Erweitere Version 4.0 © Herbert Paukert

Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

SCHLUSS - Rechnungen

Alle Dinge in unserer Welt werden durch Eigenschaften oder Merkmale beschrieben.

Bestimmte Merkmale können gemessen werden. Zu diesem Zweck braucht man immer eine entsprechende Maßeinheit. So ist beispielsweise die Maßeinheit für das Merkmal "Länge" genau 1 Meter (m).

Frage: Wie heißt die Maßeinheit des Merkmals "Masse" ?

(a) Minute (min)
(b) Kilogramm (kg)
(c) Liter (l)

Antwort: Die Maßeinheit der Masse ist das Kilogramm (kg).

Die Merkmale in unserer Welt sind nicht isoliert voneinander, sondern sie stehen in bestimmten Beziehungen zueinander.

Vermehrt man beispielsweise die Menge einer Ware, dann erhöht sich auch ihr Kaufpreis.
Verkürzt man beispielsweise die Länge eines Holzstabes, dann wird auch seine Masse kleiner.

Betrachten wir nun einen Radfahrer, der sich auf einer Strasse mit gleich bleibender Geschwindigkeit bewegt.

Frage: Was geschieht, wenn der vom Radfahrer zurückgelegte Weg verdoppelt wird ? Dann erhöht sich seine Fahrzeit auf das

(a) Zweifache (b) Dreifache (c) Vierfache ?

Antwort: Die Fahrzeit erhöht sich um das Zweifache.

Der Radfahrer ist ein Beispiel für eine gleichförmige Bewegung, d.h. die Geschwindigkeit bleibt immer gleich.

Die beiden Merkmale Weg und Zeit stehen in einer ganz bestimmten Beziehung zueinander:

Vergrößert man den Weg auf das 2-, 3-, 4-, ... N-fache, dann vergrößert sich auch die Zeit auf das 2-, 3-, 4-, ... N-fache.

Frage: Was geschieht, wenn man den Weg halbiert ?
Dann verkürzt sich die Zeit auf

(a) die Hälfte, (b) ein Drittel, (c) ein Viertel ?

Antwort: Die Fahrzeit verkürzt sich auf die Hälfte.

Die beschriebene Beziehung zwischen Weg und Zeit bei der gleichförmigen Bewegung nennt man "direkt proportional".

Zwei Merkmale heißen "direkt proportional" zueinander, wenn Folgendes gilt:

Wächst das eine Merkmal auf das N-fache, dann wächst auch das andere Merkmal auf das N-fache.

Sinkt das eine Merkmal auf den N-ten Teil, dann sinkt auch das andere Merkmal auf den N-ten Teil.

Neben direkt proportionalen Beziehungen gibt es aber auch andere Beziehungsformen. Wir wollen uns im Folgenden nur auf Merkmale beschränken, die zueinander direkt proportional sind.

Aufgabe:

Eine 4 m² große Holzplatte kostet 10 Euro (€).
Wieviel kostet eine 3 m² große Platte ?

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir zuerst die beteiligten Merkmale erkennen. Das sind die Plattenfläche (m²) und der Kaufpreis (€). Dann muss die Beziehung der beiden Merkmale festgestellt werden.

Die zwei Merkmale sind zueinander direkt proportional.
Als gesucht wird jenes Merkmal bezeichnet, dessen Wert in der Aufgabenstellung unbekannt ist. Das andere Merkmal heißt gegeben.

In unserem Beispiel ist das gegebene Merkmal die Plattenfläche, und das gesuchte Merkmal ist der Kaufpreis.

Um die Aufgabe zu lösen, gehen wir folgendermaßen vor:

(1) Wenn 4 m² genau 10 € kosten, dann kostet die Einheit 1 m² des gegebenen Merkmals genau 10 / 4 = 2.50 €.

(2) Wenn 1 m² genau 2.50 € kostet, dann kosten 3 m² genau 2.50 * 3 = 7.50 €.

Ergebnis: Eine Holzplatte von 3 m² kostet 7.50 €.

In Zukunft wollen wir solche Aufgabenstellungen, die man auch Schlussrechnungen nennt, in Form einer Tabelle anschreiben:

```
gegebenes Merkmal |  gesuchtes Merkmal
(Fläche in m²)    |  (Kaufpreis in €)
------------------|-------------------
       4          |       10
       3          |        X
```

Schritt 1: Schluss von der Mehrheit auf die gegebene Einheit.
Von 4 gelangt man zu 1 durch eine Division durch 4. Wegen der direkt proportionalen Beziehung muss auch der Kaufpreis durch 4 dividiert werden. Daher kostet 1 m² genau 10 / 4 = 2.50 €.

Schritt 2: Schluss von der gegebenen Einheit auf die Mehrheit.
Von 1 gelangt man zu 3 mit einer Multiplikation mit 3. Wegen der direkt proportionalen Beziehung muss auch 2.50 mit 3 multipliziert werden, was 7.50 € ergibt.

Ergebnis: Eine Holzplatte von 3 m² kostet 7.50 €.

Die beschriebenen zwei Lösungsschritte werden nun in Form einer erweiterten Tabelle angeschrieben:

```
gegebenes Merkmal |  gesuchtes Merkmal
(Fläche in m²)    |  (Kaufpreis in €)
------------------|-------------------
       4          |       10
       3          |        X
------------------|-------------------
       1          |     (10/4) = 2.50    (Schritt 1)
       3          |     (10/4)*3 = 7.50  (Schritt 2)
```

Ergebnis: Eine Holzplatte von 3 m² kostet 7.50 €.

