

GRUNDLAGEN des MESSENS

Version 2.0 © Herbert Paukert

Der Vorgang des Messens	[02]
Die Längenmessung	[03]
Die Flächenmessung	[04]
Die Volumenmessung	[06]
Die Winkelmessung	[07]
Das Koordinatensystem	[10]

Hinweis:

Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt **paumath.exe**, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

Der Messvorgang

Die Objekte unserer Welt haben Merkmale. Beispielsweise haben die Strecken eine "Länge", die Winkel eine "Größe", ebene Bereiche eine "Fläche" und räumliche Körper haben ein "Volumen". Diesen Merkmalen wird beim Messen nach folgendem Verfahren eine Zahl zugeordnet:

- Schritt [1] Beschreibung des zu messenden Merkmals.
- Schritt [2] Festlegen einer Maßeinheit.
- Schritt [3] Erkennen, wie oft diese Maßeinheit in dem gegebenem Merkmal enthalten ist. Das liefert eine bestimmte Maßzahl. Meistens wird dazu ein Messgerät verwendet.
- Schritt [4] Bleibt kein Rest, so ist die Messung beendet. Bleibt ein Rest, dann wird die Maßeinheit verfeinert (z.B. auf ein Zehntel verkleinert). Liegt diese neue Maßeinheit unter einer bestimmten Genauigkeit, wird die **Messung beendet**.
- Schritt [5] Messung weiterführen. **Zurück zu Schritt [3]**.

Invarianz und Additivität

Grundsätzlich erhalten kongruente Objekte beim Abmessen immer die gleiche Maßzahl (**Invarianz**). Lässt sich ein Objekt in Teile zerlegen, dann ist seine Maßzahl die Summe der Maßzahlen seiner Teile (**Additivität**).

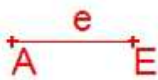
Das Gesetz von Archimedes

Am Anfang von Messungen wird der Maßeinheit immer die natürliche Zahl Eins zugeordnet. Am Ende der Messungen sind die Ergebnisse aber meistens reelle Zahlen x , welche zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen liegen. **Damit diese Eingrenzung möglich ist, muss es zu jeder reellen Zahl x stets eine größere natürliche Zahl n geben.**

MESSEN von LÄNGEN

Die Längenmessung

Als Maßeinheit dient die Einheitsstrecke AE, welcher die Länge e mit $e = 1 \text{ cm}$ zugeordnet wird.



Gegeben ist eine bestimmte Strecke PQ mit unbekannter Länge s .



Wir zählen ab, wie oft die Einheit e in der Strecke PQ enthalten ist.



Die Einheitsstrecke wird 4 Mal auf der Strecke PQ abgetragen. Es bleibt ein Rest r übrig, der kleiner als die Einheitsstrecke ist.

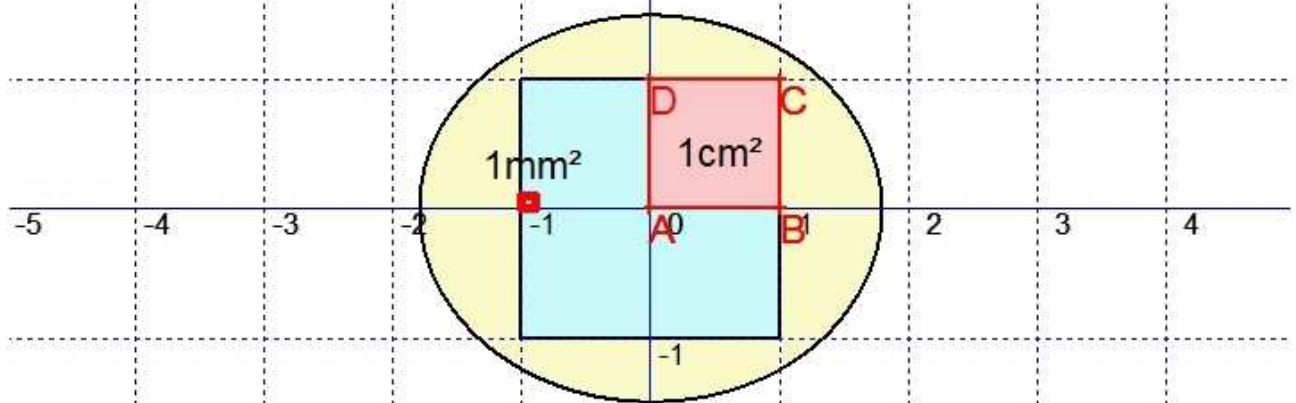
Es gilt daher: $s = 4 \cdot e + r$ mit $r < e$, d.h. $s = 4 \text{ cm} + r$.

