REIHENENTWICKLUNGEN

Eine kurze Einführung © Herbert Paukert

[1] Reihen mit konstanten Gliedern

Gegeben sei eine unendliche Zahlenfolge { a_k }. Wir bilden nun die Summe der ersten n Glieder und bezeichnen sie als n-te Teilsumme s_n. $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$.
Die Folge dieser Teilsummen $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ wird als REIHE { s_n } bezeichnet.
Die Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert s, wenn die Folge der Teilsummen gegen s konvergiert. Man schreibt dann SUM(a_n) = s = lim s_n für n gegen Unendlich.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = s_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \text{SUM}(a_n) = s$$

Für den Grenzwert einer Folge gilt, dass fast alle Glieder (d.h. alle bis auf endlich viele) beliebig nahe beim Grenzwert liegen.

Satz: Wenn eine Reihe { s_n } konvergiert, dann bilden die Glieder a_n eine Nullfolge.
Beweis: s = lim s_n. Für beliebig kleine Längen e und für alle n ab einer Nummer N, d.h. für fast alle n gilt: $| s - s_n | < e$. Es sind $s_n = s_{n-1} + a_n$ und $| s_n - s_{n-1} | < | s - s_n |$.
$| a_n | = | s_n - s_{n-1} | < | s - s_n | < e$. Also wird a_n beliebig klein und bildet eine Nullfolge.

Die Majorante einer Reihe

Wenn für fast alle Glieder a_n einer Reihe gilt $| a_n | \leq | b_n |$, dann nennt man die Reihe { b_n } eine Majorante von { a_n }. Wegen $| a_n | \leq | b_n |$ gilt auch SUM(a_n) ≤ SUM(b_n).
Daraus folgt: Wenn eine Majorante einen Grenzwert hat, dann hat auch die Reihe einen Grenzwert und heißt konvergent (Majorantenkriterium).

Die Minorante einer Reihe

Wenn für fast alle Glieder a_n einer Reihe gilt $| a_n | \geq | b_n |$, dann nennt man die Reihe { b_n } eine Minorante von { a_n }. Wegen $| a_n | \geq | b_n |$ gilt auch auch SUM(a_n) ≥ SUM(b_n).
Daraus folgt: Wenn eine Minorante keinen Grenzwert hat, dann hat auch die Reihe keinen Grenzwert und heißt divergent. (Minorantenkriterium).

Arithmetische Folgen und Reihen

Bei einer arithmetischen Folge { a_k } ist die Differenz d von zwei benachbarten Gliedern immer konstant: $a_{k+1} - a_k = d$. Ist a_1 das Anfangsglied, dann gilt: $a_k = a_1 + (k-1)*d$.
Für die Summe der arithmetischen Reihe s_n gilt:
$s_n = a_1 + (a_1 + 1*d) + (a_1 + 2*d) + . . . + (a_1 + (n-1)*d)$
$s_n = n* a_1 + d*(1+2+3+ . . . +(n-1))$.
Die Summe 1+2+3+.....+(n-1) wird einfach dadurch berechnet, dass fortlaufend k und (n-k) addiert werden. Das ist immer n, und zwar genau (n-1)/2 Mal. Also ist die Summe n*(n-1)/2.

Für die arithmetische Reihe gilt daher:
$\mathbf{s_n = n*a_1 + d*n*(n-1)/2 = (n/2) * [2*a_1 + d*(n-1)]}$
Unendliche arithmetische Reihen sind immer unbeschränkt und streng monoton wachsend und daher divergent.

Beispiel für eine arithmetische Folge: 1, 3, 5, 7, ...
Hier gilt: $a_1 = 1$ und $d = 2$ und $s_n = n/2*(2+2*(n-1)) = n^2$,
d.h. die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2.

Geometrische Folgen und Reihen

Bei einer geometrischen Folge { b_k } ist der Quotient q von zwei benachbarten Gliedern immer konstant: $b_{k+1} / b_k = q$. Ist b_1 das Anfangsglied, dann gilt: $b_k = b_1 * q^{k-1}$.
Für die Summe der geometrischen Reihe s_n gilt:
$s_n = b_1 + (b_1 * q^1) + (b_1 * q^2) + . . . + (b_1 * q^{n-1})$
$s_n = b_1 * (1 + q + q^2 + . . . + q^{n-1}) = b_1 * h$

$$
\begin{aligned}
h &= 1 + q + q^2 + . . . + q^{n-1} \\
q*h &= \quad q + q^2 + . . . + q^{n-1} + q^n \\
h - q*h &= 1 - q^n \\
h &= (1 - q^n) / (1 - q)
\end{aligned}
$$

Für die geometrische Reihe gilt daher:
$\mathbf{s_n = b_1 * (1 - q^n) / (1 - q)}$

Beispiel für eine geometrische Folge: 1, 2, 4, 8, 16, ...

