DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN

Version 2.0 © Herbert Paukert

Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

(1) Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen werden verwendet, um die Gegenstände (Elemente) einer Menge abzuzählen, d.h. die Anzahl der Elemente zu ermitteln.

Betrachten wir beispielsweise eine Menge von Selbstlauten { a, e, i, o, u } oder eine Menge von Mitlauten { b, c, d }.

Um eine Menge abzuzählen, können wir unsere Finger benutzen oder eine Strichliste anfertigen. Dabei schreiben wir für jedes gezählte Element einen Strich in die Liste.

Für die Selbstlaute erhalten wir die Liste | | | | | und wir nennen das Ergebnis die Zahl "Fünf (5)". Für die Mitlaute erhalten wir die Liste | | | und wir nennen das Ergebnis die Zahl "Drei (3)".

Diese Zähllisten werden fortlaufend mit Zahlennamen bezeichnet: Eins (1), Zwei (2), Drei (3), Vier (4), Fünf (5), ... Sie geben die Anzahl der Elemente einer Menge an.

Enthält eine Menge jedoch kein einziges Element (leere Menge), dann wird die Anzahl ihrer Elemente mit "Null (0)" bezeichnet.

Um größere Mengen abzuzählen, brauchen wir ein Zahlensystem. Meistens wird das Zehnersystem verwendet, welches aus zehn Grundziffern besteht:

0 (Null)		(Anzahl der Elemente der leeren Menge)
1 (Eins)	|	(1 = "E", Einheit, Einerstelle)
2 (Zwei)	| |	
3 (Drei)	| | |	
4 (Vier)	| | | |	
5 (Fünf)	| | | | |	
6 (Sechs)	| | | | | |	
7 (Sieben)	| | | | | | |	
8 (Acht)	| | | | | | | |	
9 (Neun)	| | | | | | | | |	

Die Zahl, welche einer bestimmten Zahl vorangeht, heißt ihr Vorgänger.
Die Zahl, welche einer bestimmten Zahl nachfolgt, heißt ihr Nachfolger.

Enthält eine Menge mehr als 9 Elemente, dann verwendet man für die Anzahl zwei Ziffernstellen:

10	(Zehn	= "Z", Zehnerstelle)
11	(Zehn und Eins	= Elf)
12	(Zehn und Zwei	= Zwölf)
13	(Zehn und Drei	= Dreizehn)
14	(Zehn und Vier	= Vierzehn)
15	(Zehn und Fünf	= Fünfzehn)
16	(Zehn und Sechs	= Sechzehn)
17	(Zehn und Sieben	= Siebzehn)
18	(Zehn und Acht	= Achtzehn)
19	(Zehn und Neun	= Neunzehn)

Enthält eine Menge mehr als 19 Elemente, dann wird einfach weiter gezählt:

20	(Zwei Zehner	= Zwanzig)
21	(Zwanzig und Eins	= Einundzwanzig)
22	(Zwanzig und Zwei	= Zweiundzwanzig)
....		
29	(Zwanzig und Neun	= Neunundzwanzig)
30	(Drei Zehner	= Dreißig)
31	(Dreißig und Eins	= Einunddreißig)
32	(Dreißig und Zwei	= Zweiunddreißig)
....		
39	(Dreißig und Neun	= Neununddreißig)
40	(Vier Zehner	= Vierzig)
41	(Vierzig und Eins	= Einundvierzig)
42	(Vierzig und Zwei	= Zweiundvierzig)
....		
49	(Vierzig und Neun	= Neunundvierzig)
....		
....		
90	(Neun Zehner	= Neunzig)
91	(Neunzig und Eins	= Einundneunzig)
92	(Neunzig und Zwei	= Zweiundneunzig)
....		
99	(Neunzig und Neun	= Neunundneunzig)

Enthält eine Menge mehr als 99 Elemente, dann verwendet man für die Anzahl drei Ziffernstellen:

100 (Einhundert = "H", Hunderterstelle)
101 (Einhundert und Eins)
....
199 (Einhundert und Neunundneunzig)
200 (Zweihundert)
201 (Zweihundert und Eins)
....
299 (Zweihundert und Neunundneunzig)
....
....
900 (Neunhundert)
901 (Neunhundert und Eins)
....
999 (Neunhundert und Neunundneunzig)

Enthält eine Menge mehr als 999 Elemente, dann verwendet man für die Anzahl vier oder noch mehr Ziffernstellen:

1000 (Tausend = "T", Tausenderstelle)
10000 (Zehntausend = "ZT")
....