Wir können unsere einfache Schlussrechnung auch in der umgekehrten Richtung ausführen. Dann lautet die Aufgabenstellung beispielsweise folgendermaßen:

Eine 4 m² große Holzplatte kostet 10 €.
Welche Plattengröße erhält man um 15 € ?

Jetzt ist das gegeben Merkmal der Kaufpreis und das gesuchte Merkmal ist die Plattenfläche. Daher müssen wir nun zuerst ausrechnen, welche Plattenfläche dem Preis von 1 € entspricht. Das sind 4 / 10 = 0.40 m². Um 15 € bekommt man dann 0.40 * 15 = 6 m².

Ergebnis: Um 15 € bekommt man ein Platte mit 6 m².

Auch bei dieser Schlussrechnung verwenden wir eine Tabelle. Nur sind jetzt das gegebene Merkmal und das gesuchte Merkmal vertauscht.

```
gegebenes Merkmal  |  gesuchtes Merkmal
(Kaufpreis in €)   |  (Fläche in m²)
-------------------|-------------------
        10         |        4
        15         |        X
-------------------|-------------------
         1         |    (4/10) = 0.40
        15         |    (4/10)*15 = 6.00
```

Ergebnis: Um 15 € bekommt man ein Platte mit 6 m².

Aufgabe:

Ein Läufer bewegt sich möglichst gleichförmig und benötigt für 5 km genau 20 Minuten (min). Welche Zeit braucht er für eine Strecke von 3 km ?

```
geg.(km)  |  ges.(min)
----------|-----------
      5   |   20
      3   |    X
----------|-----------
      1   |    4.00   (Zeit für 1 km)
      3   |   12.00   (Zeit für 3 km)
```

Aufgabe:

Ein Läufer bewegt sich möglichst gleichförmig und benötigt für 5 km genau 20 Minuten (min). Welche Strecke hat er in 32 min zurückgelegt ?

```
geg.(min)  |  ges.(km)
-----------|----------
     20    |    5
     32    |    X
-----------|----------
      1    |    0.25   (Zurückgelegter Weg in 1 min)
     32    |    8.00   (Zurückgelegter Weg in 32 min)
```

Aufgabe:

8 Liter (l) Benzin kosten 8.80 €.
Was kosten 10 Liter (l) ?

```
 geg.(l) | ges.(€)
 --------|--------
   8     |   8.80
  10     |   X
 --------|--------
   1     |   1.10   (Preis für  1 Liter Benzin)
  10     |  11.00   (Preis für 10 Liter Benzin)
```

Aufgabe:

8 Liter (l) Benzin kosten 10 €.
Wie viele Liter bekommt man um 15 € ?

```
geg.(€)  |  ges.(l)
---------|---------
  10     |    8
  15     |    X
---------|---------
   1     |    0.80   (Benzin für  1 €)
  15     |   12.00   (Benzin für 15 €)
```

Aufgabe:

9 Laufmeter (m) Stoff kosten 63 €.
Was kosten 11 m Stoff ?

```
geg.(m)  |  ges.(€)
---------|---------
     9   |   63
    11   |    X
---------|---------
     1   |    7.00   (Preis von  1 m Stoff)
    11   |   77.00   (Preis von 11 m Stoff)
```

Aufgabe:

9 Laufmeter (m) Stoff kosten 60 €.
Wie viele Meter bekommt man um 40 € ?

```
geg.(€)  |  ges.(m)
---------|---------
    60   |    9
    40   |    X
---------|---------
     1   |    0.15   (Stoff für  1 €)
    40   |    6.00   (Stoff für 40 €)
```

Damit sind wir am Ende des Grundkurses über Schlussrechnungen angelangt. Wir wollen das Wichtigste noch einmal kurz zusammenfassen:

(1) Erkennen von gegebenem und gesuchtem Merkmal.

(2) Überprüfen der direkt proportionalen Beziehung.

(3) Von der gegebenen Mehrheit auf die gegebene Einheit schließen.

(4) Von der gegebenen Einheit auf die gesuchte Mehrheit schließen.

Als Hilfsmittel verwenden wir dabei einfache Tabellen.

PROZENT - Rechnungen

Der vorliegende Kurs über Prozentrechnungen setzt die Beherrschung einfacher Schlussrechnungen voraus. In dem Projekt "SCHLUSS" werden dafür die elementaren Grundlagen vermittelt.

Zerlegt man eine gegebene Grundmenge G eines bestimmten Merkmals in 100 gleich große Teile, dann nennt man einen solchen Teil ein Prozent und schreibt dafür 1 %.

```
  1 %  sind   1/100  der Grundmenge G.
 25 %  sind  25/100  (=1/4) der Grundmenge G.
 75 %  sind  75/100  (=3/4) der Grundmenge G.
100 %  sind  die ganze Grundmenge G.
```

Frage: Wie viel Prozent entsprechen der halben Grundmenge ?

Antwort: Der halben Grundmenge entsprechen 50.00 %.

Eine Prozentrechnung ist nichts Anderes als eine einfache Schlussrechnung. Einer bestimmten Merkmalsmenge entspricht ein bestimmter "Prozentwert".

Die Menge und die entsprechenden Prozente sind natürlich direkt proportional zueinander.

Aufgabe: Welche Geldmenge entspricht 32 % von 2500 € ?

Um die Aufgabe zu lösen, verwenden wir eine Schlusstabelle.

```
geg.(%)  |  ges.(€)
---------|---------
    100  |    2500
     32  |       X
---------|---------
      1  |  (2500/100) = 25      (Geld für  1 %)
     32  |  (2500/100)*32 = 800  (Geld für 32 %)
```

Ergebnis: 800 € sind 32 % von 2500 €.