Hier gilt: $b_1 = 1$ und $q = 2$ und $s(n) = 1*(1-2^n)/(1-2)$.

Die Summe der ersten n Zweierpotenzen ist $(2^n - 1)$.

Unendliche geometrische Reihen

Geometrische Reihe $\{ b_k \}$: $b_1 + b_1*q + b_1*q^2 + . . . + b_1*q^n + ...$

Es wurde gezeigt, dass für die n-te Teilsumme s_n einer geometrischen Reihe gilt:

$s_n = b_1* (1 - q^n) / (1 - q)$

Das Konvergenzverhalten der Reihe hängt offensichtlich vom Quotienten q ab.

Wenn $|q| \geq 1$ ist, dann ist die geometrische Reihe unbeschränkt und auch streng monoton wachsend und daher divergent.

Wenn $|q| < 1$ ist, dann kann mit der Teilsummenformel s_n für n gegen Unendlich ein Grenzwert berechnet werden. Für $|q| < 1$ ist die Folge $\{ q^n \}$ eine Nullfolge.

Also gilt: **$\lim s_n = s = b_1 / (1 - q)$** für n gegen Unendlich.

Beispiel für eine geometrische Reihe: 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + . . .

Hier gilt: $b_1 = 1$ und $q = 1/2$. Die Reihe ist daher konvergent

und ihre unendliche Reihensumme ist $s = 1 / (1 - 1/2) = 2$.

Unbedingt sei noch erwähnt, dass geometrische Reihen oft als Majoranten zur Konvergenzermittlung verwendet werden.

Drei Beispiele von besonderen Reihen

R1: $s_n = 1/(1*2) + 1/(2*3) + 1/(3*4) + ... + 1/(n*(n+1))$

$a_n = 1/(n*(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$

$s_n = (1/1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + ... + (1/n - 1/(n+1))$

$s_n = 1 - 1/(n+1)$

$\lim s_n = 1$ für n gegen Unendlich.

Reihe R1 ist konvergent.

R2: s_n = 1 + 1/4 + 1/9 + ... + 1/n²

$a_n = 1/n^2 = 1/(n*n) < 1/((n-1)*n)$

Daher ist die Reihe R1 eine Majorante.

Weil diese konvergiert, konvergiert auch die Reihe R2.

R3: s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n

$s_n = 1 + 1/2 + (1/3+1/4) + (1/5+1/6+1/7+1/8) + (1/9+ .....+1/16) + ...$

$s_n > 1 + 1/2 + (1/4+1/4) + (1/8+1/8+1/8+1/8) + (1/16+ ...+1/16) + ...$

$s_n > 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + ...$

Die so erhaltene Vergleichsreihe ist eine Minorante zur Reihe R3.

Sie ist offensichtlich divergent. So ist auch Reihe R3 divergent.

Das Quotientenkriterium

Satz: Hinreichend für die Konvergenz einer Reihe ist, dass für fast alle Glieder die Bedingung $a_{k+1} / a_k < 1$ gilt.

Beweis: Ab einer Grenznummer N gibt es eine Zahl q derart, dass $a_{k+1} / a_k < q < 1$ für alle k > N gilt. Daraus folgt:

$a_{N+1} < a_N * q$

$a_{N+2} < a_{N+1} * q < a_N * q^2$

$a_{N+3} < a_{N+2} * q < a_{N+1} * q^2 < a_N * q^3$

....

$s_{N+k} = (a1 + a2 + ... + a_N) + (a_{N+1} + a_{N+2} + ... +a_{N+k})$

$s_{N+k} = s_N + (a_{N+1} + a_{N+2} + ... + a_{N+k})$

$s_{N+k} < s_N + (a_N*q + a_N*q^2 + ... + a_N*q^k)$

Daher gibt es zur gegebenen Reihe eine geometrische Reihe als konvergente Majorante, weil q < 1 ist. Nach dem Majorantensatz ist auch die Reihe konvergent.

