SCHWINGUNGEN

Version 2.0 © Herbert Paukert

Sinusfunktion y = sin(x) [03]

Sinusfunktion y = a*sin(x) [08]
Sinusfunktion y = sin(b*x) [09]
Sinusfunktion y = sin(x+c) [10]
Sinusfunktion y = a*sin(b*x+c) [11]

Überlagerte Schwingungen [12]

Exponentialfunktion y = exp(x) [14]
Exponentialfunktion y = exp(k*x) [15]

Gedämpfte Schwingungen [17]

Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

Viele Schwingungsvorgänge in der Natur und in der Technik können mit Hilfe der Sinusfunktion beschrieben werden, beispielsweise die Wellen des Wassers, die Dichteschwingungen der Luft oder die Ausschläge eines Pendels.

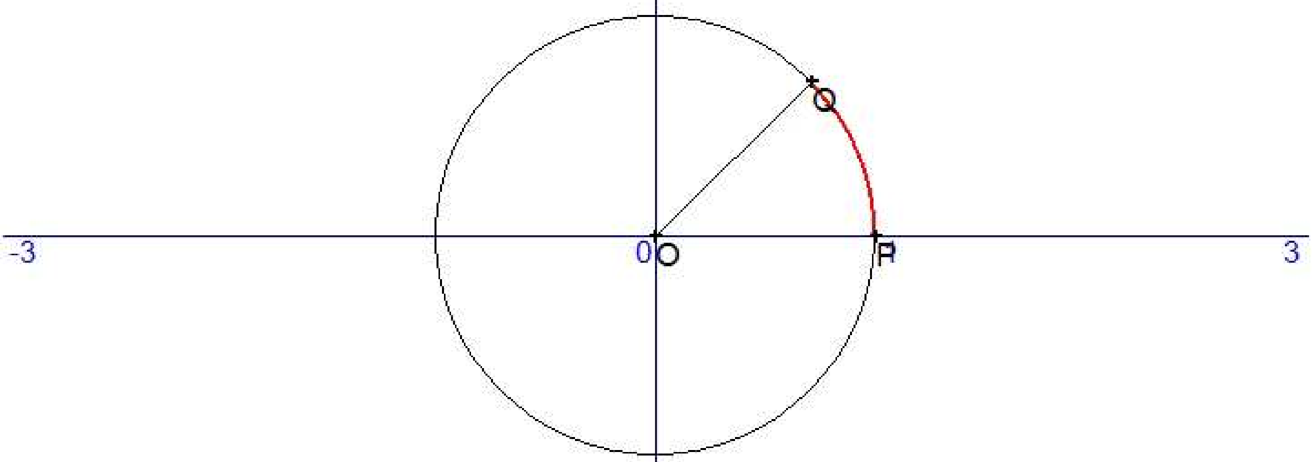
Solche Schwingungsvorgänge können sich auch überlagern. Bei dieser so genannten Interferenz entstehen dann neuartige Schwingungen. Ein Sonderfall sind Schwebungen, bei welchen zwei Schwingungen mit hohen, aber wenig unterschiedlichen Frequenzen sich überlagern.

Weil alle Schwingungsvorgänge in einem Medium erfolgen, werden sie auf Grund der Reibung gedämpft. Daher muss bei ungedämpften Schwingungen dauernd Energie zugeführt werden - beispielsweise bei einer Schaukel. Zur Beschreibung von gedämpften Schwingungen wird zusätzlich zu der Sinusfunktion auch noch die Exponentialfunktion verwendet.

(1) Die Sinusfunktion y = sin(x)

Das Bogenmaß eines Winkels

Wir zeichnen einen Winkel in der Koordinatenebene. Der Scheitel liegt im Koordinatenursprung O und ein Schenkel auf der x-Achse. Wir schneiden nun den zweiten Winkelschenkel mit dem Einheitskreis mit Mittelpunkt O und Radius r = 1 cm. Der Winkel w wird im Gradmaß (°) gemessen. Daneben gibt es aber auch das Bogenmaß.

