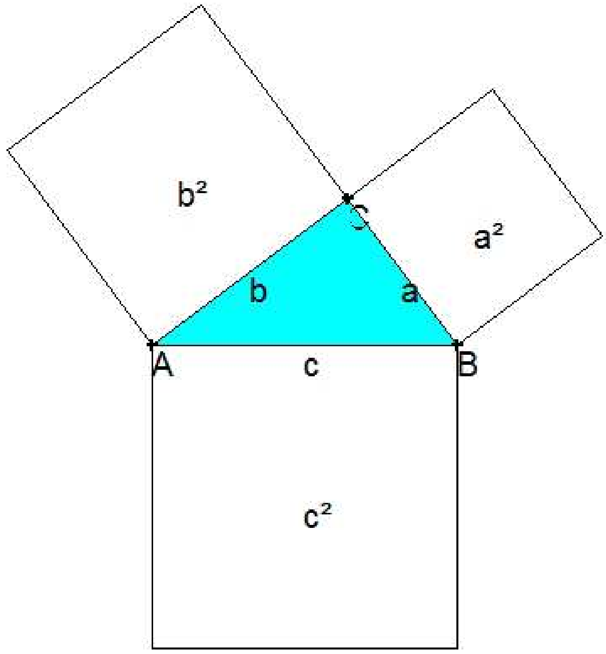
Der LEHRSATZ von PYTHAGORAS und seine ANWENDUNGEN

Version 2.0 © Herbert Paukert

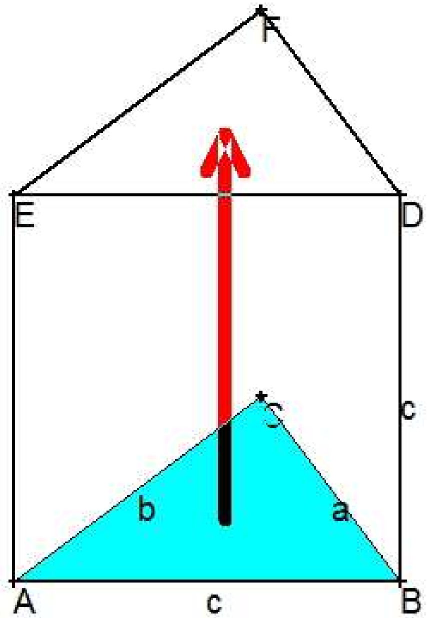
Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

Der Lehrsatz von Pythagoras:

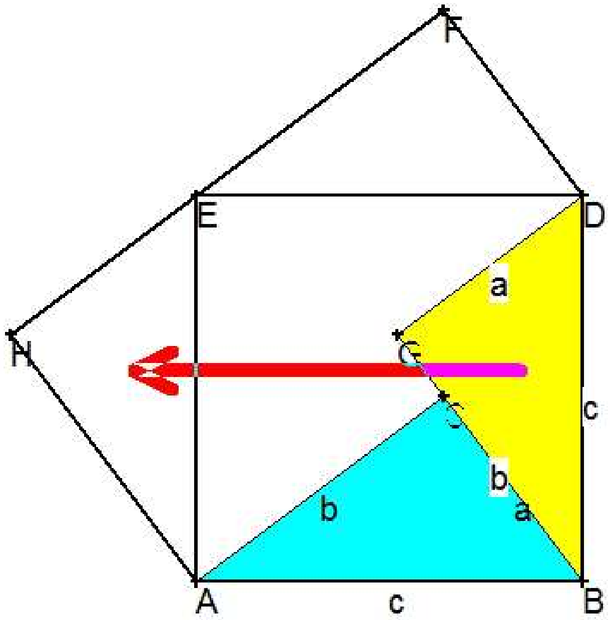
In allen rechtwinkeligen Dreiecken ABC gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.