Aufgabe: Wie viele Kilogramm (kg) Zucker sind 80 % von 5 kg ?

```
geg.(%)  |  ges.(kg)
---------|----------
    100  |    5
     80  |    X
---------|----------
      1  |    0.05   (kg für  1 %)
     80  |    4      (kg für 80 %)
```

Aufgabe: Wie viele Liter (l) Wasser sind 15 % von 40 Liter ?

```
geg.(%)  |  ges.(l)
---------|---------
   100   |   40
    15   |    X
---------|---------
     1   |    0.4   (Liter für  1 %)
    15   |    6     (Liter für 15 %)
```

Aufgabe: Wie viele Meter (m) Stoff sind 25 % von 8 m ?

```
geg.(%)  |  ges.(m)
---------|---------
   100   |    8
    25   |    X
---------|---------
     1   |    0.08   (Meter für  1 %)
    25   |    2      (Meter für 25 %)
```

Wir können unsere einfachen Prozentrechnungen auch in umgekehrter Richtung ausführen.

Aufgabe: Wie viel Prozent (%) sind 3 Meter (m) von 5 m ?

Jetzt ist das gegebene Merkmal die Länge, und gesucht sind die Prozente. Also müssen wir uns zuerst ausrechnen, wie viel Prozent ein Meter beträgt.

Weil der Grundmenge (5 m) immer 100 % entsprechen, entsprechen 1 m genau 100 / 5 = 20 %.

Um nun 3 m zu erhalten, muss natürlich mit 3 multipliziert werden. Das ergibt dann 20 * 3 = 60 %.

Ergebnis: 3 m sind 60 % von 5 m.

Auch für diese Aufgabenstellung wollen wir eine Schlusstabelle verwenden. Nur ist jetzt die Merkmalsmenge gegeben und die Prozente sind gesucht.

Aufgabe: Wie viel Prozent (%) sind 3 Meter (m) von 5 m ?

```
geg.(m)   |  ges.(%)
---------|---------
     5   |  100
     3   |    X
---------|---------
     1   |  (100/5) = 20    (% für 1 m)
     3   |  (100/5)*3 = 60  (% für 3 m)
```

Aufgabe: Wie viel Prozent (%) sind 2 kg von 5 kg ?

```
geg.(kg)   |  ges.(%)
----------|---------
     5    |  100
     2    |    X
----------|---------
     1    |   20   (% für 1 kg)
     2    |   40   (% für 2 kg)
```

Aufgabe: Wie viel Prozent (%) sind 40 Liter (l) von 50 Liter ?

```
geg.(l)  |  ges.(%)
---------|---------
    50   |  100
    40   |    X
---------|---------
     1   |    2   (% für  1 l)
    40   |   80   (% für 40 l)
```

Aufgabe: Wie viel Prozent (%) sind 7.5 Meter (m) von 10 Meter ?

```
geg.(m)  |  ges. (%)
---------|----------
   10    |  100
    7.5  |    X
---------|----------
    1    |   10   (% für 1 m)
    7.5  |   75   (% für 7.5 m)
```

Die Mathematik versucht die Beziehungen zwischen den verschiedenen Merkmalen in möglichst einfachen Formeln auszudrücken. Bei den Prozentrechnungen werden zuerst folgende Bezeichnungen eingeführt:

G = Grundwert (Grundmenge eines vorliegenden Merkmals)
p = Prozentsatz (Anzahl der Hunderstel der Grundmenge G)
A = Prozentanteil (Jene Teilmenge von G, die durch p bestimmt ist)

Wenn wir beispielsweise 80 % von 5 kg berechnen wollen, dann schreiben wir ganz einfach:

G = 5 kg
p = 80 %
A = ? (kg)

In dieser neuen Schreibweise lautet unsere Aufgabenstellung:

G = 5 kg
p = 80 %
A = ? (kg)

Zunächst rechnen wir uns 1 % aus, also 5 / 100 = 0.05 kg.
Dann rechnen wir uns 80 % aus, also 0.05 * 80 = 4 kg.
Diese beiden Rechenschritte können wir in einer einzigen Formel zusammenfassen:

$$A = (G/100)*p = G*p/100$$

Ergebnis: A = 5*80/100 = 4 kg.

Wenn wir die Prozentformel $A = G*p/100$ näher betrachten, so sehen wir, dass sie eine Beziehung zwischen den drei Größen G, A und p darstellt. Um davon eine zu berechnen, müssen die beiden anderen gegeben sein. Je nach Angabe können somit drei Aufgabenformen unterschieden werden.

[1] Gegeben sind G und p. Gesucht ist A.
Die Lösung liefert die Gleichung $A = G*p/100$.

[2] Gegeben sind A und p. Gesucht ist G.

$$\begin{aligned} G * p / 100 &= A \\ G * p &= 100 * A \\ G &= 100 * A / p \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir hier $G = 100*A/p$.

[3] Gegeben sind G und A. Gesucht ist p.
Als Lösung erhalten wir hier $p = 100*A/G$.

In den folgenden Übungsaufgaben soll die gesuchte Größe mit Hilfe der entsprechenden Formel berechnet werden.

Aufgabe: Der Kaufpreis eines Autos beträgt 12 000 €.
Bei Barzahlung erhält man einen Preisnachlass
(Rabatt) von 8 %. Wie viel kostet das Auto dann ?