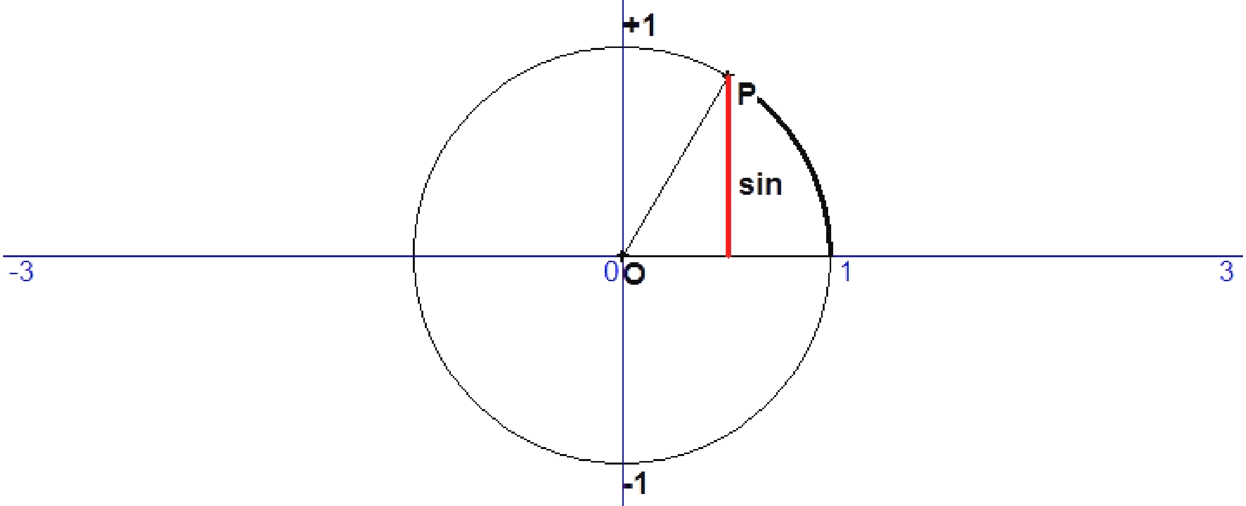


Einem vollen Drehwinkel von 360° entspricht der Umfang U = 2*¶.
Einem Grad (1°) entspricht ein Bogen von U/360 cm Länge und den w Graden entspricht der Bogen PQ von b = (U/360)*w = (2*¶/360)*w, also von ¶*w/180 cm Länge. Für den Winkel w mit der Bogenlänge 1 gilt: 1 = ¶*w/180° und w = 180°/¶ = 57.30°. Diesem Winkel w wird nun das Bogenmaß von 1 Radiant (rad) zugeordnet.

Der Winkel w = 45° hat das Bogenmaß von ¶ *45 / 180 = 0.79 rad.