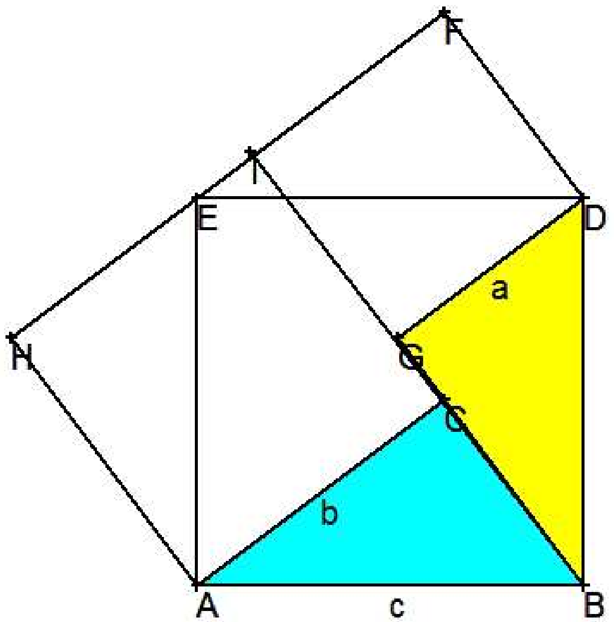
Ein Beweis des Lehrsatzes



(1) Rechtwinkeliges Dreieck ABC zeichnen.
(2) Quadrat ABDE mit Seitenlänge c zeichnen.
(3) Verschieben von Dreieck ABC auf Dreieck EDF.



(1) Rechtwinkeliges Dreieck ABC zeichnen.
(2) Quadrat ABDE mit Seitenlänge c zeichnen.
(3) Verschieben von Dreieck ABC auf Dreieck EDF.
(4) Dreieck BDG (kongruent zu ABC) zeichnen.
(5) Verschieben von Dreieck BDG auf Dreieck AEH.



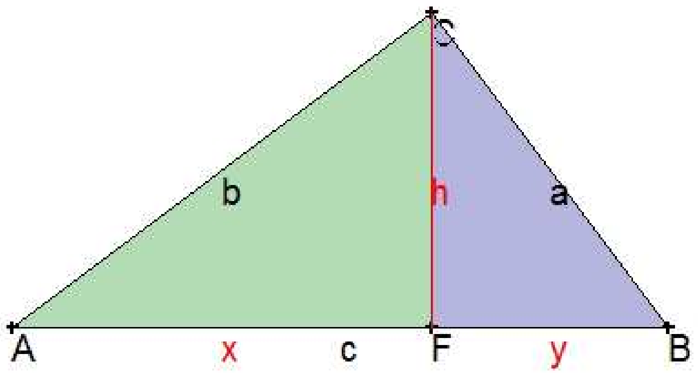
Durch die zwei verschobenen Dreiecke ABC und BDG entsteht aus dem Quadrat ABDE (c^2) die flächengleiche Figur ACGDFH, die aus den Quadraten ACIH (b^2) und GDFI (a^2) besteht.

Also gilt der Hauptsatz: $c^2 = a^2 + b^2$.

Kathetensatz und Höhensatz

Haupsatz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Neben dem Hauptsatz gibt es noch zwei andere Lehrsätze, den "Kathetensatz" und den "Höhensatz".



Einfache Vorbemerkung zum Beweis der zwei Lehrsätze:

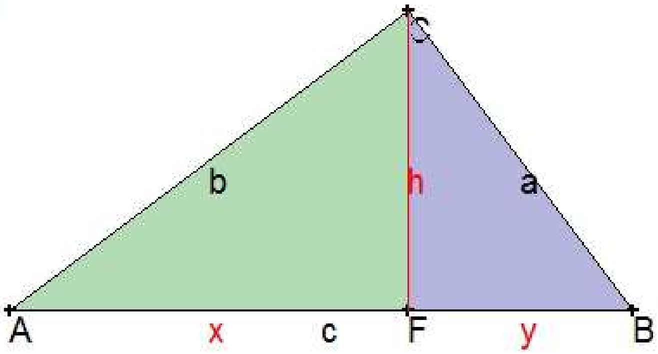
Das rechtwinkelige Dreieck ABC wird durch die Höhe h in zwei Teildreiecke ACF und CBF zerlegt. Die zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, weil die entsprechenden Winkel gleich groß sind.
Der Seite c im großen Dreieck ABC entspricht die Seite b im kleinen Dreieck ACF, bzw. der Seite a im anderen kleinen Dreieck CBF.