Stellenwerte im Zehnersystem

Das Zehnersystem besteht aus 10 Grundziffern { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 }. Zahlen, welche größer als 9 sind, werden mit Hilfe von Stellenwerten dargestellt. **1**, 2, . . 9, **10**, 11, . . 99, **100**, 101, . . 999, **1000**, 1001, . .

Einer (E): **1 = 1E**
Zehner (Z): **10 = 1Z = 10E**
Hunderter(H): **100 = 1H = 10Z = 100E**
Tausender (T): **1000 = 1T = 10H = 100Z = 1000E**

Beispiel: 4285 = 4T 2H 8Z 5E = 4000 + 200 + 80 + 5

Beispiel: 2537 = 2T 5H 3Z 7E = 2*1000 + 5*100 + 3*10 + 7*1

Die Ziffer 7 hat in der Zahl 2537 den Stellenwert "Einer (E)".
Die Ziffer 3 hat in der Zahl 2537 den Stellenwert "Zehner (Z)".
Die Ziffer 5 hat in der Zahl 2537 den Stellenwert "Hunderter (H)".
Die Ziffer 2 hat in der Zahl 2537 den Stellenwert "Tausender (T)".

Merksatz: Zum Anschreiben einer natürlichen Zahl werden 10 Ziffern verwendet, welche nebeneinander an verschiedenen Stellen stehen. Der so genannte Stellenwert einer Ziffer erhöht sich schrittweise von rechts nach links um das Zehnfache.

Beispiele für die Schreibweise im Zehnersystem:

37 = 3Z 7E, Drei Zehner (Z) und sieben Einer (E).

3Z = 3 * 10 = 30
7E = 7 * 1 = 7

3Z 7E = 3 * 10 + 7 * 1 = 30 + 7 = 37

285 = 2H 8Z 5E, Zwei Hunderter (H), acht Zehner (Z), fünf Einer (E).

2H = 2 * 100 = 200
8Z = 8 * 10 = 80
5E = 5 * 1 = 5

2H 8Z 5E = 2 * 100 + 8 * 10 + 5 * 1 = 200 + 80 + 5 = 285

19 = 1Z 9E = 1*10 + 9*1
78 = 7Z 8E = 7*10 + 8*1

205 = 2H 0Z 5E = 2*100 + 0*10 + 5*1
439 = 4H 3Z 9E = 4*100 + 3*10 + 9*1

3016 = 3T 0H 1Z 6E = 3*1000 + 0*100 + 1*10 + 6*1
9999 = 9T 9H 9Z 9E = 9*1000 + 9*100 + 9*10 + 9*1

(2) Die Addition von Zahlen

Gegeben sind zwei Mengen. Eine neue Menge wird gebildet, welche alle Elemente der beiden Mengen enthält (Vereinigung).

Zwei Mengen, die kein Element gemeinsam haben, heißen fremd. Beispielsweise sind die Mengen { a, e, i, o , u } und { b, c, d } fremd. Die erste Menge hat 5 Elemente. Die zweite Menge hat 3 Elemente.

Legt man alle Elemente aus beiden Mengen zu einer neuen Menge zusammen, dann erhält man ihre Vereinigung { a, e, i, o, u, b, c, d }. Diese neue Menge hat genau 8 Elemente.

Beispiele:

1. Menge:	{ a, e, i, o, u },	Anzahl = 5
2. Menge:	{ b, c, d },	Anzahl = 3
Vereinigung:	{ a, e, i, o, u, b, c, d },	Anzahl = 8
1. Menge:	{ A, O, U },	Anzahl = 3
2. Menge:	{ Ä, Ö, Ü },	Anzahl = 3
Vereinigung:	{ A, O, U, Ä, Ö, Ü },	Anzahl = 6
1. Menge:	{ +, -, *, / },	Anzahl = 4
2. Menge:	{ ß, µ, ¶, ©, Ø, ƒ },	Anzahl = 6
Vereinigung:	{ +, -, *, /, ß, µ, ¶, ©, Ø, ƒ },	Anzahl = 10

Merksatz: Wenn x und y die Elementanzahlen von zwei fremden Mengen sind, dann wird die Elementanzahl z ihrer Vereinigung als Summe x + y bezeichnet. Dazu sagt man "x plus y ist z".