Der Sinus eines Winkels

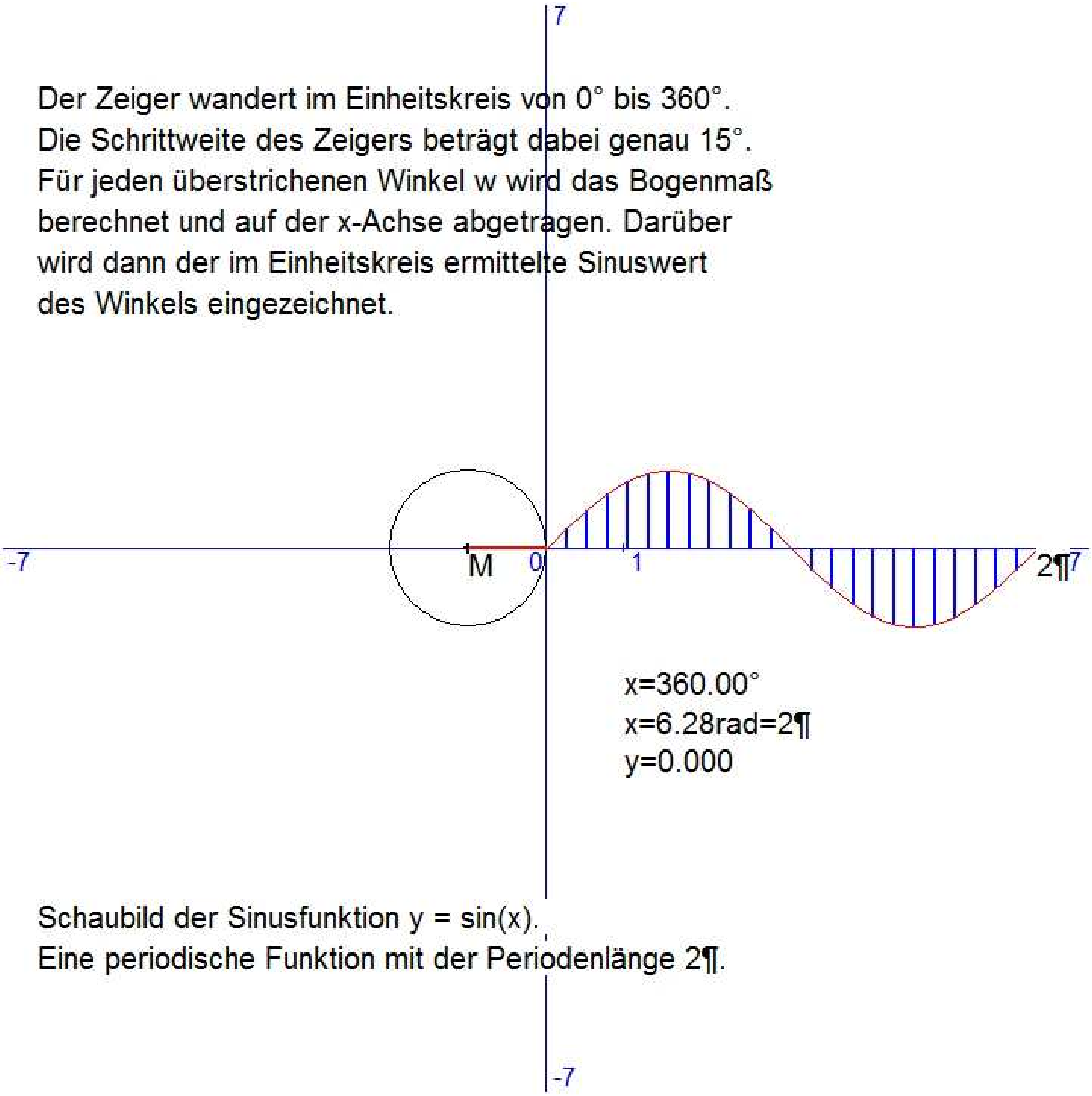
Um den Sinuswert eines Winkels w zu erhalten, müssen wir seinen Schenkel mit dem Einheitskreis schneiden, und vom Schnittpunkt P die y-Koordinate bestimmen. Diese nennt man dann den Sinuswert des Winkels: sin(w) = y.