G = 12 000 €
p = (100 - 8) % = 92 %
A = ?

```
geg.(%)   |  ges.(€)
---------|---------
   100    |   12000
    92    |       X
---------|---------
     1    |  (12000/100) = ...
    92    |  (12000/100)*92 = 12000*92/100 = ...
```

Formel: A = G*p/100

Ergebnis: 11040 **€**

Aufgabe: Der bei Barzahlung ermäßigte Kaufpreis eines Autos
beträgt 8 360 €. Dabei wird ein Rabatt von 12 % ge-
währt. Wie hoch ist der nicht ermäßigte Autopreis ?

G = ?
p = (100 - 12) % = 88 %
A = 8 360 €

```
geg.(%)   |  ges.(€)
---------|---------
    88    |    8360
   100    |       X
---------|---------
     1    |   (8360/88) = ...
   100    |   (8360/88)*100 = 100*8360/88 = ...
```

Formel: A = G*p/100 --> G = 100*A/p

Ergebnis: 9500 **€**

Aufgabe: Der Kaufpreis eines Autos beträgt 15 000 €.
Bei Barzahlung ist der ermäßigte Preis 14 100 €.
Wie viel Prozent beträgt dabei der Rabatt ?

G = 15 000 €
p = ?
A = (15000-14100) = 900 €

```
geg.(€)   |  ges.(%)
---------|---------
 15000    |     100
   900    |       X
---------|---------
     1    |    (100/15000) = ...
   900    |    (100/15000)*900 = 100*900/15000 = ...
```

Formel: A = G*p/100 --> p = 100*A/G

Ergebnis: 6.00 %

Aufgabe: Der Kaufpreis eines Autos beträgt 14 000 €.
Das Auto kann durch eine zweijährige Ratenzahlung
mit monatlichen Raten von 600 € bezahlt werden.
Um wie viel Prozent verteuert sich dabei das Auto ?
(Ergebnis auf zwei Dezimalen gerundet).

Ergebnis: 2.86 %

Aufgabe: Der Kaufpreis eines neuen Autos beträgt 12 000 €.
Durch die Abnutzung hat das Auto nach drei Jahren
einen Wert von nur mehr 8 000 €. Berechne diesen
Wertverlust in Prozent auf zwei Dezimalen gerundet !

Ergebnis: 33.33 %

Damit sind wir am Ende des Kurses über Prozentrechnungen angelangt.

MISCHUNGS - Aufgaben

Eine Mischung besteht aus m_1 Liter p_1-prozentigem Alkohol und m_2 Liter p_2-prozentigem Alkohol. Wie viel Prozent p_3 Alkohol enthält die Mischung?

Stoff	Menge	Prozent	Anteil
1	m_1	p_1	a_1
2	m_2	p_2	a_2
3	m_1+m_2	p_3	a_3

Mischungsgleichung:
Der Alkohol-Anteil der Mischung ist die Summe der Alkohol-Anteile der einzelnen Mischungsstoffe: $a_3 = a_1 + a_2$

$(m_1 + m_2) * p_3/100 = m_1 * p_1/100 + m_2 * p_2/100$
$(m_1 + m_2) * p_3 = m_1 * p_1 + m_2 * p_2$

Aus der Mischungsgleichung kann nun die gesuchte Größe p_3 berechnet werden: $p_3 = (m_1*p_1 + m_2*p_2) / (m_1 + m_2)$

Bei Mischungsaufgaben sind auch andere Angaben möglich. In allen Fällen muss eine Mischungsgleichung aufgestellt und aus ihr dann die gesuchte Größe ermittelt werden.

Musterbeispiel

Eine Mischung besteht aus 19 Liter 48-prozentigem Alkohol und 10 Liter 68-prozentigem Alkohol. Wie viel Prozent Alkohol x sind in der Mischung?

Stoff	Menge	Prozent	Anteil
1	19	48	9.12
2	10	68	6.80
3	29	x=54.90	15.92

Mischungsgleichung: 29*x = 19*48 + 10*68, x = 54.90

Ergebnis: In 29 Liter Mischung sind 54.90 % Alkohol.

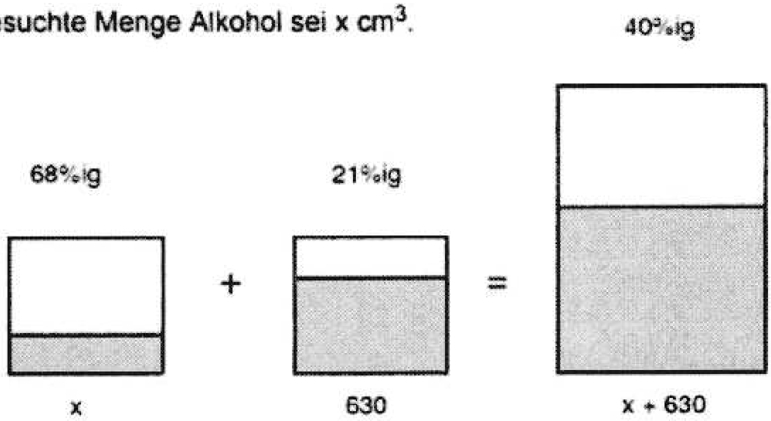
Mischungsaufgaben – ein Musterbeispiel

Mit wie viel cm^3 68 %igem Alkohol sind 630 cm^3 mit 21 % Alkoholgehalt zu mischen, damit 40 %iger Alkohol entsteht?

Lösung

Wir gehen bei dieser Rechnung davon aus, dass das Volumen der Bestandteile (z. B. des reinen Alkohols oder des reinen Wassers) vor dem Mischen gleich dem Volumen nach dem Mischen ist.

Annahme: Die gesuchte Menge Alkohol sei x cm^3.



