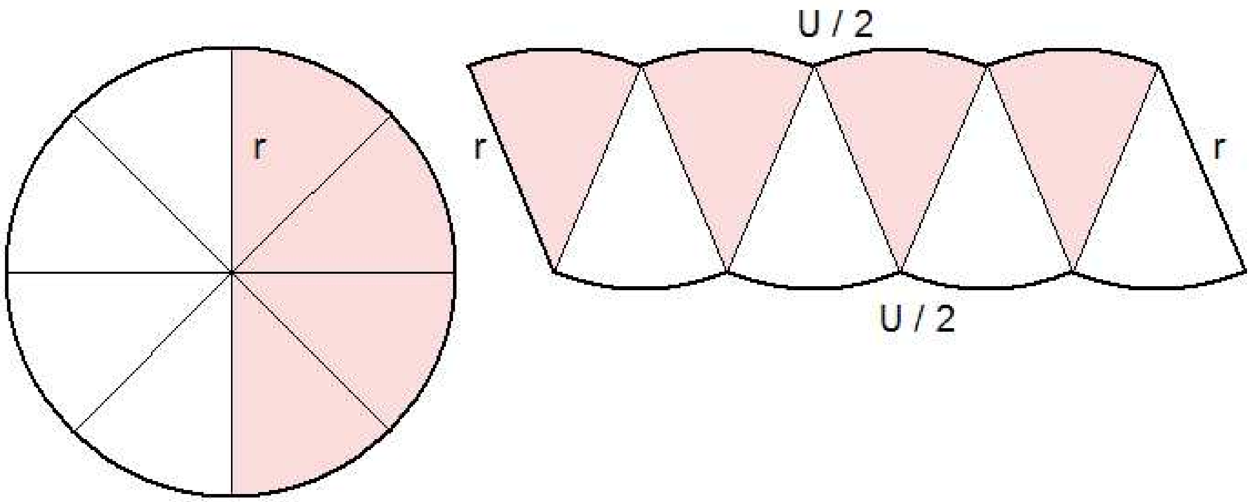
6-Eck: "pi" = 3.00000000
12-Eck: "pi" = 3.10582854
24-Eck: "pi" = 3.13262861
48-Eck: "pi" = 3.13935020
96-Eck: "pi" = 3.14103195
192-Eck: "pi" = 3.14145247
384-Eck: "pi" = 3.14155761
768-Eck: "pi" = 3.14158389
1536-Eck: "pi" = 3.14159046
3072-Eck: "pi" = 3.14159211
6144-Eck: "pi" = 3.14159252
12288-Eck: "pi" = 3.14159262
24576-Eck: "pi" = 3.14159265
49152-Eck: "pi" = 3.14159265

Zahlenwert von "pi" = 3.141592653590.....
(auf 12 Dezimalstellen gerundet)

Es ist üblich für "pi" den griechischen Buchstaben ¶ zu schreiben.
Dann gilt für den Umfang des Kreises die Formel: U = ¶*d = 2*r*¶.

Die Fläche des Kreises

Zur Flächenberechnung wird dem Kreis ein regelmäßiges N-Eck eingeschrieben und der Kreis somit in N Ausschnitte zerlegt. Diese Ausschnitte werden wie in der rechten Figur aufgelegt. Der Kreis und die rechte Figur sind daher flächengleich.

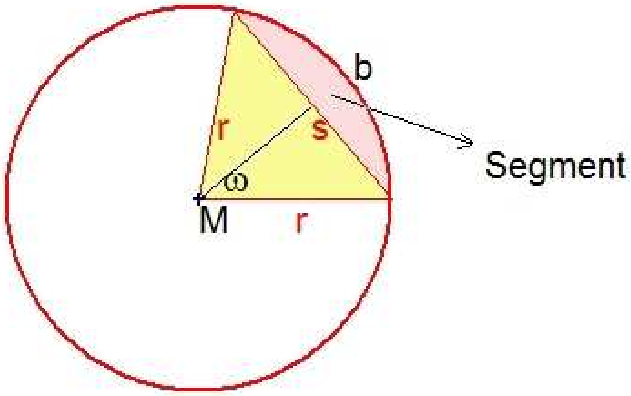


Wird die Zerlegung des Kreises in seine Ausschnitte verfeinert, d.h. strebt N gegen Unendlich, dann nähert sich die rechte Figur einem Rechteck mit U/2 als einer Seite und r als anderer Seite. Die Fläche ist dann $F = r*(U/2)$ und weil ja $U = 2*r*\P$ ist, folgt daher $F = r^2*\P$.