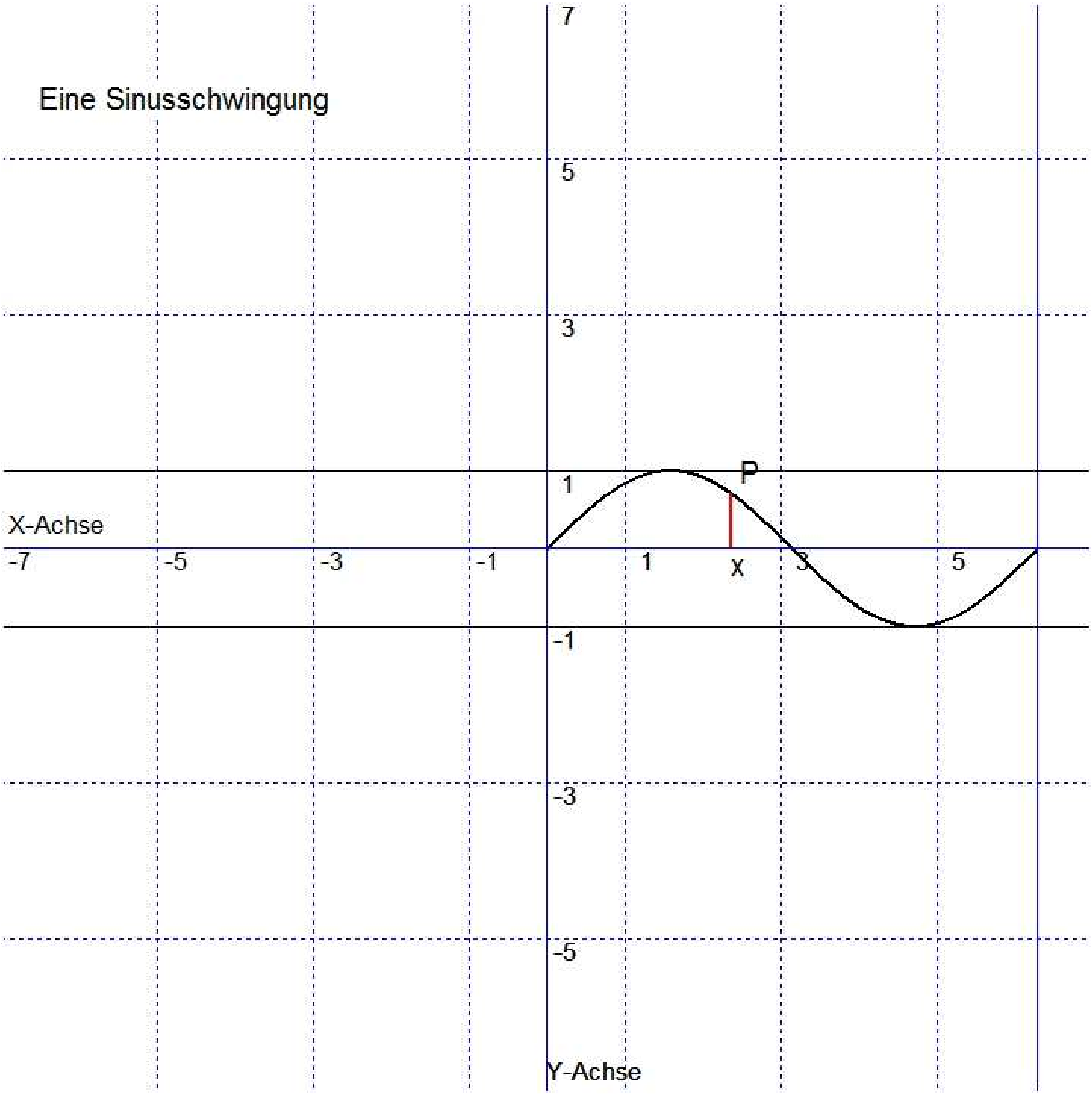
Winkel w = 60°, sin(w) = 0.87

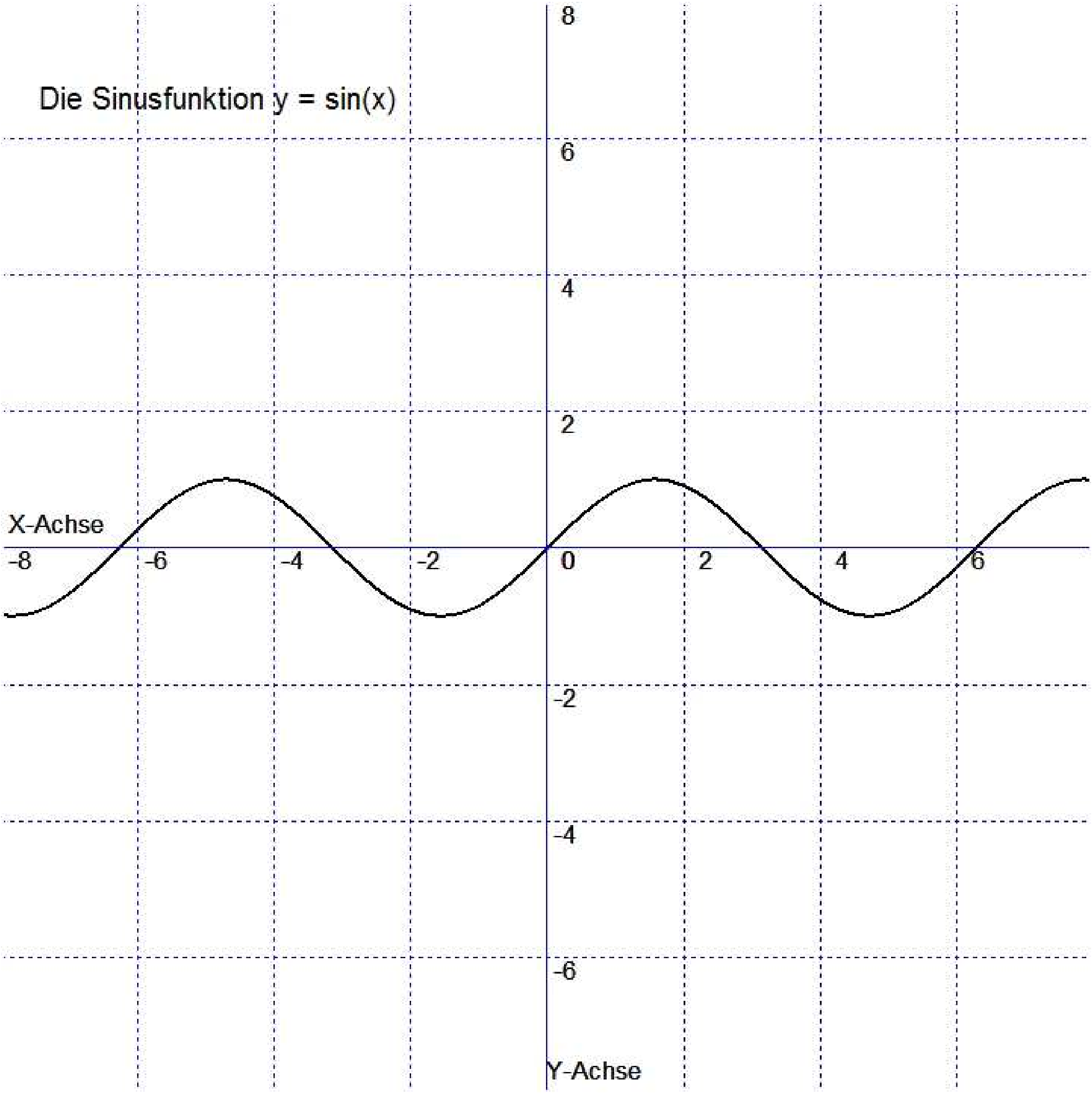
Auf diese Weise wird jedem Winkel w von 0° bis 360° eindeutig eine reelle Zahl zwischen -1 und +1 zugeordnet (Winkelfunktion). Auf der folgende Seite wird die Sinusfunktion anschaulich dargestellt.
Die Winkel werden im Gradmaß oder im Bogenmaß gemessen.

Wir tragen auf der x-Achse die Winkel x im Bogenmaß auf, d.h. dem Intervall (0°;360°) entspricht (0;2π ≈ 6.28). Parallel zur y-Achse werden die entsprechenden Sinuswerte aufgetragen. Verbinden wir dann alle so gezeichneten Punkte P(x/sin(x)), dann erhalten wir das grafische Schaubild der Sinusfunktion y = sin(x). Die Sinuswerte liegen alle zwischen -1 und +1, d.h. -1 ≤ y ≤ +1.



