TRIGONOMETRIE

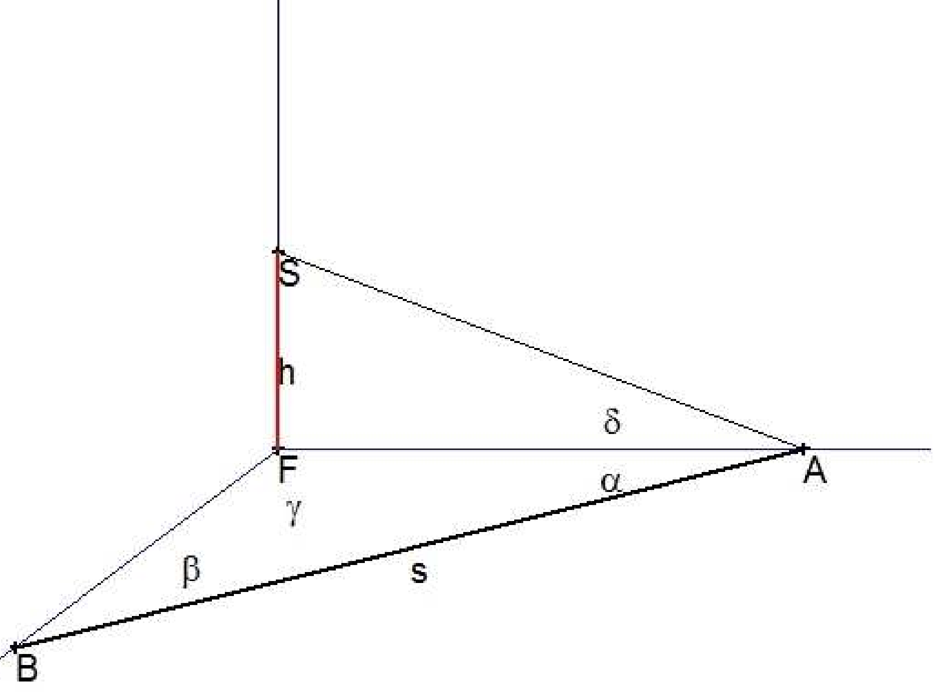
(Landvermessung)

Version 2.0 © Herbert Paukert

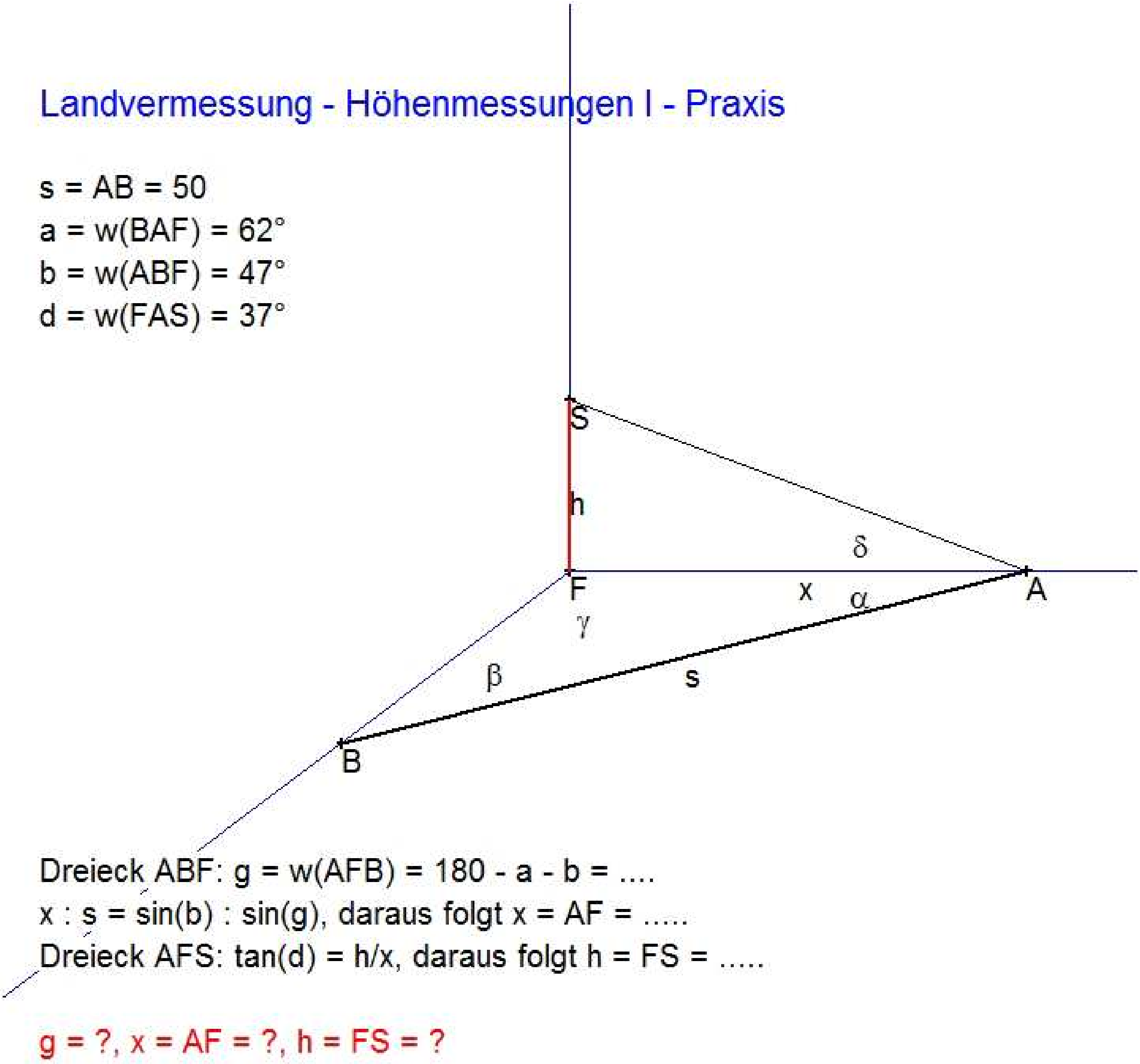
Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