Volumen des reinen Alkohols vor dem Mischen = Volumen des reinen Alkohols nach dem Mischen

$$\frac{68}{100} \cdot x\ cm^3 + \frac{21}{100} \cdot 630\ cm^3 = \frac{40}{100} \cdot (x + 630)\ cm^3$$

Zahlenwertgleichung (ohne Einheiten):

$$\boxed{0{,}68 \cdot x + 0{,}21 \cdot 630 = 0{,}4\ (x + 630)}$$

$$68x + 21 \cdot 630 = 40\ (x + 630)$$
$$28x = 11\,970$$
$$x = 427{,}5$$

Ergebnis: Es müssen 427,5 cm^3 68 %iger Alkohol hinzugemischt werden.

BEWEGUNGS - Aufgaben

Ein 1. Fahrzeug hat eine mittlere Geschwindigkeit von v_1 km/h.
Ein 2. Fahrzeug hat eine mittlere Geschwindigkeit von v_2 km/h.
Die Fahrzeuge fahren vom gleichen Ort in die gleiche Richtung.
Das zweite, schnellere Fahrzeug verlässt den Ort um d Stunden später. Nach welcher Zeit und welchem Weg treffen sie sich?

Fahrzeug	Geschwindigkeit	Fahrzeit	Fahrweg
1	v_1	t_1	s_1
2	v_2	$t_2=t_1-d$	s_2

Wegegleichung:
Im vorliegenden Fall sind die beiden Fahrwege bis zum Treffpunkt gleich: $s_1 = s_2$

Weg = Geschwindigkeit * Zeit. Also gilt: $v_1 * t_1 = v_2 * t_2$
Aus dieser Wegegleichung wird die Zeit t_1 berechnet.
$v_1 * t_1 = v_2 *(t_1 - d)$
$t_1 = (v_2 * d) / (v_2 - v_1)$

Bei Bewegungsaufgaben sind auch andere Angaben möglich. In allen Fällen muss eine Wegegleichung aufgestellt und aus ihr dann die gesuchte Größe ermittelt werden.

Musterbeispiel

Ein 1. Fahrzeug hat eine mittlere Geschwindigkeit von 26 km/h.
Ein 2. Fahrzeug hat eine mittlere Geschwindigkeit von 63 km/h.
Die Fahrzeuge fahren vom gleichen Ort in die gleiche Richtung.
Das zweite Fahrzeug verlässt den Ort um 2 Stunden später.
Nach welcher Zeit x und nach welchem Weg treffen sie sich?

Fahrzeug	Geschwindigkeit	Fahrzeit	Fahrweg
1	26	x=3.41	88.54
2	63	1.41	88.54

Wegegleichung: $26 * x = 63 * (x - 2)$, $x = 3.41$

Ergebnis: Die Fahrzeuge treffen sich 3.41 Stunden nach der Abfahrt des ersten Fahrzeugs und nach 88.54 Kilometern.

Bewegungsaufgaben – ein Musterbeispiel

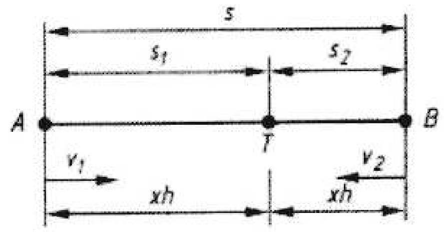
Zwei Fahrzeuge starten gleichzeitig an den Ausgangspunkten A und B, die 180 km voneinander entfernt liegen, um einander entgegenzufahren.

a) Nach welcher Zeit treffen sich die beiden Fahrzeuge (v_1 = 70 km/h, v_2 = 80 km/h)?

b) Wie weit ist der Treffpunkt vom Standort A entfernt?

Lösung

a) Die Fahrzeuge treffen sich nach x Stunden. Nach dem physikalischen Zusammenhang $s = v \cdot t$ lassen sich die Teilstrecken s_1 und s_2 berechnen.
Die Gesamtstrecke ist gleich der Summe der Teilstrecken.



Die Teilstrecken sind:

$$s_1 = v_1 \cdot x = 70\ \frac{km}{h} \cdot x\ h$$

$$s_2 = v_2 \cdot x = 80\ \frac{km}{h} \cdot x\ h$$

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = v_1 \cdot x + v_2 \cdot x$$

$$\boxed{s = x\,(v_1 + v_2)}$$

$$x = \frac{s}{v_1 + v_2}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man:

$$x = \frac{180\,km}{70\,km/h + 80\,km/h}$$

$$x = 1{,}2\ h$$

b) Die Entfernung vom Standort A bis zum Treffpunkt T ergibt sich mit s_1. Mit den vorliegenden Zahlenwerten erhält man:

$$s_1 = x \cdot v_1$$

$$s_1 = 1{,}2\ h \cdot 70\,\frac{km}{h}$$

$$s_1 = 84\ km$$

Ergebnis:

Die Fahrzeuge treffen sich nach 1,2 h. Der Treffpunkt ist 84 km vom Standort A entfernt.

LEISTUNGS - Aufgaben

Bei den folgenden Überlegungen wird die Gesamtarbeit A_0 (z.B. die Füllung eines Wasserbeckens mit dem Volumen V) immer als Einheit 1 festgesetzt.

Eine 1 . Pumpe allein füllt ein Becken mit Wasser in z_1 Stunden.
Eine 2. Pumpe allein füllt das gleiche Becken in z_2 Stunden.
Die zweite Pumpe wird nach d Stunden zur ersten Pumpe zugeschaltet.
In welcher Zeit wird das Becken gefüllt?