Auf diese Art und Weise kann man zu zwei Zahlen x und y eine neue Zahl z erzeugen. Diese Operation nennt man Addition. Das Ergebnis ist die Summe: x + y = z. Die zwei Zahlen x und y sind die Summanden.

Beispielsweise ergibt "2 plus 3" die Zahl 5, d.h. 2 + 3 = 5.

Additionen von kleinen Zahlen werden durch Strichlisten ermittelt:

3 + 1 = 4, weil III und I genau IIII ergibt.
2 + 3 = 5, weil II und III genau IIIII ergibt.
5 + 7 = 12, weil IIIII und IIIIIII genau IIIIIIIIIIII ergibt.

Hinweis: Addiert man zu einer Zahl (a) die Zahl Null (0), dann bleibt die Zahl unverändert: a + 0 = a.

Schriftliche Addition

Bei großen Zahlen muss schriftlich addiert werden. Dabei werden die Zahlen so untereinander geschrieben, dass die Ziffern mit dem gleichen Stellenwert immer genau untereinander stehen. Diese werden dann einzeln addiert. Dabei wird immer mit der Einer-Stelle (E) begonnen.

25 + 17 addiert man dann folgendermaßen:

```
  2Z  5E
+ 1Z  7E
  ------
  3Z 12E = 4Z 2E = 42
```

Das Beispiel zeigt, dass es bei der Addition der Einerziffern 5 und 7 zu einem so genannten Übertrag in die Zehnerstelle kommt:

Man sagt: "5 plus 7 ist 12, daher 1 weiter".

Der Übertrag wird dann zu der Summe der Zehnerziffern dazugezählt.
Man sagt: "2 plus 1 ist 3, und 1 ist 4".

Beispiele *ohne* Stellen-Übertrag:

```
135 + 23 = ?       H  Z  E
                  --------
                   1  3  5
                 +    2  3
                  --------
                   1  5  8
```

```
215 + 483 = ?     H  Z  E
                 --------
                  2  1  5
                + 4  8  3
                 --------
                  6  9  8
```

Beispiele *mit* Stellen-Übertrag (Ü). Bei den Überträgen wandern immer Einheiten von einer Stelle zur benachbarten Stelle.

```
135 + 27 = ?      H  Z  E
                 --------
                  1  3  5
                +    2  7
                 --------
                  1  6  2
                       1Ü
```

Man sagt:
"5 und 7 ist 12, 1 weiter. 3 und 2 ist 5 und 1 ist 6. 1 und 0 ist 1."

```
368 + 159 = ?     H  Z  E
                 --------
                  3  6  8
                + 1  5  9
                 --------
                  5  2  7
                    1Ü 1Ü
```

Man sagt:
"8 und 9 ist 17, 1 weiter. 6 und 5 ist 11 und 1 ist 12, 1 weiter."
"3 und 1 ist 4 und 1 ist 5."

Beim schriftlichen Addieren kann der Übertrag angeschrieben werden oder man addiert OHNE Anschreiben des Übertrags, was bei einiger Übung gelingen sollte.

```
  3 5          35
+ 2 4         +24
-----         ----
  5 9          59

  2 5          25
+ 1 7         +17
-----         ----
  4 2          42
   1Ü

  6 2          62
+ 9 5         +95
-----         ----
1 5 7         157
 1Ü

  5 9          59
+ 7 6         +76
-----         ----
1 3 5         135
 1Ü1Ü

2 1 7         217
+ 9 7         +97
-----         ----
3 1 4         314
 1Ü1Ü

  8 3 5       835
+ 1 9 5      +195
-------      ----
1 0 3 0      1030
 1Ü1Ü1Ü
```

(3) Die Geometrie der Zahlen

Der Zahlenstrahl

Die natürlichen Zahlen { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... } dienen in erster Linie zum Abzählen von Gegenständen oder Ereignissen. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit N bezeichnet. Sie beginnt mit der Zahl 0 (Null) und kann dann beliebig fortgesetzt werden, weil es zu jeder Zahl einen Nachfolger gibt.

Ordnet man jeder natürlichen Zahl einen Punkt auf einer Geraden in der Zeichenebene zu, dann erhält man gleichweit entfernte Punkte auf einer halben Geraden, welche auch Zahlenstrahl genannt wird.

```
                                        a       b
.   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .
______________________________________________________________________

0   1   2   3   4   5   6   7
```

Eine bestimmte Zahl a ist dann kleiner als eine zweite Zahl b, wenn sie auf dem Zahlenstrahl links von der zweiten Zahl liegt. Dadurch sind die Zahlen entsprechend ihrer Größe geordnet.