Höhenmessungen I

Landvermessung - Höhenmessungen I - Theorie



Auf der Ebene steht ein lotrechter Turm mit unzugänglichem Fußpunkt F und unbekannter Höhe h = FS. Um diese Höhe zu ermitteln, werden in der Ebene die Standlinie s = AB und die Winkel a = w(BAF) und b = w(ABF) gemessen. Vom Punkt A wird zur Turmspitze S der Höhenwinkel d = w(FAS) bestimmt. Aus diesen Daten kann die Höhe h = FS berechnet werden.



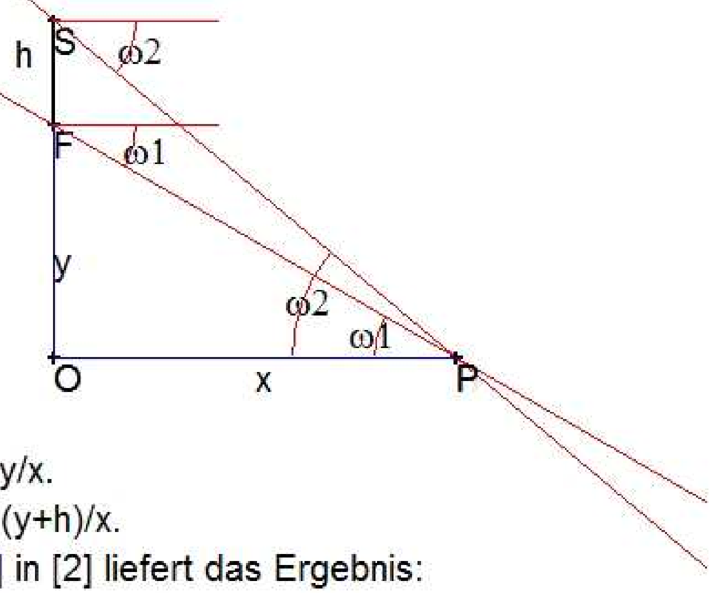
Lösung:

w(AFB) = 71°
x = 38.67 m
h = 29.14 m

Höhenmessungen II

Landvermessung - Höhenmessungen II - Theorie

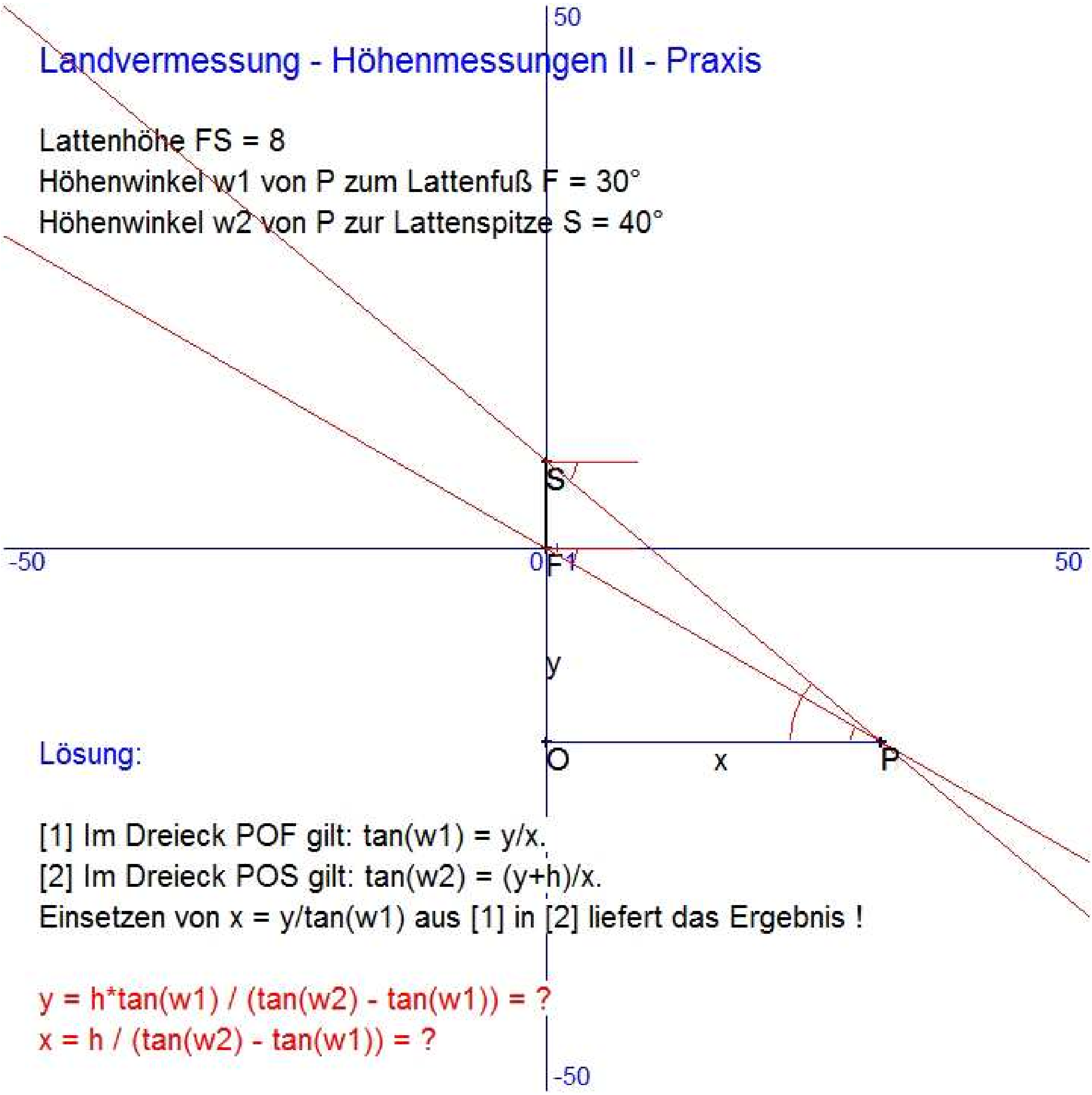
Von zwei Punkten F und P im nicht ebenen Gelände soll der Horizontalabstand (x=OP) und der Höhenunterschied (y=OF) ermittelt werden. Dazu wird im höheren Punkt F eine Messlatte mit der Höhe h=FS aufgestellt. Dann wird vom tieferen Punkt P zum Punkt F der Höhenwinkel w1 = w(FPO) und zur Lattenspitze S der Höhenwinkel w2 = w(SPO) gemessen. Aus diesen Daten werden die Entfernungen x, y berechnet.