Pumpen	Füllzeit	Leistung	Arbeitszeit	Arbeit
1	z_1	$L_1=1/z_1$	t_1	A_1
2	z_2	$L_2=1/z_2$	$t_2=t_1-d$	A_2

Arbeitsgleichung:
Die gesamte Arbeit ist die Summe der einzelnen Arbeiten: $A_1 + A_2 = A_0 = 1$

Weil Leistung = Arbeit / Arbeitszeit, gilt: $L_1 * t_1 + L_2 * t_2 = 1$
Aus dieser Arbeitsgleichung wird die Zeit t_1 berechnet.
$(1/z_1)*t_1 + (1/z_2)*t_2 = 1$
$z_2*t_1 + z_1*t_2 = z_2*t_1 + z_1*(t_1 - d) = z_1*z_2$
$t_1 = (z_1*z_2 + z_1*d) / (z_1 + z_2)$

Bei Leistungsaufgaben sind auch andere Angaben möglich.
In allen Fällen muss eine Arbeitsgleichung aufgestellt und aus ihr dann die gesuchte Größe ermittelt werden.

Musterbeispiel

Eine 1. Pumpe allein füllt ein Becken mit Wasser in 15 Stunden.
Eine 2. Pumpe allein füllt das gleiche Becken in 20 Stunden.
Die zweite Pumpe wird nach 3 Stunden zu der ersten Pumpe zugeschaltet. In welcher Zeit x wird das Becken gefüllt?

Pumpen	Füllzeit	Leistung	Arbeitszeit	Arbeit
1	15	0.067	x = 9.857	0.657
2	20	0.050	6.857	0.343

Arbeitsgleichung: $0.067*x + 0.050*(x-3) = 1$, $x = 9.857$

Ergebnis: Das Becken ist nach 9.857 Stunden seit dem Einschalten der ersten Pumpe vollständig gefüllt.

Leistungsaufgaben – zwei Musterbeispiele

Beispiel 1:

An einer Baustelle sollen Baggerarbeiten mit zwei verschiedenen Baggern ausgeführt werden. Mit dem kleineren Bagger A kann die Arbeit in zwölf Tagen bewältigt werden. Mit dem leistungsfähigeren größeren Bagger B könnte die Arbeit in neun Tagen erledigt werden. Wie lange dauert die Baggerarbeit, wenn beide Bagger gleichzeitig eingesetzt werden, Bagger B jedoch für 1,5 Tage an einer anderen Arbeitsstelle zum Einsatz kommt?

Lösung

Ansatz: Bagger A benötige x Tage

Arbeitsvermögen von Bagger A:

In 1 Tag $\frac{1}{12}$ der Arbeit

In x Tagen $\frac{x}{12}$ der Arbeit

Arbeitsvermögen von Bagger B:

In 1 Tag $\frac{1}{9}$ der Arbeit

In (x – 1,5) Tagen $\frac{(x-1,5)}{9}$ der Arbeit

Bei gemeinsamen Einsatz wird die gesamte Arbeit bewältigt (z. B. das gesamte Volumen V ausgehoben):

x = Arbeitszeit von Bagger A in Tagen

Arbeitsvermögen von Bagger A:

$$\frac{x}{12}$$

Arbeitsvermögen von Bagger B:

$$\frac{(x-1,5)}{9}$$

Bei gemeinsamen Einsatz:

$$\boxed{\frac{x}{12}+\frac{(x-1,5)}{9}=1}$$

$$7x = 42$$

$$x = 6$$

Ergebnis: Nach 6 Tagen ist die Baggerarbeit durchgeführt.

Beispiel 2:

Ein Behälter wird durch zwei Zuflussrohre gefüllt. Ist Rohr A geschlossen, so ist der Behälter in 20 min voll. Ist Rohr B geschlossen, so ist der Behälter in 25 min gefüllt. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn beide Rohre gleichzeitig geöffnet sind?

Lösung

Da das Behältervolumen nicht bekannt ist, gehen wir von V m^3 aus.

Sind beide Zuflussrohre gleichzeitig geöffnet, so ist der Behälter in x min gefüllt.

Füllvermögen des Rohres B:

In 20 min V m^3

In 1 min $\frac{V}{20}m^3$

In x min $x\cdot\frac{V}{20}m^3$

Füllvolumen des Rohres A:

In 25 min V m^3

In x min $x\cdot\frac{V}{25}m^3$

Annahme: Behältervolumen V m^3
x = Füllzeit in min

Füllvolumen:

Füllvermögen des Rohres B:

$$x\cdot\frac{V}{20}m^3$$

Füllvermögen des Rohres A:

$$x\cdot\frac{V}{25}m^3$$

Gesamtvolumen (= Behältervolumen):

$$x\cdot\frac{V}{20}m^3+x\cdot\frac{V}{25}m^3=V$$

$$\frac{x}{20}+\frac{x}{25}=1 \qquad x=\frac{100}{9}$$

Ergebnis:

Der Behälter ist in $11\frac{1}{9}$ min voll.

24 Aufgaben zum Üben

Mischungsaufgaben

(M01) Aus einem 75 %igen Rum und einem 30 %igen Rum sollen 600 Liter eines 60 %igen Rums hergestellt werden. Wie viele Liter von jeder Sorte müssen dazu miteinander gemischt werden?

(M02) Wenn man zwei Liter von Lösung A mit einem Liter von Lösung B mischt, so erhält man eine 31%ige Salzlösung. Mischt man 4 Liter von Lösung A mit 3 Liter von Lösung B, dann enthält die Mischung 27% Salz. Wie groß ist der Salzanteil in den beiden Lösungen?