Also gilt für die Fläche des Kreises die Formel: $F = r^2 * \P$.

Die Teile des Kreises (Theorie)

Zieht man vom Mittelpunkt M zwei Radien zur Kreislinie, dann wird ein Ausschnitt (Sektor) gebildet. Der Öffnungswinkel w, welchen die beiden Radien einschließen, heißt Zentriwinkel. Der Teil der Kreislinie, der zwischen den beiden Radien liegt, heißt Kreisbogen b. Jener Teil der Kreisfläche, der zwischen Kreissehne s und Kreisbogen liegt, heißt Abschnitt (Segment).



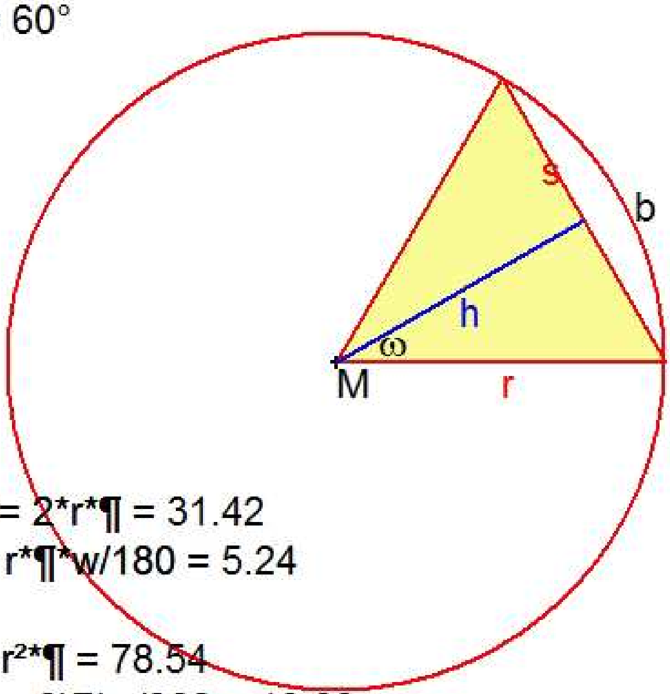
Der Bogen b verhält sich zum Umfang U sowie der Zentriwinkel w zum vollen Winkel von 360°, d.h. b / U = w / 360, b = U * w / 360.
Also gilt für den Kreisbogen b = r * ¶ * w / 180.

Die Sektorfläche E verhält sich zur Kreisfläche F sowie der Zentriwinkel w zum vollen Winkel, d.h. E / F = w / 360, E = F * w / 360.
Also gilt für die Sektorfläche E = r² * ¶ * w / 360 = r * b / 2.
Weiters gilt: Segmentfläche G = Sektorfläche E - Dreiecksfläche D.

Die Teile des Kreises (Praxis)

Gegeben:

Kreisradius r = 5
Zentriwinkel w = 60°



Gesucht:

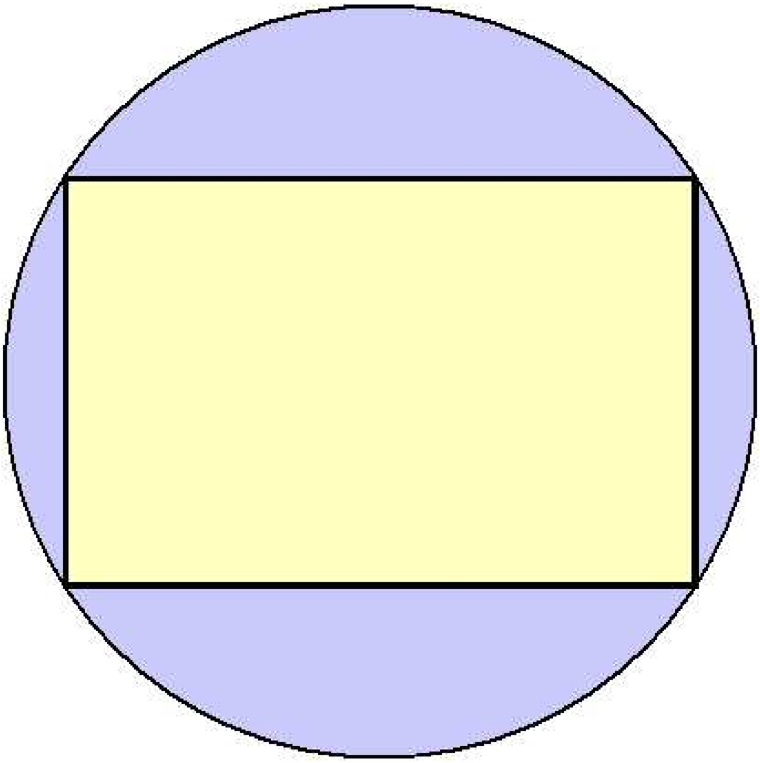
Kreisumfang U = 2*r*¶ = 31.42
Kreisbogen b = r*¶*w/180 = 5.24

Kreisfläche F = r²*¶ = 78.54
Sektorfläche E = r²*¶*w/360 = 13.09

Höhe h = r*cos(w/2) = 4.33
Halbsehne s = sqrt(r²-h²) = 2.50
Dreiecksfläche D = s*h = 10.81
Segmentfläche G = E - D = 2.28

Rechteck und Umkreis

Gegeben: Seiten a = 9.61 cm, b = 6.26 cm
Gesucht : Rechtecksfläche F, Umkreisfläche K



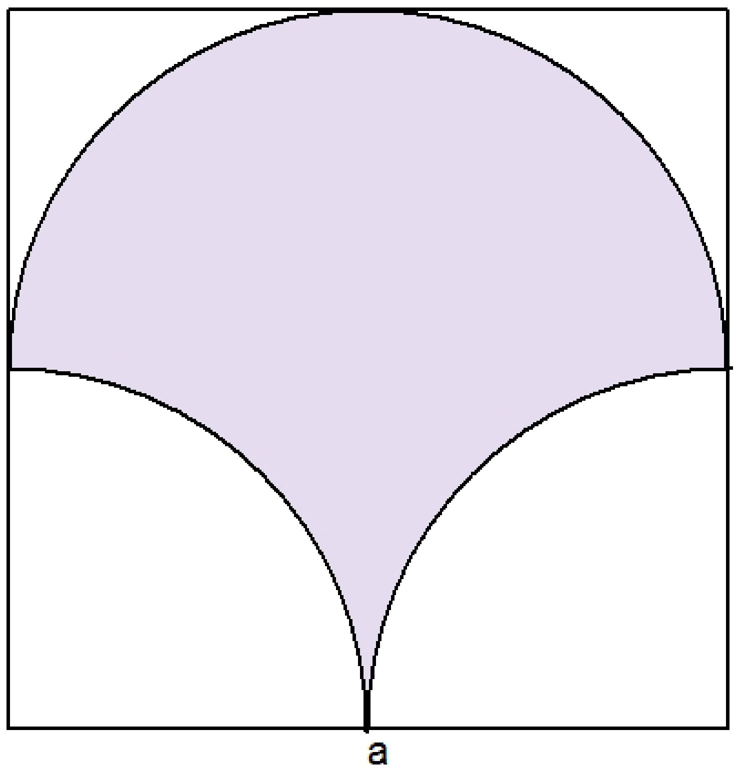
Wieviel Prozent vom Kreis beträgt das Rechteck ?