Lösung:

[1] Im Dreieck POF gilt: $\tan(w1) = y/x$.
[2] Im Dreieck POS gilt: $\tan(w2) = (y+h)/x$.
Einsetzen von $x = y/\tan(w1)$ aus [1] in [2] liefert das Ergebnis:

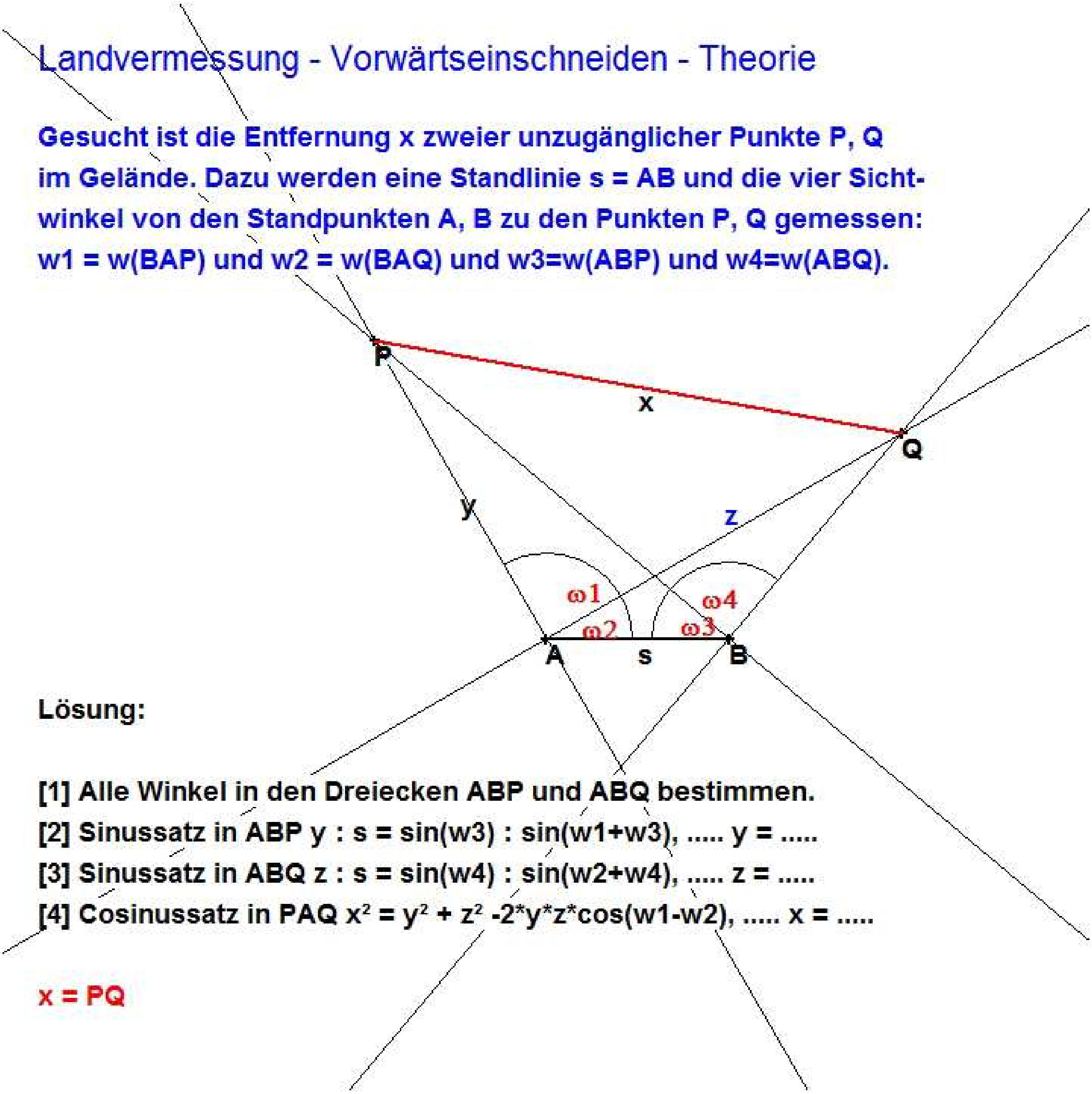
$$y = h \cdot \tan(w1) / (\tan(w2) - \tan(w1))$$
$$x = h / (\tan(w2) - \tan(w1))$$