Umgekehrt gilt, dass eine Reihe divergiert, wenn $a_{k+1} / a_k > 1$ für fast alle k ist.

[2] Potenzreihen

Polynomfunktion n-ten Grades: $f(x) = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + \ldots + a_nx^n$, mit a_k = reell.

$$\sum_{k=0}^{n} a_kx^k = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Unendliche Verlängerung des Polynoms:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n*x^n = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Eine Polynomfunktion von unendlichem Grad heißt Potenzreihe. Die Gesamtheit aller reellen Zahlen x, wo die Potenzreihe einen bestimmten, endlichen Wert f(x) annimmt, heißt Konvergenzbereich. Dort konvergiert die Potenzreihe gegen f(x).

Satz: Wenn eine Potenzreihe an der Stelle x_0 konvergiert, dann konvergiert sie auch an allen Stellen x mit $|x| < |x_0|$.

Bew.: $\sum a_n*x_0^n$ ist eine konvergente Majorante für $\sum a_n*x^n$.

Satz: Wenn eine Potenzreihe an der Stelle x_0 divergiert, dann divergiert sie auch an allen Stellen x mit $|x| > |x_0|$.

Bew.: $\sum a_n*x_0^n$ ist eine divergente Minorante für $\sum a_n*x^n$.

Beispiel: $f(x) = 1 + 2*x^2 + 4*x^4 + 6*x^6 + \ldots = 1 + \sum p_n$ mit $p_n = 2*n * x^{2*n}$

Nach dem Quotientenkriterium ist hinreichend für die Konvergenz, dass $\lim (|p_{n+1}| / |p_n|) < 1$ für n gegen Unendlich.

$[2*(n+1)* x^{2*(n+1)}] / [2*n * x^{2*n}] = (1 + 1/n) * x^2$

$\lim (1 + 1/n) * x^2 = x^2$ für n gegen Unendlich.

Nun ist $x^2 < 1$ für alle $x < 1$.

Daher ist die Potenzreihe für alle $x < 1$ sicherlich konvergent.

$f(x) = 1 + 2*x^2 + 4*x^4 + 6*x^6 + ...$

$f(1/2) = 1 + 2*(1/4) + 4*(1/16) + 6*(1/64) + ...$

$f(1/2) = 1.88476 + R_6(1/2)$

Bricht man die schrittweise Berechnung der Reihensumme an einer Stelle x nach dem n-ten Glied ab, dann erhält man nur einen Näherungswert für die unendliche Reihensumme. Die Differenz der beiden Werte nennt man dann das n-te Restglied $R_n(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n*x^n = (a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + ... + a_nx^n) + R_n(x)$$

Man kann Potenzreihen auch in folgender Form anschreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n*(x-c)^n = a_0 + a_1*(x-c) + a_2*(x-c)^2 + ... + a_n*(x-c)^n + ...$$

Die Substitution z = (x-c) erzeugt dann eine Potenzreihe in gewöhnlicher Form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n*z^n = a_0 + a_1*z + a_2*z^2 + ... + a_n*z^n + ...$$

Es gibt auch Potenzreihen, deren Summe s_n sich direkt als Funktion von x darstellen lässt, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel: $s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n$

$x*s_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n +.x^{n+1}$

$x*s_n - s_n = -1 + x^{n+1}$

$s_n * (x - 1) = -1 + x^{n+1}$

$s_n = (1 - x^{n+1}) / (1 - x)$

[3] Reihenentwicklung von Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$, welche an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches $[a;b]$ beliebig oft differenzierbar ist, heißt dort „regulär“.

Beispielsweise ist die Funktion 1/sqrt(x) regulär für alle reellen $x \neq 0$.