Um den Rest zu messen, wird die Maßeinheit e in 10 gleich lange Teile zerlegt. Ein solcher Teil wird als neue Einheit mit Länge $z = 1 \text{ mm}$ festgesetzt. Mit dieser Einheit wird der Rest r gemessen. Bleibt dabei wieder ein Rest übrig, dann wird die Maßeinheit noch einmal verfeinert. Dieser Messvorgang wird so lange wiederholt bis der letzte Rest unter einer vorbestimmten Genauigkeit liegt.

MESSEN von FLÄCHEN

Die Flächenmessung

Als Maßeinheit dient das Einheitsquadrat ABCD mit der Seitenlänge $s = 1 \text{ cm}$. Die Fläche e ist mit 1 cm^2 (Quadratcentimeter) festgelegt. Gegeben ist ein geschlossener Bereich. In unserem Beispiel ist es eine Ellipse mit einer schwarzen Randkurve. Das Einheitsquadrat ist in dem Bereich 4 Mal enthalten, wobei eine Restfläche übrig bleibt. Um diese zu messen, wird die Flächeneinheit e in 100 Teile zerlegt. Die neue Einheit ist ein Quadrat mit Seite 1 mm und Fläche 1 mm^2 .

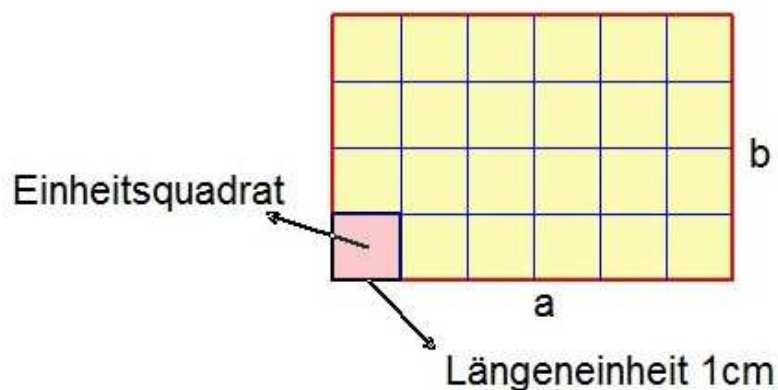


Es wird nun abgezählt, wie oft die neue kleinere Flächeneinheit in der Restfläche ohne Zwischenraum und Überlappung enthalten ist. Das ergibt eine verfeinerte Maßzahl für die Fläche des Bereichs. Bleibt abermals eine Restfläche übrig, dann wird das Verfahren solange wiederholt bis die Restfläche unter einer vorbestimmten Genauigkeit liegt. Die auf solche Weise gewonnene Maßzahl für die Fläche des Bereichs ist ein Näherungswert. Sie ist nur dann ein ganz genauer Wert, wenn die Restfläche Null wird.

Fläche A (area) eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.
(In unserem Beispiel ist $a = 6 \text{ cm}$ und $b = 4 \text{ cm}$).

Zuerst muss eine gemeinsame Maßeinheit (... dm, cm, mm ...) für die beiden Seitenlängen bestimmt werden. Bei uns ist das 1 cm.

Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm ist die Maßeinheit für die Fläche. Dafür schreibt man dann 1 cm^2 (ein Quadrat-Zentimeter).



Frage: Wie oft ist das Einheitsquadrat im Rechteck enthalten ?

Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm wird im linken unteren Eck des Rechtecks gezeichnet. In der untersten Reihe liegen genau 6 Einheitsquadrate. Das ganze Rechteck besteht aus 4 Reihen. Daher sind in dem Rechteck $6 * 4$ Einheitsquadrate enthalten. In unserem Beispiel hat das Rechteck somit eine Fläche von 24 cm^2 .

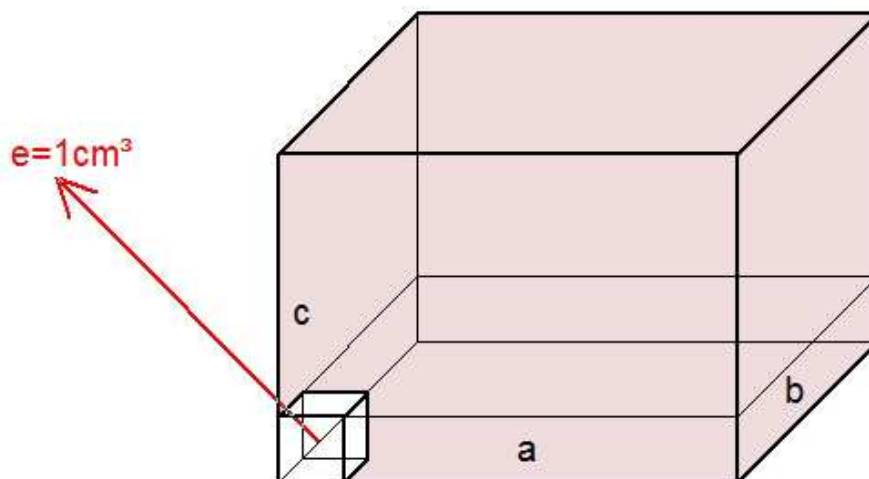
Für die Fläche des Rechtecks gilt allgemein die Formel: $A = a * b$

Hinweis: Oft wird die Fläche statt mit A auch mit F bezeichnet.

MESSEN von VOLUMEN

Volumen des Quaders

Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen a , b und c . Um sein Volumen (d.h. den Inhalt des eingeschlossenen Raumes) zu messen, wird ein Einheitswürfel mit der Kantenlänge 1 cm und dem Volumen $e = 1 \text{ cm}^3$ (Kubikzentimeter) bei der linken unteren Ecke festgelegt.



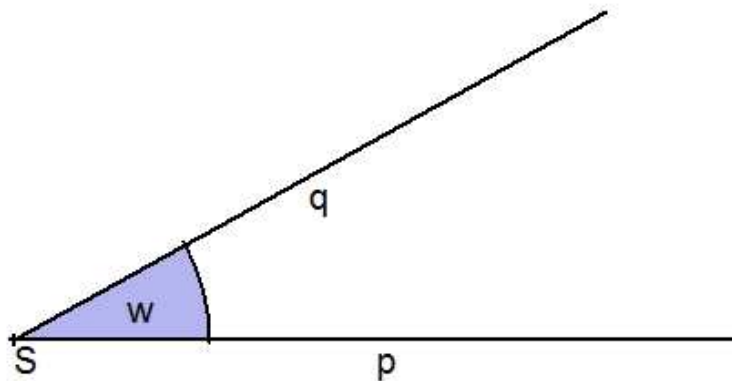
Ist der Einheitswürfel nicht ohne Restraum im Quader enthalten, wird er in 1000 kleinere Einheitswürfel mit Kantenlänge 1 mm und dem Volumen 1 mm^3 zerlegt. Diese Verfeinerung wird bis zu einer vorbestimmten Genauigkeit fortgesetzt. Dann kann das Volumen berechnet werden: In die untere vordere Reihe passen a Einheitswürfel. Der Boden des Quaders ist eine Schicht aus b Reihen. Also wird der Boden von $a \cdot b$ Einheitswürfeln bedeckt. Der ganze Quader enthält c Schichten und somit $a \cdot b \cdot c$ Einheitswürfel.
Für das Volumen V des Quaders gilt die Formel $V = a \cdot b \cdot c$.