Kleiner, Gleich, Größer

Für zwei Zahlen a und b gibt es genau drei Möglichkeiten:

(1) a ist kleiner als b. Man schreibt $a < b$.
(2) a ist gleich b. Man schreibt $a = b$.
(3) a ist größer als b. Man schreibt $a > b$.

$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$

$56 < 101$
$2108 < 2345$
$87 > 13$
$345 > 299$

Die Zahlenpfeile

Betrachten wir den Punkt "0" am linken Rand des Zahlenstrahls. Wir wollen ihn Ursprung "0" nennen. Wir zeichnen nun einen Pfeil von diesem Ursprung "0" zum Punkt "4". Dadurch erhalten wir die so genannte Pfeildarstellung der Zahl "4". Die Länge dieses Zahlenpfeiles beträgt genau 4 Einheiten.

Der Zahlenpfeil "4":

```
  4
------------>
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
```

Der Zahlenpfeil "7":

```
          7
--------------------->
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
```

Der Pfeilanfang heißt immer "Fuß" des Pfeiles und die Pfeilspitze nennt man "Kopf" des Pfeiles.

Der Zahlenpfeil "12":

```
                   12
------------------------------------>
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
```

Der Pfeilanfang heißt immer "Fuß" des Pfeiles und die Pfeilspitze nennt man "Kopf" des Pfeiles.

Die Pfeiladdition

Sowie man zwei Zahlen addieren kann, ist es auch möglich ihre Pfeile zu addieren.

Wenn wir die Zahlenpfeile "4" und "3" addieren wollen, müssen wir den Fuß von "3" auf den Kopf von "4" stellen. Dadurch erhalten wir dann den Zahlenpfeil "7", der beim Ursprung "0" beginnt und beim Punkt "7" endet.

Beispiel: 4 + 3 = 7

```
          7
--------------------->
                3
            --------->
      4
------------>
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
```

Beispiel: 5 + 7 = 12

```
                 12
----------------------------------->
                       7
            ----------------------->
      5
------------>
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15
```

Die Addition von Zahlenpfeilen erfolgt somit entsprechend der einfachen Pfeilregel: "Fuß des zweiten Pfeiles an den Kopf des ersten Pfeiles".

Die Subtraktion

Gegeben sind zwei Zahlen, beispielsweise 3 und 5.
Welche Zahl muss man zu 3 addieren um 5 zu erhalten ?

Addition: 3 + ? = 5 (Drei plus wieviel ist fünf ?)

Die gesuchte Zahl ist 2.
Man nennt sie die Differenz von 5 und 3.
Man schreibt 5 - 3 = 2.
Man sagt "*5 minus 3 ist 2*".
Diese Rechnung heißt Subtraktion.
Die erste Zahl (5) heißt Minuend.
Die zweite Zahl (3) heißt Subtrahend.

Subtraktion: 5 - 3 = 2

Hinweis: Man kann keine größere Zahl von einer kleineren Zahl subtrahieren. So ist beispielsweise 3 - 5 nicht möglich, weil die Frage 5 + ? = 3 nicht beantwortet werden kann.

Schriftliche Subtraktion

Bei größeren Zahlen muss schriftlich subtrahiert werden. Dazu schreiben wir die Zahlen so untereinander, dass Ziffern mit dem gleichen Stellenwert immer genau untereinander stehen. Diese werden dann einzeln subtrahiert. Dabei wird bei der Einer-Stelle begonnen. Beispiele *ohne* Stellen-Übertrag:

49 - 12 = ?

```
   Z E
  ----
   4 9
 - 1 2
  ----
   3 7
```

Man sagt:
"*2 und 7 ist 9. 1 und 3 ist 4.*"

```
77 - 53 = ?      Z E
                ----
                 7 7
               - 2 4
                ----
                 5 3
```

Man sagt:
"*4 und 3 ist 7. 2 und 5 ist 7.*"

Bevor wir uns weiter mit der Subtraktion beschäftigen, wollen folgende Rechnungen betrachten:

6 – 2 = 4
7 – 3 = 4
8 – 4 = 4
9 – 5 = 4
10 – 6 = 4
11 – 7 = 4

Diese Rechnungen zeigen uns, dass die Differenz von zwei Zahlen a – b unverändert bleibt, wenn man beide Zahlen um denselben Wert c vermehrt. a – b = (a + c) – (b + c).