Entwicklungssatz von Taylor: Es sei $y = f(x)$ eine in x_0 reguläre Funktion. Dann lassen sich die Funktionswerte in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 in eindeutiger Weise durch eine Potenzreihe (Taylorreihe) darstellen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n*(x-x_0)^n = f(x)$$

Beweis:

$f(x) = a_0 + a_1*(x-x_0) + a_2*(x-x_0)^2 + a_3*(x-x_0)^3 + \ldots + a_n*(x- x_0)^n + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'(x) = a_1 + 2*a_2*(x-x_0) + 3*a_3*(x-x_0)^2 + \ldots\ldots\ldots + n*a_n*(x-x_0)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f''(x) = 2*a_2 + 2*3*a_3*(x-x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)*n*a_n*(x-x_0)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'''(x) = 2*3*a_3 + 2*3*4*a_4*(x-x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-2)*(n-1)*n*a_n*(x-x_0)^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

. . . .

$f^{(n)}(x) = n!*a_n + (n+1)!*a_{n+1}*(x-x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots$ Dabei ist $n! = 1*2*3* \ldots *(n-1)*n$.

. . . .

$f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = 1*a_1$, $f''(x_0) = 2*a_2$, . . . , $f^{(n)}(x_0) = n! * a_n$

$$\mathbf{a_n = f^{(n)}(x_0) / n!}$$

Die Funktion $f(x)$ lässt sich somit in $U(x_0)$ in eindeutiger Weise durch eine Potenzreihe darstellen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(x_0) /n!)*(x-x_0)^n = f(x)$$

Die Umgebung $U(x_0)$ ist durch den Konvergenzbereich der Potenzreihe festgelegt und kann durch die Anwendung eines Konvergenzkriteriums bestimmt werden. Die Stelle x_0 heißt der Entwicklungspunkt und man sagt, dass $f(x)$ im Punkt x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist (Reihenentwicklung der Funktion).

Beispiele von Reihenentwicklungen

Beispiel 1: $y = \exp(x) = e^x$, regulär für alle reellen x, insbesondere für $x_0 = 0$

$y = e^x$, $y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y''' = e^x$, . . . , $y^{(n)} = e^x$, . . .

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$, . . . , $y^{(n)}(0) = 1$

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2!$, $a_3 = 1/3!$, . . . , $a_n = 1/n!$

$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots + x^n/n! + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! = e^x$$

Es sei $p_n = a^n*(x-x_0)^n$ das n-te Glied der Potenzreihe.

Quotientenkriterium überprüfen: lim ($|p_{n+1}| / |p_n|$) < 1 für n gegen Unendlich.

$|p_{n+1}| / |p_n| = | x^{(n+1)} / (n+1)! | / | x^n / n! | =$

$= | x / (n+1) |$

$\lim | x / (n+1) | = 0$ für n gegen Unendlich und für alle reellen x.

Die Funktion e^x lässt sich um den Punkt $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, welche sicher für alle endlichen reellen x konvergiert.

Beispiel 2: $y = \exp(-x) = e^{-x}$, regulär für alle reellen x, insbesondere für $x_0 = 0$

$y = e^x$, $y' = -e^x$, $y'' = +e^x$, $y''' = -e^x$, . . . , $y^{(n)} = (-1)^n*e^x$, . . .

$y^{(n)}(0) = (-1)^n$ und $a_n = (-1)^n / n!$

$e^{-x} = 1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + x^4/4! - \ldots + (-1)^n*x^n/n! + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n *x^n / n! = e^{-x}$$

Beispiel 3: $y = a^x$, mit einer beliebigen reellen Zahl a als Basis

$a = e^{\ln(a)}$

$y = a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a)*x}$

$y' = \ln(a)* e^{\ln(a)*x} = \ln(a)* a^x$, $y'' = (\ln(a))^2 * a^x$, . . . , $y^{(n)} = (\ln(a))^n * a^x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(a))^n *x^n / n! = a^x$$

Beispiel 4: $y = ln(x)$, regulär für alle reellen $x > 0$, insbesondere für $x_0 = 1$

$y = ln(x)$,

$y' = 1/x = x^{-1}$

$y'' = (-1)*x^{-2}$

$y''' = (-1)(-2)*x^{-3}$

. . . .

$y^{(n)} = (-1)^{(n+1)}*(n-1)!* x^{-n}$

$y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = -1$, $y'''(0) = 2!$, . . . , $y^{(n)}(1) = (-1)^{(n+1)}*(n-1)!$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1/2$, $a_3 = 1/3$, . . . , $a_n = (-1)^{(n+1)}*(n-1)! / n! = (-1)^{(n+1)} / n$

$ln(x) = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + . . . + (-1)^{(n+1)} * (x-1)^n / n + ...$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} *(x-1)^n / n = ln(x)$$

Quotientenkriterium überprüfen: $\lim (|p_{n+1}| / |p_n|) < 1$ für n gegen Unendlich.