Hinweis: Wenn der Körper kein Quader ist, dann erfolgt die Messung seines Volumens in der gleichen Weise wie beim Quader, nur erhält man dann entweder eine andere Formel oder auch keine Formel für das Körpervolumen.

MESSEN von WINKELN

Definition eines Winkels

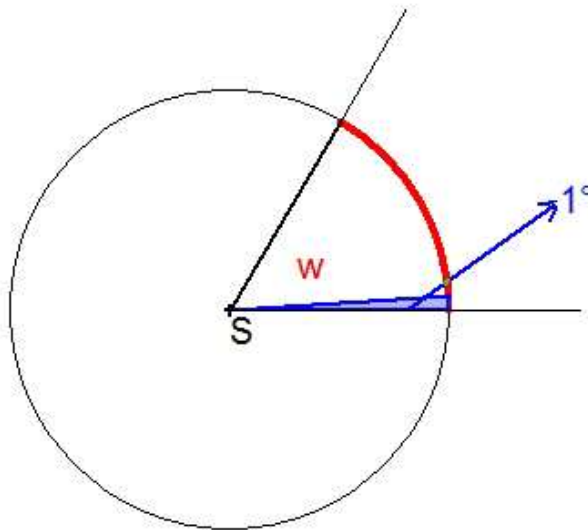
Neben Punkten und Geraden zählen die Winkel zu den Grundelementen der Geometrie.



Ein Winkel w wird in der Ebene festgelegt durch einen Scheitelpunkt S und zwei Halbgerade p und q , welche durch den Scheitel gehen. Die zwei Halbgeraden heißen auch Winkelschenkel.

Messen eines Winkels

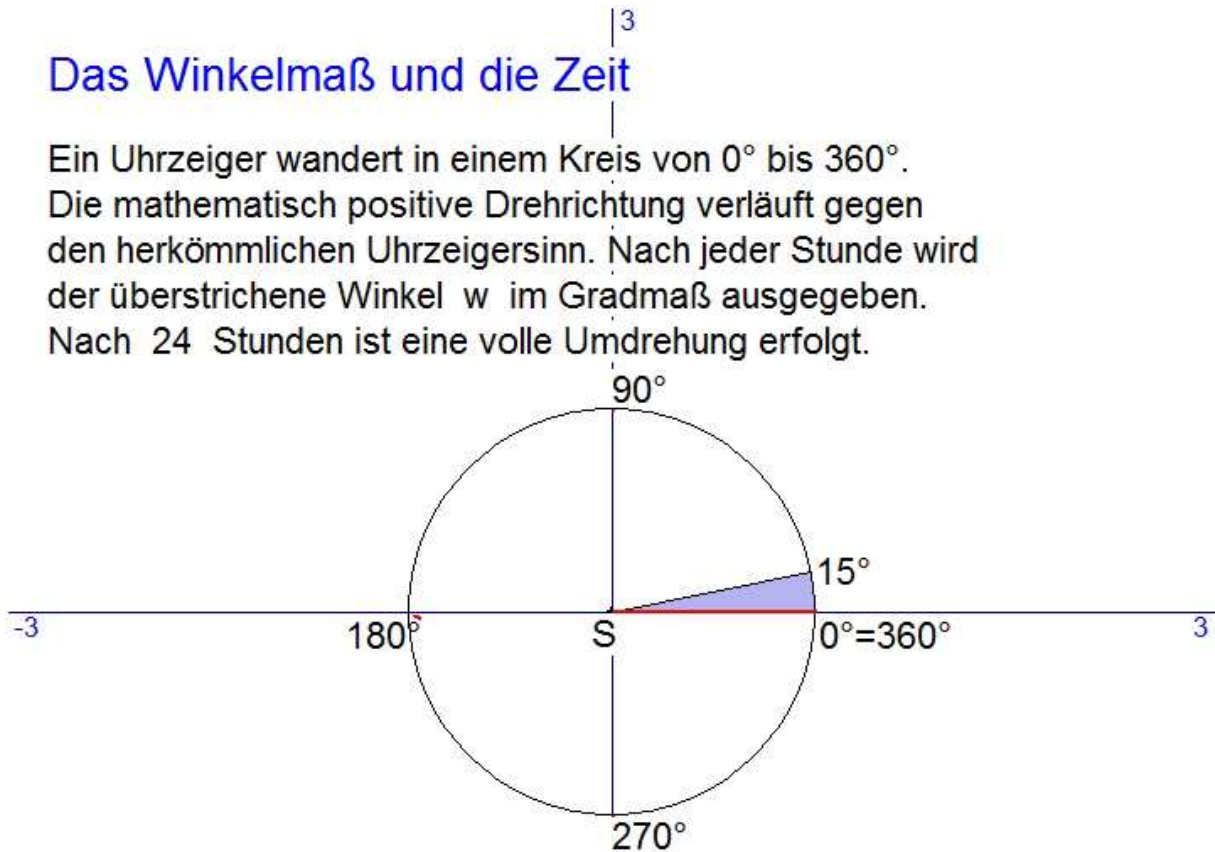
Wir zeichnen einen Winkel w in der Ebene. Der Scheitel des Winkels sei S , und die beiden Schenkel des Winkels schneiden einen Kreis mit dem Mittelpunkt S .