Ein Beweis der Lehrsätze

Der Kathetensatz

$a^2 = c * y$

$b^2 = c * x$

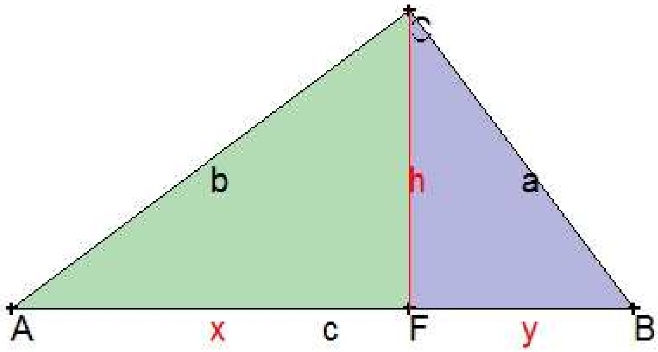


Weil das Dreieck ABC ähnlich zum Dreieck CBF ist, müssen in beiden Dreiecken die entsprechenden Seitenverhältnisse gleich groß sein, d.h. AB : BC = BC : FB, also $c : a = a : y$. Durch eine einfache Umformung erhält man: $a^2 = c * y$ (Erster Kathetensatz).

Führt man den selben Beweis mit den Dreiecken ABC und ACF durch, erhält man die Formel $b^2 = c * x$ (Zweiter Kathetensatz).

Der Höhensatz

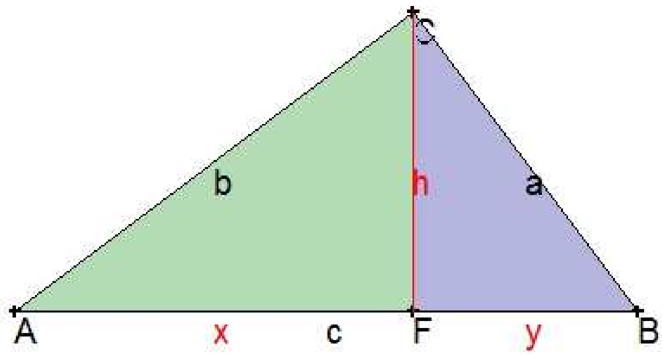
$h^2 = x * y$



Wenn man die beiden Teildreiecke ACF und CBF genauer betrachtet, wird man erkennen, dass auch diese Dreiecke ähnlich sind, weil die entsprechenden Winkel gleich groß sind. Also müssen auch die entsprechenden Seitenverhältnisse in beiden Dreiecken gleich groß sein: FC : AF = BF : FC oder $h : x = y : h$. Durch einfache Umformung erhält man daraus

die Formel $h^2 = x * y$ (Höhensatz).

Die drei Lehrsätze des Pythagoras
(Zusammenfassung)



Der Hauptsatz

Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten: $c^2 = a^2 + b^2$

Der Kathetensatz

Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkt aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt: $a^2 = c * y$ und $b^2 = c * x$

Der Höhensatz

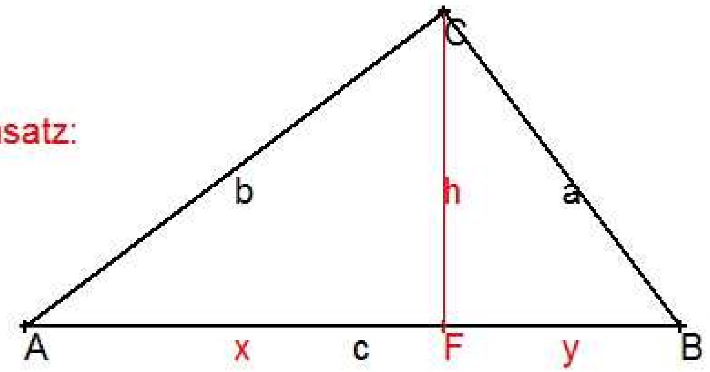
Das Quadrat der Höhe ist gleich dem Produkt aus den beiden Hypotenusenabschnitten: $h^2 = x * y$, mit $c = x + y$.