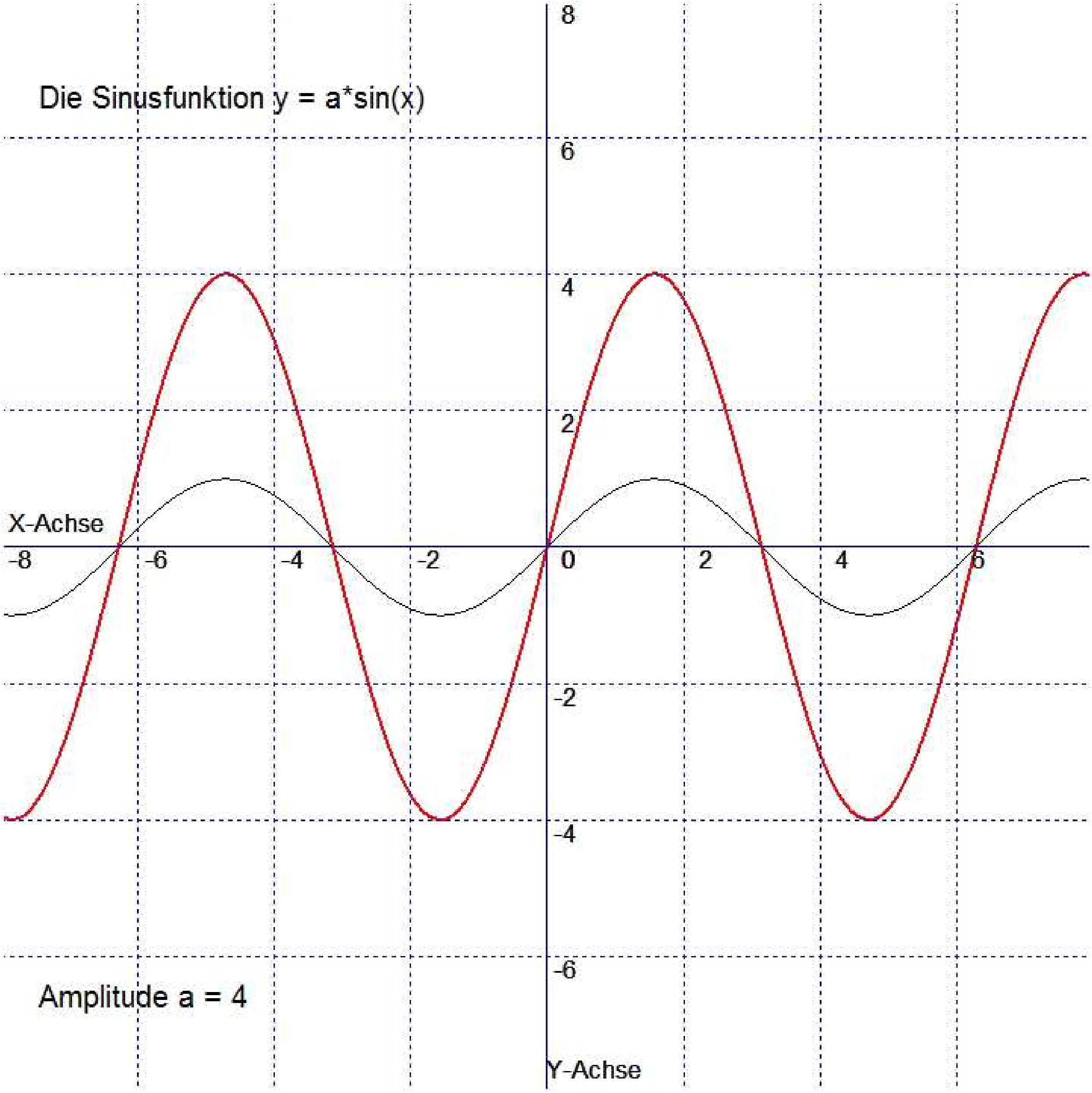
Erweitert man den Definitionsbereich auf alle reelle Zahlen R, dann erkennt man, dass sich die Funktionswerte periodisch wiederholen: Für alle x aus R gilt $f(x + n*p) = f(x)$, wobei p die Periodenlänge und n eine beliebige ganze Zahl ist. Für die Sinusfunktion ist diese Periodenlänge $p = 2\pi \approx 6.28$.




Die Sinusfunktion y = sin(x)
X-Achse
Y-Achse
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
2
4
6