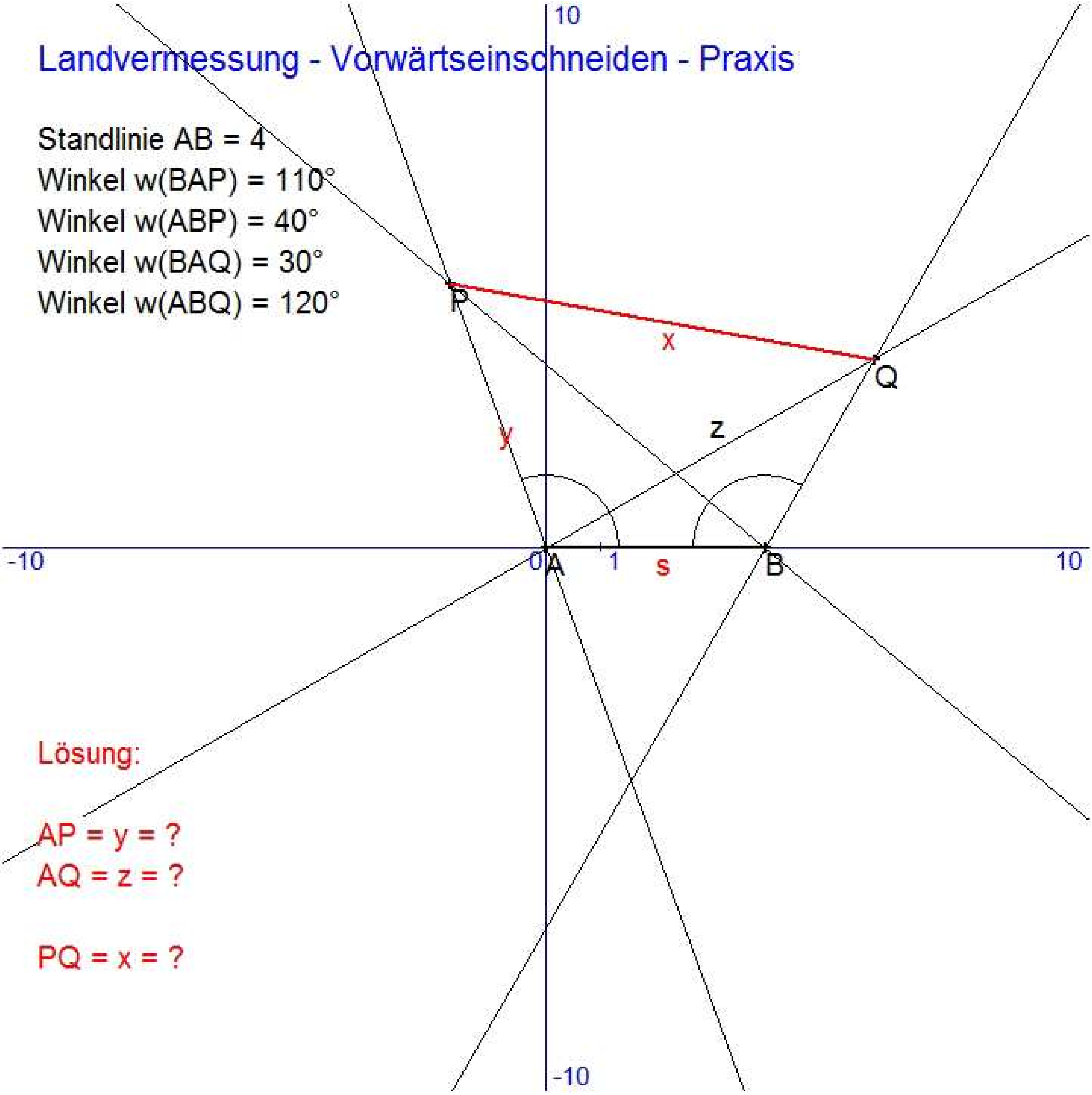


Lösung:

x = 30.56 m
y = 17.65 m

Vorwärtseinschneiden



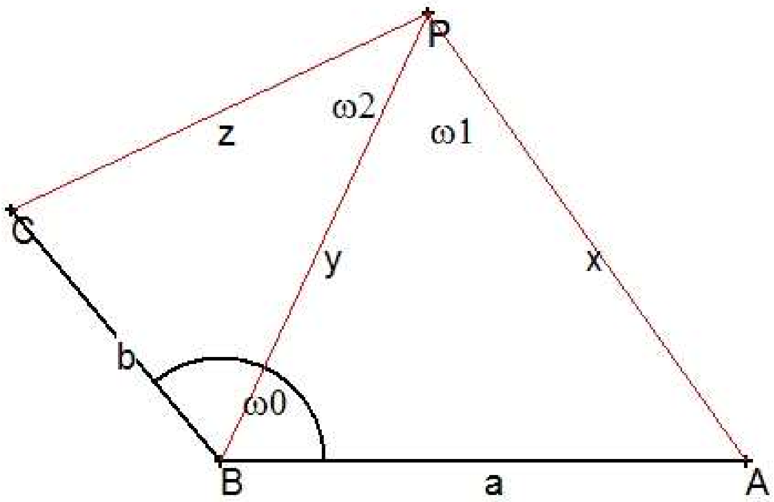


Lösung:

y = 5.14 km
z = 6.93 km
x = 7.88 km

Rückwärtseinschneiden

Rückwärtseinschneiden - Theorie

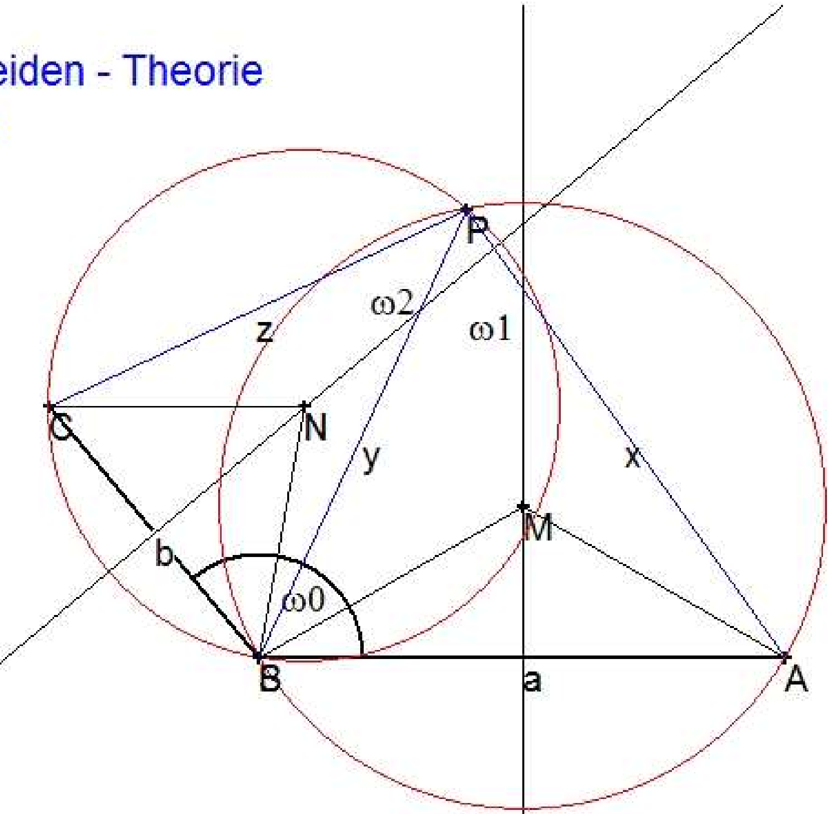


In einem ebenen Gelände liegen die vier Punkte P und A, B, C. Die Orte der Punkte A, B, C sind bekannt und daher auch die Größen a = AB, b = BC und w0 = w(ABC). Der Landvermesser befindet sich im Punkt P, dessen Lage nicht bekannt ist, und misst von dort die Sichtwinkel w1 = w(APB) und w2 = w(BPC).

Aus diesen Daten sollen die unbekannten Entfernungen x, y, z vom Punkt P zu den drei Punkten A, B, C ermittelt werden.