Das rechtwinkelige Dreieck

Haupsatz von Pythagoras:
$c^2 = a^2 + b^2$

Die Kathetensätze:
$a^2 = c * y$
$b^2 = c * x$

Der Höhensatz:
$h^2 = x * y$



Von einem rechtwinkeligen Dreieck kennt man die Katheten $a = 6$ cm und $b = 8$ cm.

Berechne:

(1) die Hypotenuse c
(2) die zwei Abschnitte x und y
(3) die Höhe h

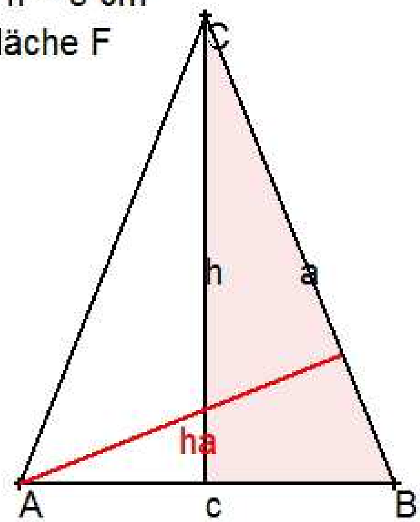
Lösung:

Seite c = 10 cm
Abschnitt x = 6.4 cm
Abschnitt y = 3.6 cm
Höhe h = 4.8 cm

Das gleichschenkelige Dreieck

Das gleichschenkelige Dreieck

Gegeben: c = 4 cm, hc = h = 5 cm
Gesucht : Höhe ha = x, Fläche F

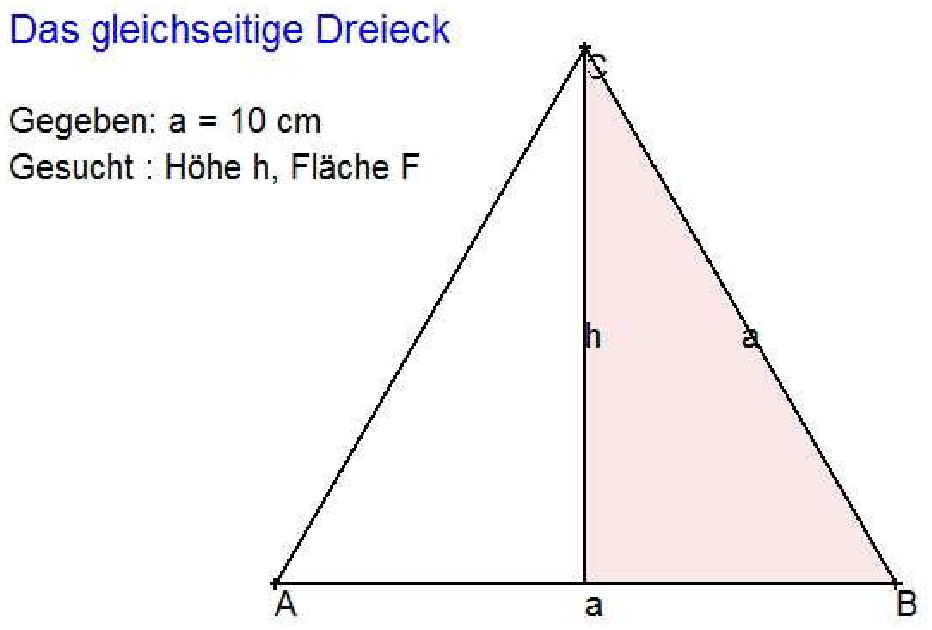


(1) Aus dem gefärbten rechtwinkeligen Dreieck a ausrechnen
(2) Die Fläche ausrechnen: F = c * h / 2
(3) Zuletzt aus der Fläche F die Höhe ha = x ausrechnen

<u>Lösung:</u>

Seite a = 5.39 cm
Fläche F = 10 cm²
Höhe ha = 3.71 cm

Das gleichseitige Dreieck



Zuerst die Höhe h und dann die Fläche F ausrechnen.
Dabei gilt: h = a/2*sqrt(3) und F = a²/4*sqrt(3).