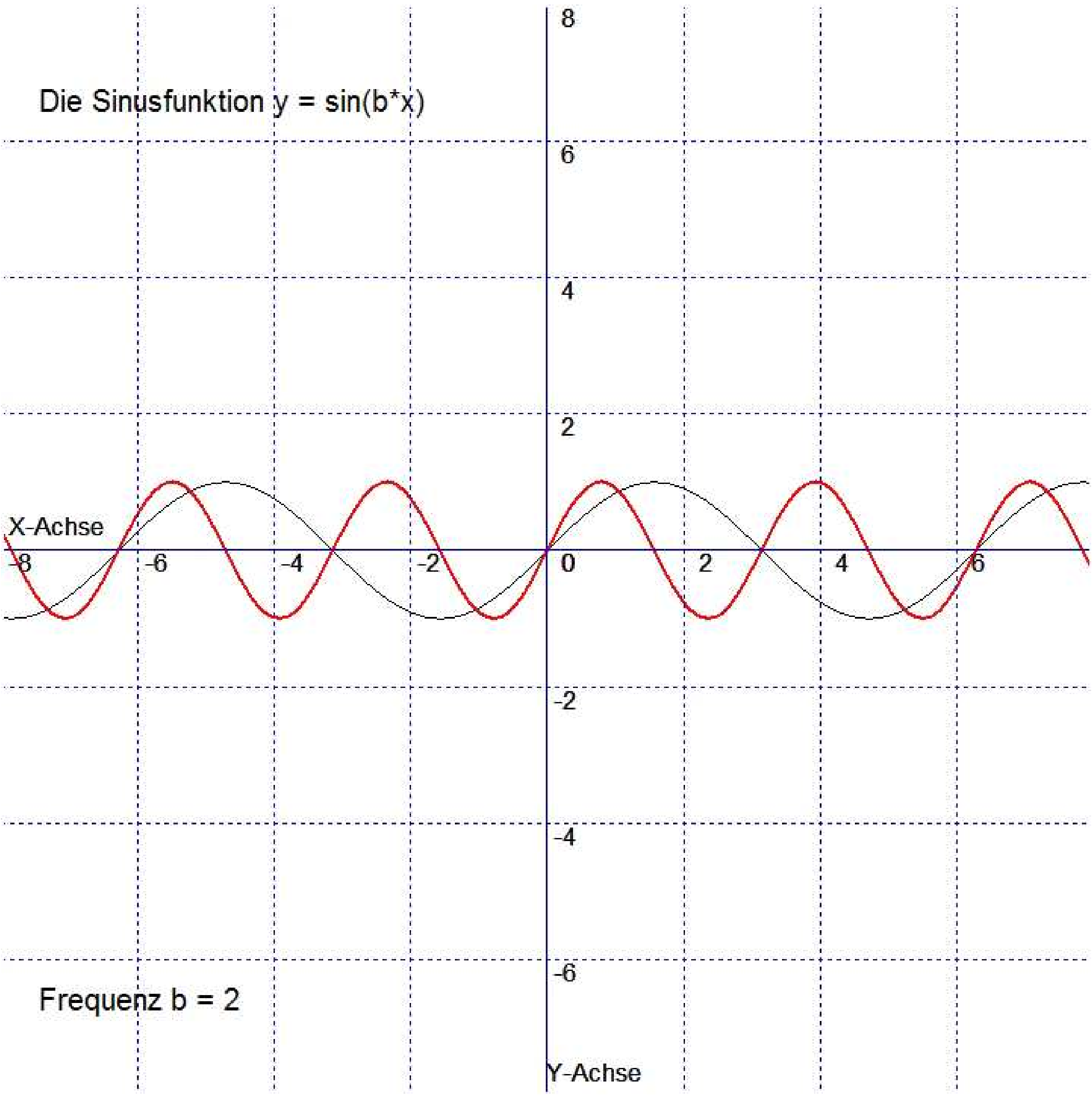
(2) Die Sinusfunktion y = a*sin(x)

Die Funktion y = a*sin(x) entsteht durch Multiplikation aller Funktionswerte mit dem konstanten Faktor a. Die Wertemenge ist somit $-a \leq y \leq +a$ und man nennt a auch die maximale Schwingungsweite (Amplitude).