$|p_{n+1}| / |p_n| = | (-1)^{(n+2)} * (x-1)^{(n+1)} / (n+1) | / | (-1)^{(n+1)} * (x-1)^n / n | =$

$= | (-1)* (x-1)* n / (n+1) | = | (1-x) / (1+1/n) |$

$\lim | (1-x) / (1+1/n) | < 1$ für n gegen Unendlich,

$= | 1- x | < 1$ für alle reellen x mit $0 < x < 2$.

Die Funktion ln(x) lässt sich um den Punkt $x_0 = 1$ in eine Potenzreihe entwickeln, welche sicher für alle reellen x in dem offenen Intervall (0;2) konvergiert.

Um den Logarithmus auch von beliebigen positiven reellen Zahlen in durch eine Reihe zu ermitteln, wird eine Substitution $z = (1+x) / (1-x)$ ausgeführt.

Umgekehrt gilt dann $x = (z-1)/(z+1)$. Wenn z in (0; ∞), dann x in (-1;1).

$ln(z) = ln(1+x) – ln(1-x)$

$ln(1+x) = x - (x)^2/2 + (x)^3/3 - (x)^4/4 + . . . + (-1)^{(n+1)} * (x)^n / n + ...$

$ln(1-x) = -x - (-x)^2/2 + (-x)^3/3 - (-x)^4/4 + . . . + (-1)^{(n+1)} * (-x)^n / n + ...$

$ln(z) = 2*x + 0 + 2*x^3/3 + 0 + 2*x^5/5 + 0 + 2*x^7/7 + 0 + ...$

$ln(z) = 2*[(z-1)/(z+1) + (1/3)*((z-1)/(z+1))^3 + (1/5)*((z-1)/(z+1))^5 + ...]$

$$2*\sum_{n=1}^{\infty} [(z-1)/(z+1)]^{(2n-1)} / [2n-1] = ln(z)$$ **für alle positiven reellen Zahlen z.**

Beispiel 5: $y = \sin(x)$, regulär für alle reellen x, insbesondere für $x_0 = 0$

$y = \sin(x)$,	$y(0) = 0$,	$a_0 = 0$
$y' = +\cos(x)$,	$y'(0) = 1$,	$a_1 = 1$
$y'' = -\sin(x)$,	$y''(0) = 0$,	$a_2 = 0$
$y''' = -\cos(x)$,	$y'''(0) = -1$,	$a_3 = -1/3!$
$y'''' = +\sin(x)$,	$y''''(0) = 0$,	$a_4 = 0$
$y''''' = +\cos(x)$,	$y'''''(0) = 1$,	$a_5 = 1/5!$

$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots\ldots\ldots.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{(2n-1)} / (2n-1)!\,] * x^{2n-1} = \sin(x)$$

Quotientenkriterium überprüfen: $\lim (|p_{n+1}| / |p_n|) < 1$ für n gegen Unendlich.

$|p_{n+1}| / |p_n| = | (-1)^{(2n+1)}/(2n+1)! * x^{(2n+1)} | / | (-1)^{(2n-1)}/(2n-1)! * x^{(2n-1)} | =$

$= | x^2 / (2n+1) |$

$\lim | x^2 / (2n+1) | = 0$ für n gegen Unendlich und für alle reellen x.

Die Funktion sin(x) lässt sich um den Punkt $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, welche sicher für alle endlichen reellen x konvergiert.

Beispiel 6: $y = \cos(x)$, regulär für alle reellen x, insbesondere für $x_0 = 0$

Weil cos(x) die Ableitung von sin(x) ist, gilt folgende Reihenentwicklung:

$\cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots\ldots\ldots.$

Beispiel 7: $y = \cos(x) + i*\sin(x)$

$y = (1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots) + i * (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots)$

$y = 1 + i*x + (i*x)^2/2! + (i*x)^3/3! + (i*x)^4/4! + (i*x)^5/5! + \ldots = e^{i*x}$.

Daraus folgt die Eulersche Gleichung: $\mathbf{\cos(x) + i*\sin(x) = e^{i*x}}$

ENDE