(M03) Wenn man 2 Liter kaltes Wasser mit 3 Liter heißem Wasser mischt, erhält man eine Mischung mit einer Temperatur von 60°C. Eine Mischung von 4 Liter kaltem und 1 Liter heißem Wasser hat eine Temperatur von 30°C. Welche Temperatur hatten das kalte und das heiße Wasser?

(M04) Messing ist eine Legierung aus Kupfer und Zink. Roter Messing hat einen Kupfergehalt von 85 %, weißer Messing nur von 15 %. Wie viel Rotmessing und Weißmessing muss man schmelzen, um 42 kg Messing von genau 70 % Kupfergehalt zu bekommen?

(M05) Lötzinn ist eine Legierung aus Zinn und Blei. Eine Sorte Lötzinn hat 40 % reinen Zinngehalt, eine andere Sorte hingegen nur 30 %. Wie viel von jeder Sorte braucht man, damit genau 80 kg einer neuen Sorte Lötzinn mit 33 % Zinngehalt hergestellt werden können?

(M06) Ein Silberschmied soll 820 g Silber vom Feingehalt 0.925 herstellen. Er hat zwei Sorten vom Feingehalt 0.950 und 0.850 zur Verfügung. Wie viel Gramm von jeder Sorte muss er verwenden, um die gewünschte Legierung zu erhalten?
(1/10 Prozent = l Promille = 0.001 Feingehalt; 24 Karat = 100 Prozent, 1 Karat = 4.167%)

(M07) Bronze ist eine Legierung aus Kupfer und Zinn. Aus wie viel Prozenten Kupfer und Zinn besteht ein Bronzewürfel, der 630g schwer ist, aber unter Wasser gewogen nur 554g wiegt?
(Spezifisches Gewicht von Kupfer ist 9 g/cm^3. Zinn wiegt 7 g/cm^3 und Wasser wiegt 1g/cm^3).

(M08) Mischt ein Kaufmann 8 kg Kaffee mit 12 kg einer schlechteren Sorte, so kann er das Kilogramm zu 3.24 € abgeben. Mischt er aber um gekehrt 8 kg der schlechteren mit 12 kg der besseren Sorte, so muss er das Kilogramm um 3.36 € verkaufen. Welches war der Kilogramm-Preis von jeder Kaffeesorte?

Bewegungsaufgaben

(B01) Jemand fährt mit einem Boot donauaufwärts mit einer mittleren Geschwindigkeit von 17 km/h und donauabwärts mit 23 km/h. Wie groß sind die Eigengeschwindigkeit des Bootes und die Fließgeschwindigkeit der Donau?

(B02) Eine Radfahrerin und ein Fußgänger wohnen 8 km voneinander entfernt. Wenn sie einander entgegenfahren (bzw. entgegengehen), treffen sie einander nach 20 Minuten. Wenn sie gleichzeitig in gleicher Richtung starten, holt die Radfahrerin den Fußgänger nach genau 40 Minuten ein. Wie groß sind die mittleren Geschwindigkeiten der beiden?

(B03) An einer Landstraße liegen die aufeinander folgenden Orte A, B und C, wobei A von B genau 25 km und B von C genau 100 km entfernt sind. Um 8 Uhr verlässt ein Mopedfahrer den Ort B mit einer mittleren Geschwindigkeit von 38 km/h in Richtung C. Um 9 Uhr fährt ein PKW-Fahrer mit einer mittleren Geschwindigkeit von 80 km/h vom Ort A in Richtung C ab. Um wie viel Uhr holt der PKW das Moped ein?

(B04) Ein Eilzug und ein Personenzug fahren auf nebeneinander liegenden Gleisen in die gleiche Richtung. Der Eilzug hat eine Länge von 60 m und eine Geschwindigkeit von 100 km/h. Mit welcher Geschwindigkeit fährt der 80 m lange Personenzug, wenn er in 14 Sekunden vom Eilzug überholt wird?

(B05) Maria fährt um 8^{00} Uhr mit ihrem Fahrrad mit 15 km/h mittlerer Geschwindigkeit von Laa/Thaya in das 57 km entfernte Sigmundsherberg. Von dort startet um 8^{30} ihre Freundin Eva mit dem Fahrrad in Richtung Laa/Thaya. Ihre mittlere Geschwindigkeit beträgt dabei 18 km/h. Um welche Uhrzeit und in welcher Entfernung von Laa/Thaya treffen die Mädchen einander?

(B06) Ein Autofahrer und ein Motorradfahrer wohnen 360 km voneinander entfernt und Fahren einander entgegen. Wenn sie beide um 8^{00} Uhr wegfahren, treffen sie einander um 10^{00} Uhr. Fährt der Autofahrer erst um 9^{30} Uhr weg, so begegnen sie einander um 11^{00} Uhr. Wie groß sind die mittleren Geschwindigkeiten beider Fahrzeuge?

(B07) Zwei Radfahrer A und B fahren von zwei Orten, die 2000 m von einander entfernt sind, nach derselben Richtung. Bei gleichzeitiger Abfahrt holt A den B nach 50 Minuten ein. Fährt aber B um 5 Minuten früher weg, so holt A den B erst 75 Minuten nach der Abfahrt des A ein. Wie viele Meter legt jeder in einer Minute zurück?

(B08) Ein Kreis hat 200 m Umfang. Von einem Punkte A des Kreises ausgehend, bewegen sich in entgegengesetzter Richtung zwei Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Kreise. Sie treffen immer nach je 10 Sekunden zusammen. Wenn sie sich nach einer Richtung bewegen, so treffen sie nur alle 50 Sekunden zusammen. Welche Geschwindigkeit hat jeder Körper?