Nun können wir auch Subtraktionen *mit* Stellen-Überträgen (Ü), ausführen, beispielsweise 76 – 29 = ?

```
  7 6       7Z 6E       7Z 16E
- 2 9     - 2Z 9E     - 3Z  9E
  ---       -----       ------
  ? ?        ?  ?       4Z  7E
                           1Ü
```

Weil an der Einer-Stelle die Subtraktion 6 – 9 nicht möglich ist, vermehren wir 76 und 29 um 10 (1Z). Das ergibt 29 + 1Z = 3Z 9E und 76 + 1Z = 8Z 6E = 7Z 16E. Dabei hat sich die Differenz nicht geändert. Jedoch kann die Subtraktion jetzt ausgeführt werden, weil 76 – 29 = 7Z 16E – 3Z 9E = 4Z 7E = 47.

Man sagt: "*9 und 7 ist 16, 1 weiter. 2 und 1 ist 3. 3 und 4 ist 7.*"

Noch eine Subtraktion *mit* Übertrag (Ü): 83 - 54 = ?

```
  8 3       8Z 3E      8Z 13E
- 5 4     - 5Z 4E    - 6Z  4E
  ---       -----      ------
  ? ?        ?  ?      2Z  9E
                          1Ü
```

Kurze Schreibweise:

```
  8 3
- 5 4
  ---
  2 9
   1Ü
```

Man sagt: "*4 und 9 ist 13, 1 weiter. 5 und 1 ist 6. 6 und 2 ist 8.*"

Beim schriftlichen Subtrahieren kann der Übertrag angeschrieben werden, oder man subtrahiert OHNE Anschreiben des Übertrags.

```
   3 5        35
 - 1 7       -17
 -----      ----
   1 8        18
    1Ü
```

Man sagt: "*7 und 8 ist 15, 1 weiter. 1 und 1 ist 2. 2 und 1 ist 3.*"

```
   6 2        62
 - 3 5       -35
 -----      ----
   2 7        27
    1Ü
```

Man sagt: "*5 und 7 ist 12, 1 weiter. 3 und 1 ist 4. 4 und 2 ist 6.*"

```
   7 9        79
 - 5 6       -56
 -----      ----
   2 3        23
    0Ü
```

Man sagt: "*6 und 3 ist 9, 0 weiter. 5 und 0 ist 5. 5 und 2 ist 7.*"

Noch ein Beispiel *mit* Stellen-Übertrag (Ü): 563 - 187 = ?

```
                                        1. Schritt      2. Schritt

   5 6 3       5H 6Z 3E      5H 6Z 13E      5H 16Z 13E
 - 1 8 7     - 1H 8Z 7E    - 1H 9Z  7E    - 2H  9Z  7E
   -----       --------      ---------      ----------
   ? ? ?       ?  ?  ?        ?  ?  6E      3H  7Z  6E
                                   1Ü           1Ü  1Ü
```

1. Schritt:

Weil an der Einer-Stelle die Subtraktion 3 - 7 nicht möglich ist, muss ein Übertrag der Einer-Stelle durchgeführt werden.
Man sagt: "*7 und 6 ist 13, 1 weiter. 8 und 1 ist 9.*"

2. Schritt:

Weil an der Zehner-Stelle die Subtraktion 6 - 9 nicht möglich ist, muss ein Übertrag der Zehner-Stelle durchgeführt werden.
Man sagt: "*9 und 7 ist 16, 1 weiter. 1 und 1 ist 2. 2 und 3 ist 5.*"

Beim schriftlichen Subtrahieren kann der Übertrag angeschrieben werden, oder man subtrahiert OHNE Anschreiben des Übertrags.

```
    5  6  3          563
  - 1  8  7         -187
  ---------        -----
    3  7  6          376
      1Ü 1Ü
```

Man sagt:
"*7 und 6 ist 13, 1 weiter. 8 und 1 ist 9.*"
"*9 und 7 ist 16, 1 weiter. 1 und 1 ist 2. 2 und 3 ist 5.*"

Die Multiplikation

Betrachten wir nun eine Addition von lauter gleichen Zahlen,
beispielsweise 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10.