Rückwärtseinschneiden - Theorie

Geometrische Lösung

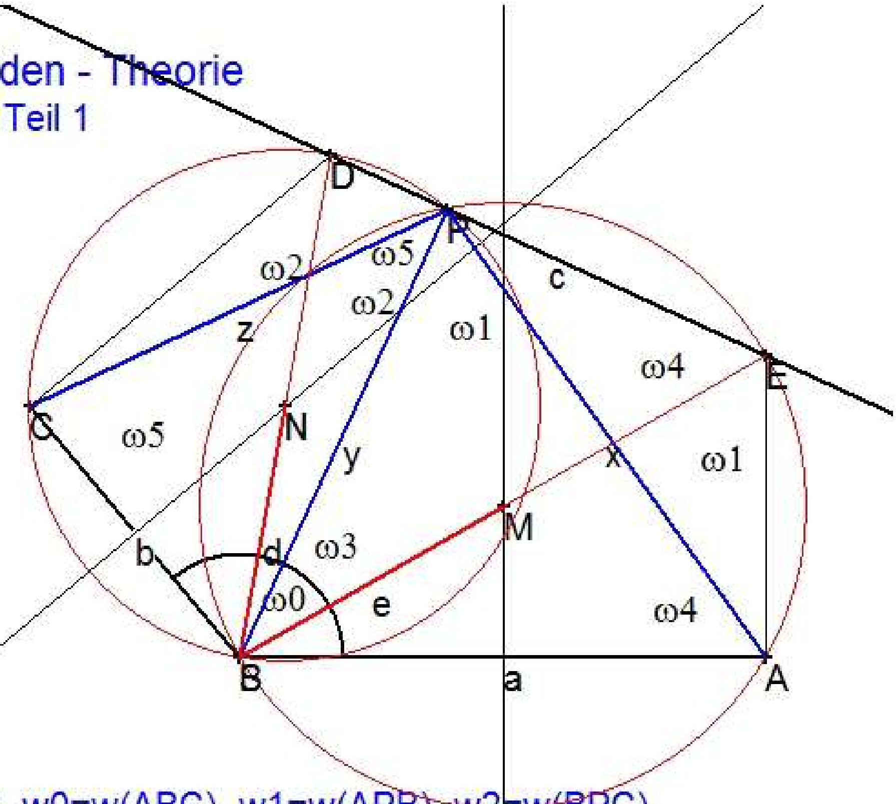


Gegeben: a=AB, b=BC, w0=w(ABC), w1=w(APB), w2=w(BPC).

[1] Standlinien a und b mit Winkel w0 im Maßstab zeichnen.
[2] Ersten Randwinkelkreis k[M,r=MA] konstruieren,
M liegt auf der Streckensymmetrale von AB, w(AMB) = 2*w1.
[3] Zweiten Randwinkelkreis k[N,r=NB] analog konstruieren.
[4] Die beiden Randwinkelkreise schneiden, ergibt Punkt P.
[5] Entfernungen x = AP, y = BP, z = CP ermitteln.

Rückwärtseinschneiden - Theorie

Arithmetische Lösung - Teil 1



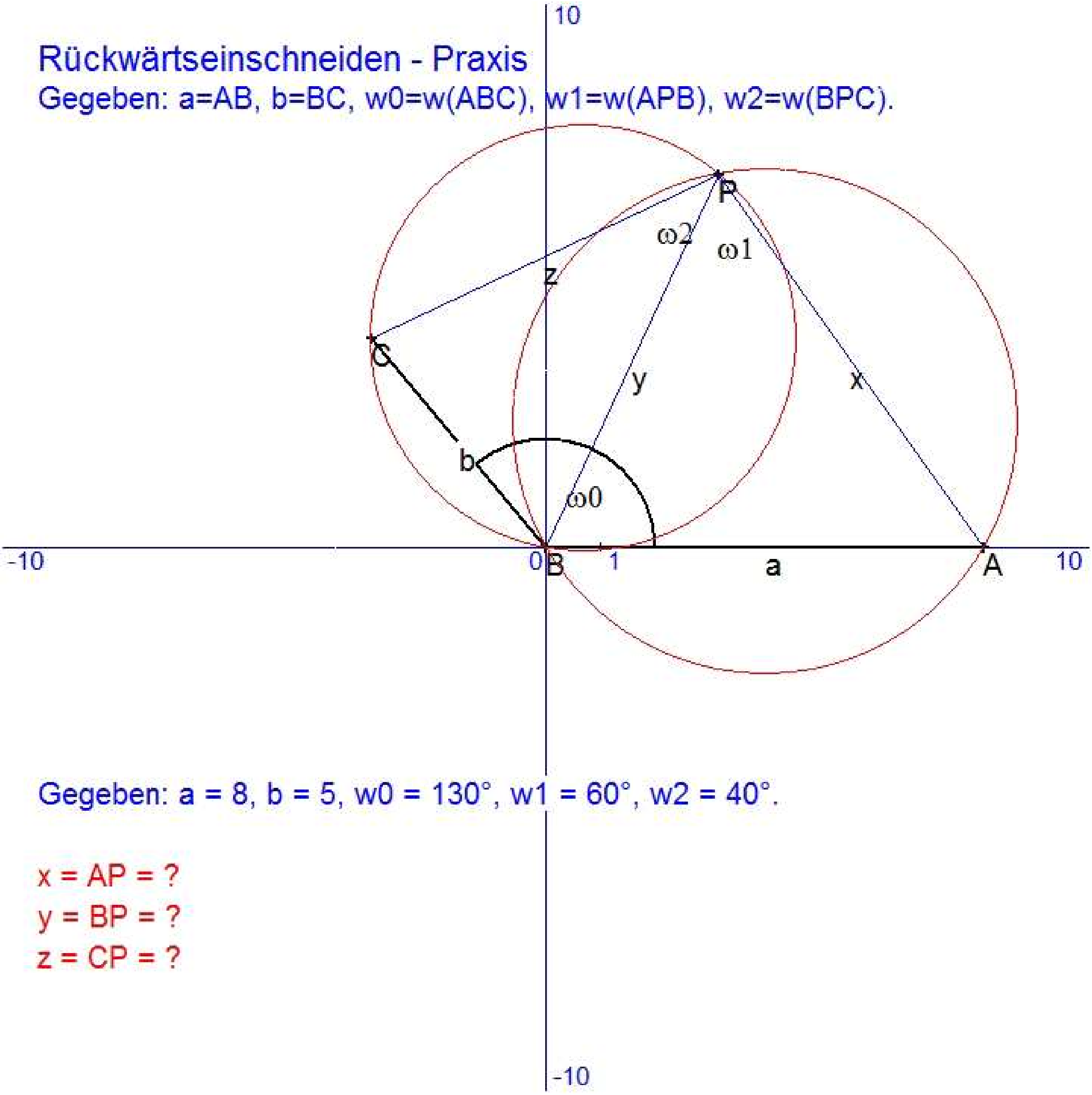
Gegeben: a=AB, b=BC, w0=w(ABC), w1=w(APB), w2=w(BPC).