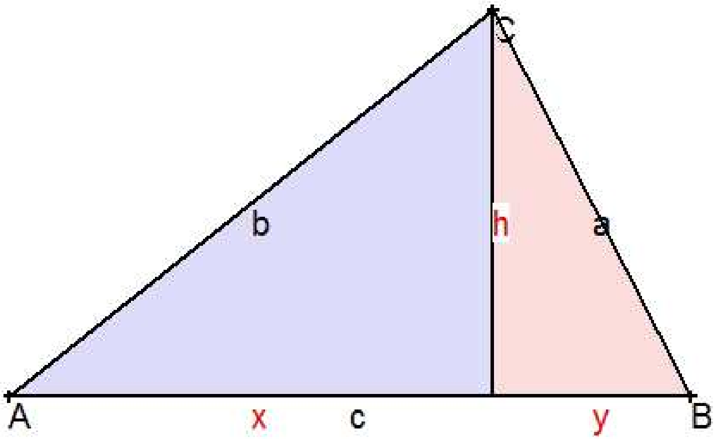
<u>Lösung:</u>

Höhe h = 8.66 cm
Fläche F = 43.30 cm²

Das ungleichseitige Dreieck

Das ungleichseitige Dreieck

Gegeben: $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 11$ cm
Gesucht : Höhe h und Fläche F



Seite c wird in die Teile x und y zerlegt und mithilfe der Gleichungen (1),(2),(3) die Höhe h schrittweise berechnet.

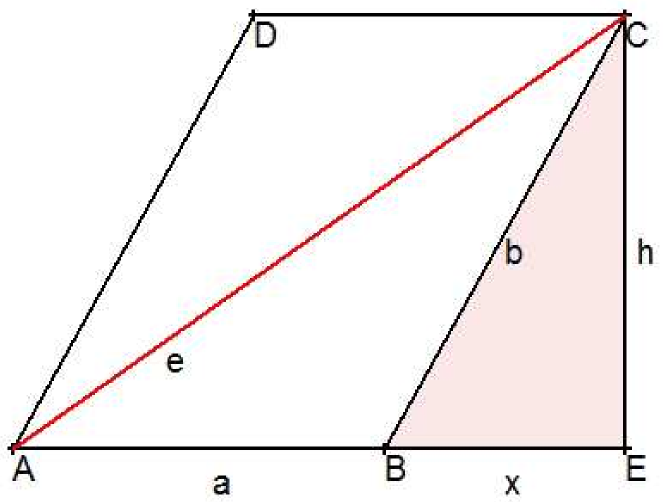
(1): $h^2 = b^2 - x^2$
(2): $h^2 = a^2 - y^2$
(3): $x + y = c$
Daraus folgt: $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$
Daraus folgt nach Umformung:
$x = (c^2 + b^2 - a^2) / (2*c)$
Damit kann aus (1) die Höhe h berechnet werden.
$h = \mathrm{sqrt}(b^2 - x^2)$ und $F = c*h/2$.

Lösung:

Strecke $x = 7.82$ cm
Höhe $h = 6.24$ cm
Fläche $F = 34.29\ \mathrm{cm}^2$

Das Parallelogramm

Parallelogramme



Gegeben: a = 6 cm, b = 8 cm, h = 7 cm
Gesucht : Diagonale e und Fläche F

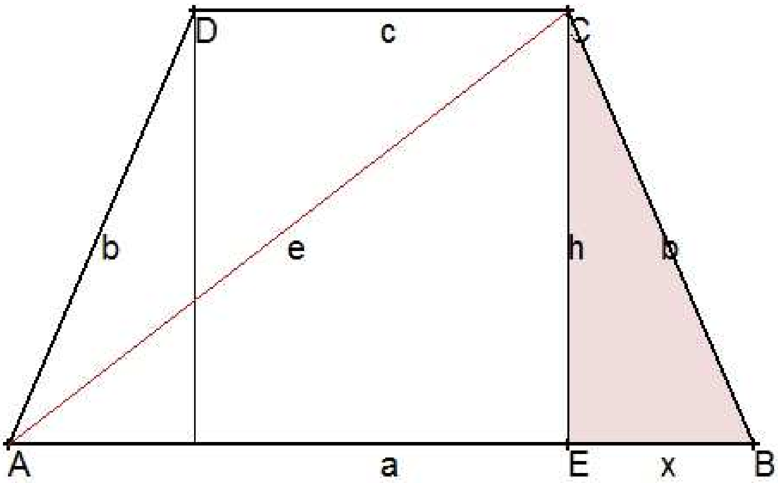
(1) Strecke x ausrechnen
(2) Aus Dreieck AEC die Diagonale e ausrechnen
(3) Die Fläche F = a * h ausrechnen

Lösung:

Strecke x = 3.87 cm
Diagonale e = 12.10 cm
Fläche F = 42.00 cm²

Das gleichschenkelige Trapez

Das gleichschenkelige Trapez



Gegeben: $a = 12$ cm, $c = 6$ cm, $h = 7$ cm
Gesucht : Seite b, Diagonale e, Fläche F

(1) Strecke x ausrechnen
(2) Aus Dreieck EBC die Seite b ausrechnen
(3) Aus Dreieck AEC die Diagonale e ausrechnen
(4) Die Fläche $F = h * (a + c)/2$ ausrechnen

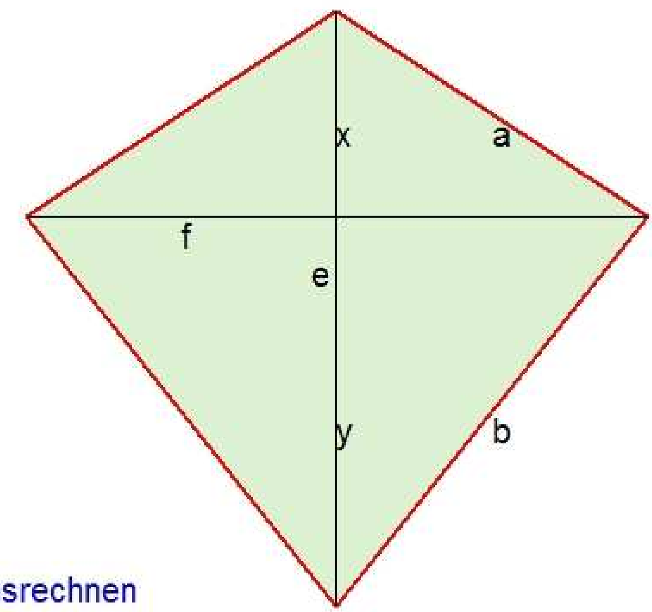
<u>Lösung:</u>

Strecke x = 3.00 cm
Seite b = 7.62 cm
Diagonale e = 11.40 cm
Fläche F = 63.00 cm²

Das Deltoid

Drachenvierecke

Gegeben: Seiten a = 6 cm, b = 8 cm
und Diagonale f = 10 cm
Gesucht : Diagonale e und Fläche F