Statt 2 + 2 + 2 + 2 + 2 kann man 5 * 2 ("5 Mal 2") schreiben und nennt das eine Multiplikation. Das Ergebnis 10 heißt das Produkt.

Die Multiplikation ist nichts Anderes als die Addition von lauter gleichen Zahlen. Die Multiplikation mit Null ergibt immer Null.
Als Multiplikationszeichen wird ein Kreuz **x** oder ein Stern ***** verwendet. Die beiden multiplizierten Zahlen heißen Faktoren.

Multiplikation: 5 * 2 = 10

Beispiele:

0 * 2 = 0
1 * 2 = 2
2 * 2 = 2 + 2 = 4
3 * 2 = 2 + 2 + 2 = 6
4 * 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8
5 * 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10

0 * 3 = 0
1 * 3 = 3
2 * 3 = 3 + 3 = 6
3 * 3 = 3 + 3 + 3 = 9
4 * 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12
5 * 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15

0 * 4 = 0
1 * 4 = 4
2 * 4 = 4 + 4 = 8
3 * 4 = 4 + 4 + 4 = 12
4 * 4 = 4 + 4 + 4 + 4 = 16
5 * 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20

Die Multiplikation mit einer einstelligen Zahl

57 * 6 =

```
= (      5Z  7E) * 6
= (     30Z 42E)
          ┌───┘
= (     34Z  2E)        Übertrag von 40E = 4Z
      ┌───┘
= ( 3H  4Z  2E)         Übertrag von 30Z = 3H
```

= 342

```
    5   7   *   6
-------
3   4   2
  3Ü  4Ü
```

Man multipliziert dabei - mit der Einerstelle (E) beginnend - jede Ziffer von 57 mit der Zahl 6. Die Überträge addiert man dann schrittweise zur nächst höheren Stelle !

284 * 3 =

```
= ( 2H  8Z  4E) * 3
= ( 6H 24Z 12E)
          ┌───┘
= ( 6H 25Z  2E)     Übertrag von 10E = 1Z
      ┌───┘
= ( 8H  5Z  2E)     Übertrag von 20Z = 2H
```

= 852

```
2   8   4   *   3
-------
8   5   2
   2Ü  1Ü
```

Man multipliziert dabei - mit der Einerstelle (E) beginnend - jede Ziffer von 284 mit der Zahl 3. Die Überträge addiert man dann schrittweise zur nächst höheren Stelle !

Die Multiplikation mit einer zweistelligen Zahl

286 * 34 =

Wir zerlegen 34 in (30 + 4) = (3Z 4E).
Zuerst multiplizieren wir 286 mit 3Z, das ist 858Z = 8580.
Dann multiplizieren wir 286 mit 4E, das ist 1144E = 1144.
Zuletzt addieren wir beide Werte.
(Unbedingt Überträge beachten.)

286 * (3Z 4E) =

```
  2 8 6   * (3Z 4E)
  -----------------
  8 5 8 0               Zehner-Zeile (Z)
+ 1 1 4 4                Einer-Zeile (E)
  -----------------
= 9 7 2 4             Ergebnis-Zeile
```

= 9724

1548 * 42 =

Wir zerlegen 42 in (40 + 2) = (4Z 2E).
Zuerst multiplizieren wir 1548 mit 4Z, das ist 6192Z = 61920.
Dann multiplizieren wir 1548 mit 2E, das ist 3096E = 3096.
Zuletzt addieren wir beide Werte.
(Unbedingt Überträge beachten.)

1548 * (4Z 2E) =

```
   1 5 4 8   * (4Z 2E)
   -------------------
   6 1 9 2 0              Zehner-Zeile (Z)
 +   3 0 9 6               Einer-Zeile (E)
   -------------------
 = 6 5 0 1 6             Ergebnis-Zeile
```

= 65016

Beispiele von Multiplikationen:

Mögliche Überträge werden nicht angeschrieben,
sondern im Kopf richtig ausgerechnet !

```
  2 3  * 59
-----------
1 1 5 0       Zehnerzeile
  2 0 7       Einerzeile
-----------
1 3 5 7       Ergebniszeile = Zehnerzeile + Einerzeile

  4 0 5  * 78
-------------
2 8 3 5 0     Zehnerzeile
  3 2 4 0     Einerzeile
-------------
3 1 5 9 0     Ergebniszeile = Zehnerzeile + Einerzeile
```

Die Division

Gegeben sind zwei Zahlen, beispielsweise 2 und 7.
Wie oft ist die Zahl 2 in der Zahl 7 enthalten ?