Erste Standlinie a = AB.
Zweite Standlinie b = BC.
Erster Randwinkelkreis.
Zweiter Randwinkelkreis.
Die Randwinkelkreise schneiden einander im Punkt P.
Eine Normale auf die Strecke BP zeichnen.
Die Normale mit den Randwinkelkreisen schneiden.

Arithmetische Lösung - Teil 2

Gegeben: a = AB, b = BC, w0 = w(ABC), w1 = w(APB), w2 =w(BPC).

[1] Wir ziehen eine normale Gerade n auf die Strecke BP und schneiden sie mit den beiden Randwinkelkreisen, das ergibt die Punkte D und E.
[2] Der Winkel w(AEB) ist, so wie w1, ein Randwinkel über der Sehne AB, er ist also genau so groß wie w1. Das Dreieck BEA ist rechtwinkelig, weil es in einem Halbkreis liegt (Thalessatz). Also ist der dritte Winkel im Dreieck w(ABE) = 90 - w1.
[3] Die gleiche Überlegung [2] kann auch für das Dreieck BDC angestellt werden. Somit ist der Winkel w(CBD) = 90 - w2.
[4] Aus [2] und [3] folgt für w(DBE) = w3 = w0 - (90-w1) - (90-w2).
also gilt: w3 = w0+w1+w2-180.
[5] Im Dreieck BAE gilt sin(w1) = a/(2*e) mit e = MB, also ist e = a/(2*sin(w1)).
[6] Im Dreieck BCD gilt sin(w2) = b/(2*d) mit d = NB, also ist d = b/(2*sin(w2)).
[7] Im Dreieck BDE gilt $c^2 = 4d^2 + 4e^2 - 8*d*e*\cos(w3)$.
[8] Im Dreieck BDE gilt sin(w4) : sin(w3) = 2*d : c, d.h. w4 = arcsin(2*d*sin(w3)/c).
[9] Im Dreieck BDE gilt w5 = 180 - w3 - w4.
[10] Im Dreieck EPB gilt sin(w4) = y/(2*e).
Also gilt: y = 2*e*sin(w4).
[11] Im Dreieck ABP gilt x : a = sin(w1+w4) : sin(w1).
Also gilt: x = a*sin(w1+w4)/sin(w1).
[12] Im Dreieck BCP gilt z : b = sin(w2+w5) : sin(w2).
Also gilt: z = b*sin(w2+w5)/sin(w2).



Lösung:

AP = x = 8.40 km
BP = y = 7.54 km
CP = z = 7.04 km