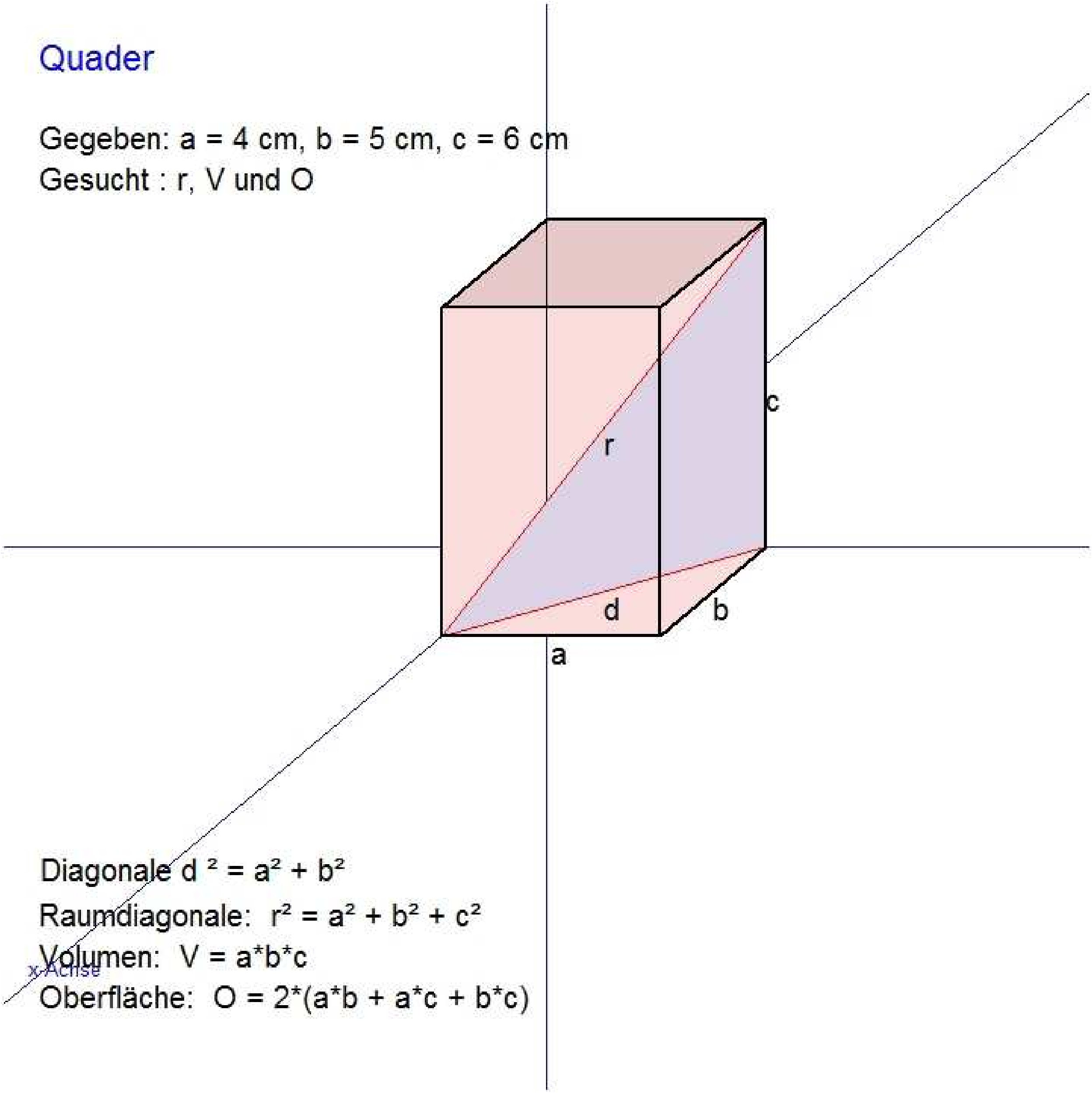


(1) Strecke x ausrechnen
(2) Strecke y ausrechnen
(3) Diagonale e ausrechnen
(4) Fläche F ausrechnen

Lösung:

Diagonale e = 9.56 cm
Fläche F = 47.81 cm²

Der Quader



Lösung:

Volumen V = 120.00 cm³
Oberfläche O = 148.00 cm²
Raumdiagonale r = 8.77 cm

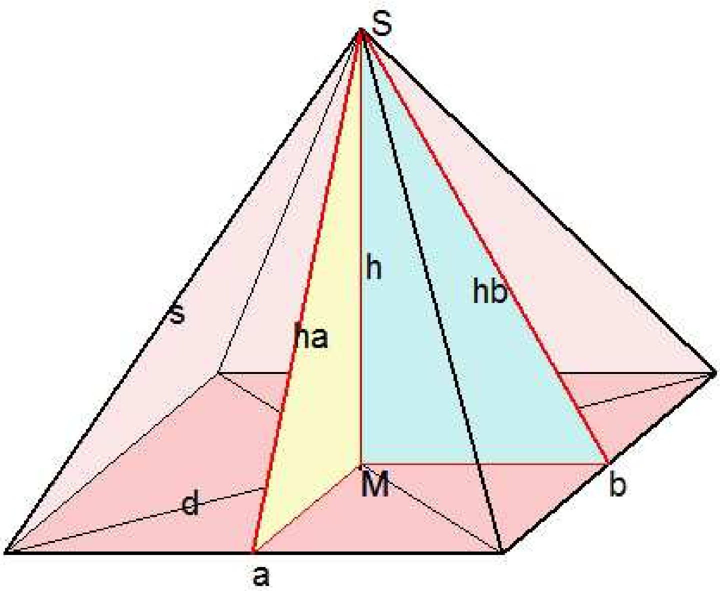
Die Pyramide

Rechteckige Pyramide

Gegeben: $a = 8$ cm, $b = 9$ cm, $h = 7$ cm

$d^2 = a^2 + b^2$
$s^2 = (d/2)^2 + h^2$
$ha^2 = x^2 = (b/2)^2 + h^2$
$hb^2 = y^2 = (a/2)^2 + h^2$

$G = a*b$
$V = G*h/3$
$O = G + a*ha + b*hb$



Gesucht: V, O und s.

<u>Lösung:</u>

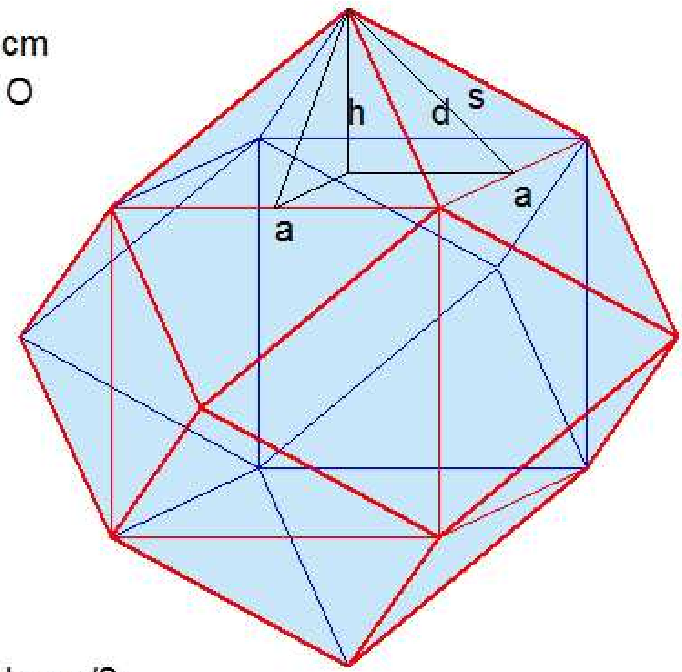
Volumen $V = 168.00$ cm³
Oberfläche $O = 211.13$ cm²
Seitenkante $s = 9.23$ cm

Der Rhombendodekaeder

Rhomben-Dodekaeder

Ein Würfel mit sechs aufgesetzten quadratischen Pyramiden,
deren Höhen h gleichlang wie die halbe Würfelkante a sind.
Der Körper wird dadurch von zwölf Rhombenflächen begrenzt.

Gegeben: a = 6 cm
Gesucht : V und O



Pyramidenhöhe h = a/2
Seitenkante s = a*sqrt(3)/2
Seitenhöhe d = a*sqrt(2)/2
Volumen $V = 2*a^3$
Oberfläche $O = 6*a^2*sqrt(2)$

<u>Lösung:</u>

Volumen V = 432 cm^3
Oberfläche O = 305.47 cm^2