Wir lösen das Problem, indem wir 2 von 7 so lange wie möglich subtrahieren:

7 - 2 = 5
5 - 2 = 3
3 - 2 = 1

Also ist 2 in 7 genau **3** Mal enthalten und es bleibt **1** als Rest.

Man nennt die gesuchte Zahl 3 den Quotient von 7 und 2. Der Rest ist 1.
Man sagt dazu "*7 dividiert durch 2 ergibt 3 mit Rest 1*".

Diese Operation heißt Division.
Als Divisionszeichen werden der Schrägstrich **/** oder der Doppelpunkt **:** verwendet. Die Zahl 7 heißt Dividend und die Zahl 2 heißt Divisor.
Der Rest ist immer kleiner als der Divisor.

Division 7 : 2 = 3, Rest 1

Gegeben sind zwei Zahlen, beispielsweise 3 und 14.
Wie oft ist die Zahl 3 in der Zahl 14 enthalten ?

Wir lösen das Problem, indem wir 3 von 14 so lange wie möglich subtrahieren:

14 - 3 = 11
11 - 3 = 8
8 - 3 = 5
5 - 3 = 2

Also ist 3 in 14 genau **4** Mal enthalten und es bleibt **2** als Rest.

Division 14 : 3 = 4, Rest 2

Man kann die Division mit einer Multiplikation überprüfen: 14 = 4 * 3 + 2,
d.h. Dividend = Quotient * Divisor + Rest.

Ein Sonderfall liegt dann vor, wenn der Rest 0 ist, wie bei 6 : 2 = 3. Dann sagt man, dass der Divisor den Dividenden teilt. (2 ist ein Teiler von 6).

Beispiele:

5 : 2 = 2 mit Rest 1
6 : 3 = 2 mit Rest 0
9 : 2 = 4 mit Rest 1
11 : 3 = 3 mit Rest 2
10 : 5 = 2 mit Rest 0
15 : 4 = 3 mit Rest 3
18 : 3 = 6 mit Rest 0
20 : 6 = 3 mit Rest 2

Will man größere Zahlen dividieren, dann wird folgende schriftliche Methode verwendet. Beispiel 325 : 7 = ?

```
  7                                    (1) Stellenwert-Zeile
 325 : 7 = 4Z 6E = 46                  (2) Divisions-Zeile
-280                                   (3) 7 * 4Z = 280
----
  45                                   (4) 325 - 280 = 45
 -42                                   (5) 7 * 6E = 42
----
   3 Rest                              (6) 45 - 42 = 3
```

In Zeile (1) wird ermittelt, in welcher Zifferngruppe von 325 die Zahl 7 das erste Mal enthalten ist. In 32 ist 7 dann 4 Mal enthalten. Der Divisor beginnt daher mit der Zehner-Stelle (Z). In Zeile 2 wird die Division angeschrieben.

In Zeile (3) wird das Zwischenprodukt 7 * 4Z = 28Z = 280 gebildet und dann von 325 subtrahiert. Das ergibt den Zwischenrest 45 in Zeile (4).

In Zeile (5) wird ermittelt, wie oft die Zahl 7 im Zwischenrest 45 enthalten ist. Das ist 6 Mal. Nun wird das Zwischenprodukt 7 * 6E = 42 gebildet und zuletzt von 45 subtrahiert. Das ergibt den letzten Rest 3 in Zeile (6).

Beispiel 2675 : 42 = ?

```
  42                               (1) Stellenwert-Zeile
 2675 : 42 = 6Z 3E = 63            (2) Divisions-Zeile
-2520                              (3) 42 * 6Z = 2520
-----
  155                              (4) 2675 - 2520 = 155
 -126                              (5) 42 * 3E = 126
-----
   29 Rest                         (6) 155 - 126 = 29
```

In Zeile (1) wird ermittelt, in welcher Zifferngruppe von 2675 die Zahl 42 das erste Mal enthalten ist. In 267 ist 42 dann 6 Mal enthalten. Der Divisor beginnt daher mit der Zehner-Stelle (Z). In Zeile 2 wird die Division angeschrieben.