Der volle Kreis entspricht einem Winkel von 360 Grad ($^\circ$). Ein Grad (1°) entspricht dann dem 360-ten Teil davon. Der Winkel w wird in dieser Maßeinheit gemessen, d.h. es wird abgezählt, wie oft 1° im Winkel w enthalten ist. Bleibt dabei ein Restwinkel übrig, dann wird als feinere Maßeinheit ein entsprechender Teil von 1° genommen und damit die Messung weitergeführt.

Das Winkelmaß und die Zeit

Ein Uhrzeiger wandert in einem Kreis von 0° bis 360° .
 Die mathematisch positive Drehrichtung verläuft gegen den herkömmlichen Uhrzeigersinn. Nach jeder Stunde wird der überstrichene Winkel w im Gradmaß ausgegeben.
 Nach 24 Stunden ist eine volle Umdrehung erfolgt.



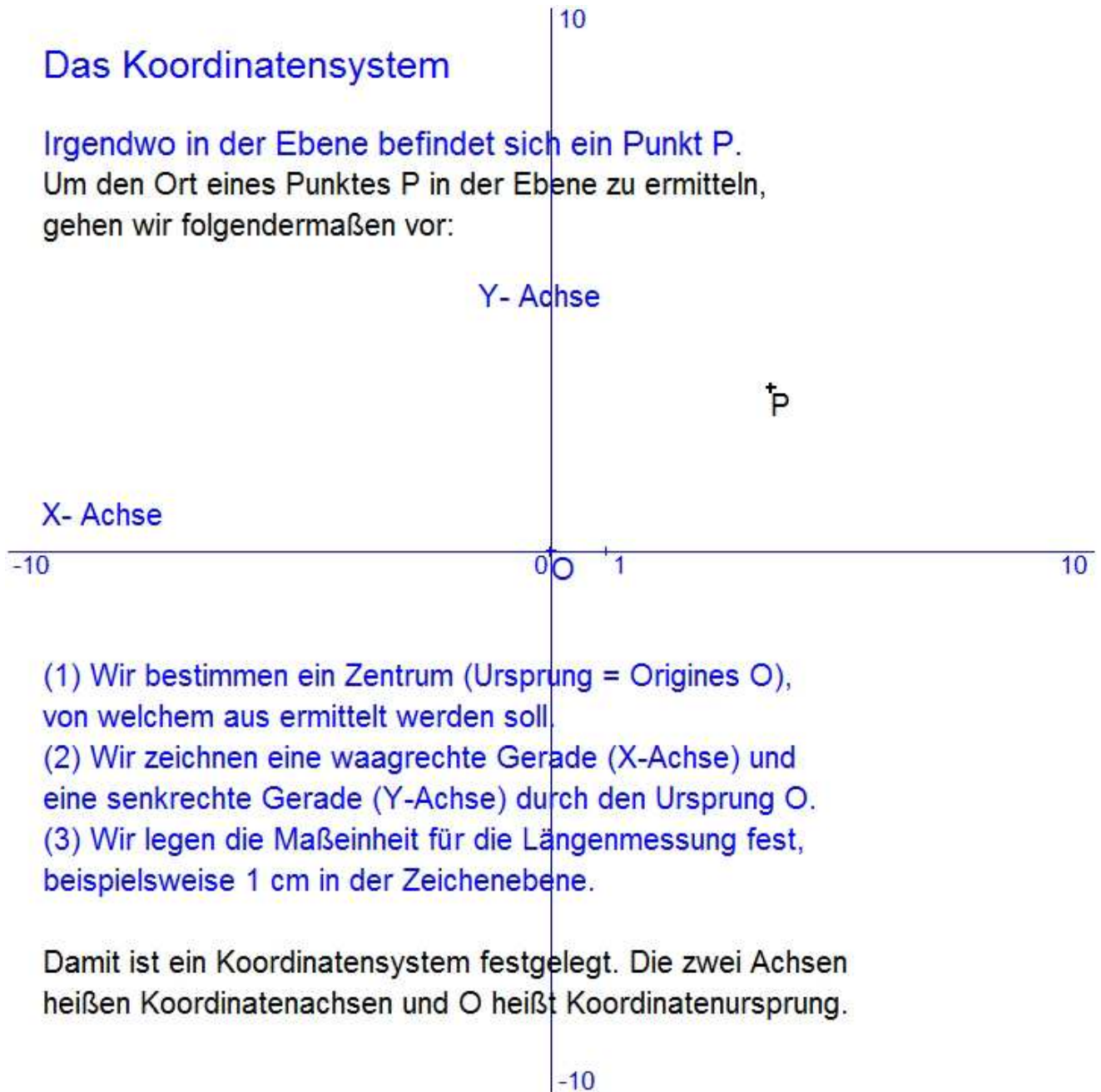
Stunden = 24, Winkel $w = 360^\circ$
 Einer Stunde entsprechen $360^\circ / 24 = 15^\circ$.

Nach der Winkelgröße w unterscheidet man spitze ($0^\circ \leq w < 90^\circ$),
 rechte ($w = 90^\circ$), stumpfe ($90^\circ < w < 180^\circ$), gestreckte ($w = 180^\circ$),
 erhabene ($180^\circ < w < 360^\circ$) und volle Winkel ($w = 360^\circ$).

Das KOORDINATENSYSTEM

Das Koordinatensystem

Irgendwo in der Ebene befindet sich ein Punkt P .
Um den Ort eines Punktes P in der Ebene zu ermitteln,
gehen wir folgendermaßen vor:



(1) Wir bestimmen ein Zentrum (Ursprung = Origines O),
von welchem aus ermittelt werden soll.

(2) Wir zeichnen eine waagrechte Gerade (X-Achse) und
eine senkrechte Gerade (Y-Achse) durch den Ursprung O .

(3) Wir legen die Maßeinheit für die Längenmessung fest,
beispielsweise 1 cm in der Zeichenebene.

Damit ist ein Koordinatensystem festgelegt. Die zwei Achsen
heißen Koordinatenachsen und O heißt Koordinatenursprung.