Leistungsaufgaben

(L01) Ein Arbeiter kann den Sanitärbereich eines Neubaus in 8 Tagen verfliesen. Nach zwei Tagen wird ein weiterer Arbeiter eingesetzt und die Arbeit ist in insgesamt 5 Tagen abgeschlossen. Wie lange hätte der zweite Arbeiter gebraucht, wenn er die Arbeit allein ausgeführt hätte?

(L02) Zwei Arbeiter sollen miteinander eine Arbeit ausführen. Wenn beide daran arbeiten, so sind sie in $6^2/_3$ Tagen fertig. Arbeitet aber A nur 5 Tage und B nur 4 Tage, so werden nur $^2/_3$ der Arbeit fertig. In wie vielen Tagen wird jeder allein fertig?

(L03) An einer Baustelle sollen Baggerarbeiten mit drei verschiedenen Baggern ausgeführt werden. Mit dem Bagger A kann die Arbeit in zehn Tagen bewältigt werden. Der Bagger B könnte die Arbeit allein in zwölf Tagen erledigen. Der leistungsschwächste dritte Bagger C braucht dazu allein dreizehn Tage. Wie lange dauert die Ausführung der Arbeit, wenn alle drei Bagger die Arbeit gemeinsam beginnen, der Bagger B jedoch die Arbeit für zwei Tage unterbricht und der Bagger C für einen Tag an einer anderen Baustelle gebraucht wird?

(L04) Zwei Lastwagen einer Firma müssen jeden Monat eine bestimmte Ware transportieren. Wenn sie gleichzeitig in Betrieb sind, dann brauchen sie dazu genau 100 Arbeitsstunden. Im letzten Monat fällt nach 50 Stunden der zweite Lastwagen durch einen Unfall aus. Der erste Wagen braucht zum Transport der restlichen Ware noch 90 Arbeitsstunden allein. In welcher Zeit würde jeder Lastwagen allein den Warentransport erledigen?

(L05) Ein Wasserbehälter wird durch zwei Zuflussröhren gemeinsam in $11^1/_5$ Stunden gefüllt. Ist jedoch die erste Röhre 7 Stunden und die zweite Röhre 4 Stunden geöffnet, so wird der Behälter bloß halb voll. In welcher Zeit füllt jede Röhre allein den Behälter?

(L06) Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Ist die erste 4 Stunden und die zweite 15 Stunden geöffnet, dann wird der Behälter ganz voll. Ist hingegen die erste 7 Stunden und die zweite 5 Stunden geöffnet, dann werden nur $^{11}/_{16}$ des Behälters voll. In welcher Zeit füllt jede Röhre allein den Behälter und in welcher Zeit kann er durch beide zusammen gefüllt werden?

(L07) Infolge eines Rohrbruches strömt in einem Schacht so viel Wasser aus, dass er in 10 h voll wäre und überlaufen würde. Zunächst wird eine Pumpe eingesetzt, die durch ihr Pumpvermögen den Schacht in 6 h leer zu pumpen vermag. Da dauernd Wasser zuströmt wird nach 1.25 h eine zweite Pumpe mit dem doppelten Pumpvermögen zusätzlich eingesetzt. Nach wie viel Stunden ist der Schacht bei ständigem Zustrom von Wasser leer gepumpt?

(L08) Ein Wasser-Rückhaltebecken erhält durch ein Hochwasser einen solchen Wasserzufluss, dass es in 3 h überlaufen würde. Aus diesem Grunde werden sofort die drei Grundablässe geöffnet, durch die das Rückhaltebecken in $4^1/_2$ h vollkommen entleert werden kann. Wie lange kann das Rückhaltebecken das Hochwasser aufnehmen, ohne dass es überläuft, wenn es zu Beginn bereits zu $^1/_3$ gefüllt war?

Alle Aufgabenlösungen

(M01) 75%iger Rum = 400 l, 30%iger Rum = 200 l

(M02) 30% , 3%

(M03) 15°C, 90°C

(M04) Rotmessing = 33 kg, Weißmessing = 9 kg

(M05) 40%iger Zinn = 24 kg, 30%iger Zinn = 56 kg

(M06) Silber (mit 0.950 FG) = 615 kg, Silber (mit 0.850 FG) = 205 kg

(M07) 70% Kupfer, 30% Zinn

(M08) 3.60 €, 3.00 €

(B01) 20 km/h, 3 km/h

(B02) 18 km/h, 6 km/h

(B03) Treffzeit = 10^{30} Uhr

(B04) Geschwindigkeit des Personenzuges = 64 km/h

(B05) Treffzeit = 10^{00} Uhr, Treffpunkt = 30 km von Laa/Thaya entfernt

(B06) 120 km/h, 60 km/h

(B07) A = 240 m/min, B = 200 m/min

(B08) 8 m/sec, 12 m/sec

(L01) Der zweite Arbeiter braucht allein 40 Tage für die Arbeit.

(L02) Arbeiter A braucht allein 15 Tage, Arbeiter B braucht allein 12 Tage.

(L03) Die Baggerarbeit dauert 4.78 Tage.

(L04) Lkw A braucht allein 180 h, Lkw B braucht allein 225 h.

(L05) Röhre A braucht allein 21 h, Röhre B braucht allein 24 h.

(L06) Röhre A braucht 16 h, Röhre B braucht 20 h, Röhren A und B brauchen 8 h 43 min 20 sec.

(L07) Der Schacht kann in 3.54 h leer gepumpt werden.

(L08) Das Rückhaltebecken ist spätestens in 6 h voll.