Lösung:

Diagonale d = 11.47 cm
Rechteck F = 60.16 cm²
Kreis K = 103.31 cm²
Prozent p = 58.23%

Zusammengesetzte Flächen, 1. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 10.94 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs

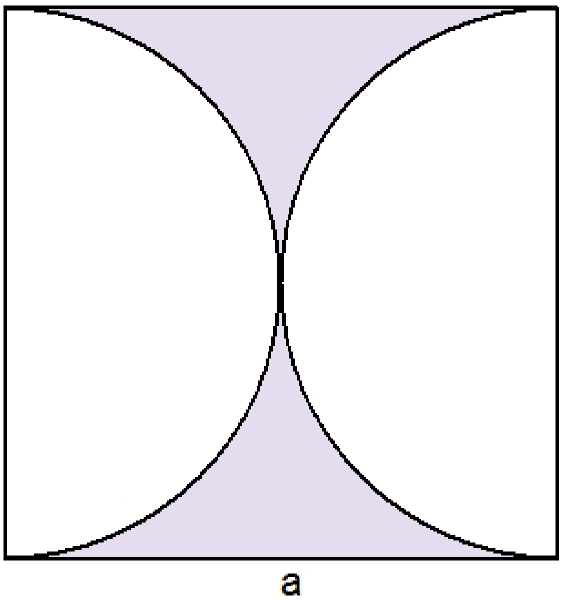


Lösung:

Umfang U = 34.37 cm
Fläche F = 59.84 cm²

Zusammengesetzte Flächen, 2. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 8.41 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs

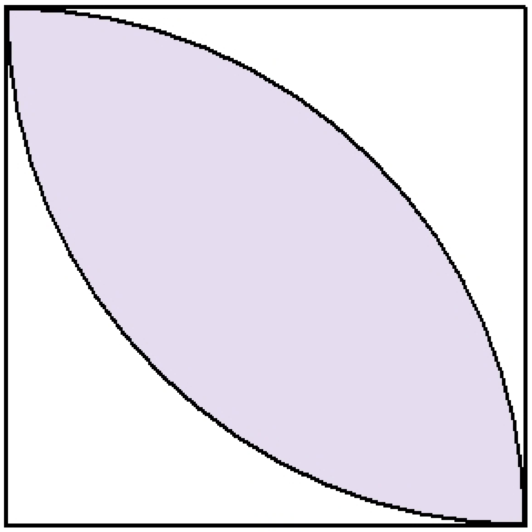


Lösung:

Umfang U = 43.24 cm
Fläche F = 15.18 cm²

Zusammengesetzte Flächen, 3. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 7.92 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs

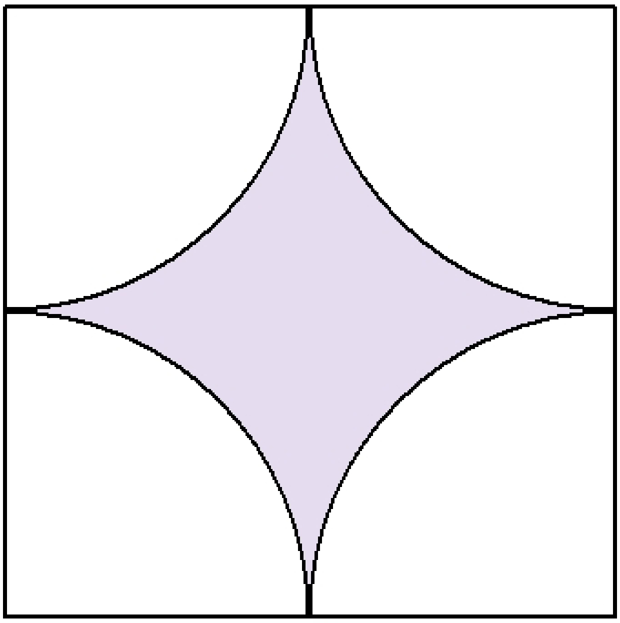


Lösung:

Umfang U = 24.88 cm
Fläche F = 35.80 cm²

Zusammengesetzte Flächen, 4. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 9.30 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs



Lösung:

Umfang U = 29.22 cm
Fläche F = 18.56 cm²