In Zeile (3) wird das Zwischenprodukt 42 * 6Z = 252Z = 2520 gebildet und dann von 2675 subtrahiert. Das ergibt den Zwischenrest 155 in Zeile (4).

In Zeile (5) wird ermittelt, wie oft die Zahl 42 im Zwischenrest 155 enthalten ist. ist. Das ist 3 Mal. Nun wird das Zwischenprodukt 42 * 3E = 126 gebildet und zuletzt von 155 subtrahiert. Das ergibt den letzten Rest 29 in Zeile (6).

Beispiele von Divisionen:

```
  85
 23207 : 85 = 2H 7Z 3E = 273
-17000
------
  6207
 -5950
------
   257
  -255
------
     2 Rest          Probe, 23207 = 273 * 85 + 2
```

```
  317
 16484 : 317 = 5Z 2E = 52
-15850
------
   634
  -634
------
     0 Rest          Probe, 16484 = 52 * 317 + 0
```

Sehr oft wird das hier beschriebene Divisions-Verfahren abgekürzt. Die Zwischenprodukte und die Subtraktionen werden dabei nicht angeschrieben, sondern im Kopf durchgeführt. Es werden nur die Zwischenreste angeschrieben.

Abgekürztes Divisionsverfahren. Beispiel 23207 : 85 = ?

```
  85                         (1) Stellenwertbestimmung
 23207 : 85 = 273            (2) Divisions-Zeile
  620                        (3) Zwischenrest
   257                       (4) Zwischenrest
     2 R                     (5) Letzter Rest
```

Man sagt:

2 mal 5 ist 10 und 2 ist 12, 1 weiter.
2 mal 8 ist 16 und 1 ist 17, und 6 ist 23.
Nächste Stelle 0 herab.

7 mal 5 ist 35 und 5 ist 40, 1 weiter.
7 mal 8 ist 56 und 4 ist 60, und 2 ist 62.
Nächste Stelle 7 herab.

3 mal 5 ist 15 und 2 ist 17, 1 weiter.
3 mal 8 ist 24 und 1 ist 25, und 0 ist 25.
Bleibt 2 Rest.

Beispiele für das abgekürzte Divisionsverfahren:

```
 8
173 : 8 = 21
 13
  5 R

Probe, 173 = 21 * 8 + 5

32
401 : 32 = 12
 81
 17 R

Probe, 401 = 12 * 32 + 17

67
6901 : 67 = 103
 20
 201
   0 R

Probe, 6901 = 103 * 67 + 0

 72
2935 : 72 = 40
  55
  55 R

Probe, 2935 = 40 * 72 + 55

 42
26759 : 42 = 637
 155
  299
    5 R

Probe, 26759 = 637 * 42 + 5
```

(7) Die Rechenregeln

Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen werden folgende Regeln festgesetzt:

[01] Grundsätzlich wird von links nach rechts gerechnet
5 + 3 - 2 - 4 = 8 - 2 - 4 = 6 - 4 = 2
[02] Punktrechnungen haben Vorrang vor Strichrechnungen
2 + 3*4 = 2 + 12 = 14
[03] Rechnungen in Klammern werden zuerst durchgeführt
(2 + 3) * 4 = 5 * 4 = 20

Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen können weitere Gesetze direkt bewiesen werden.

[04] Vertauschungsgesetz der Addition: a + b = b + a
[05] Verbindungsgesetz der Addition: (a + b) + c = a + (b + c)
[06] Vertauschungsgesetz der Multiplikation: a * b = b * a
[07] Verbindungsgesetz der Multiplikation: (a * b) * c = a * (b * c)
[08] Verteilungsgesetz: a * (b + c) = a * b + a * c

Vertauschungsgesetz der Addition: a + b = b + a
2 + 3 = II + III = IIIII = 5
3 + 2 = III + II = IIIII = 5

Verbindungsgesetz der Addition: (a + b) + c = a + (b + c)
(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9
2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9

Vertauschungsgesetz der Multiplikation: a * b = b * a
3 * 2 = 2 + 2 + 2 = 6
2 * 3 = 3 + 3 = 6

Verbindungsgesetz der Multiplikation: (a * b) * c = a * (b * c)
(2 * 3) * 4 = 6 * 4 = 24
2 * (3 * 4) = 2 * 12 = 24

Verteilungsgesetz: a * (b + c) = a * b + a * c
2 * (3 + 4) = 2 * 7 = 14
2 * 3 + 2 * 4 = 6 + 8 = 14