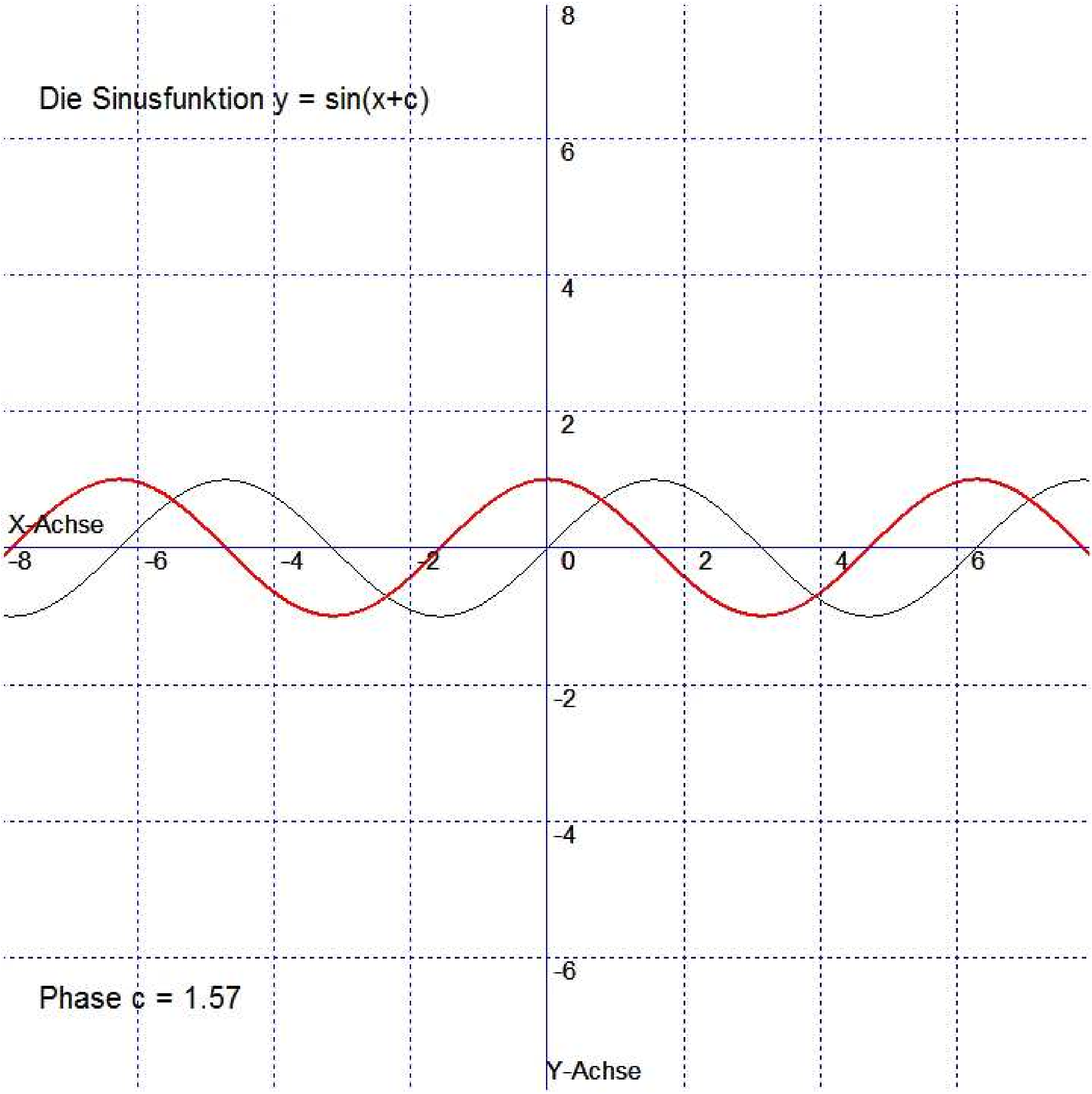
(3) Die Sinusfunktion y = sin(b*x)

Die Funktion y = sin(b*x) entsteht durch Hintereinanderausführen der linearen Funktion g(x) = b*x und der einfachen Sinusfunktion. Für b = 2 beispielsweise enthält der Definitionsbereich $0 \leq x < 2\pi$ genau zwei Perioden der Sinusfunktion, weil die Argumente b*x zwischen 0 und 4π liegen. Die Konstante b bestimmt also genau die Anzahl der Perioden im Intervall $(0;2\pi)$ und wird Frequenz der Schwingung genannt.



(4) Die Sinusfunktion y = sin(x+c)

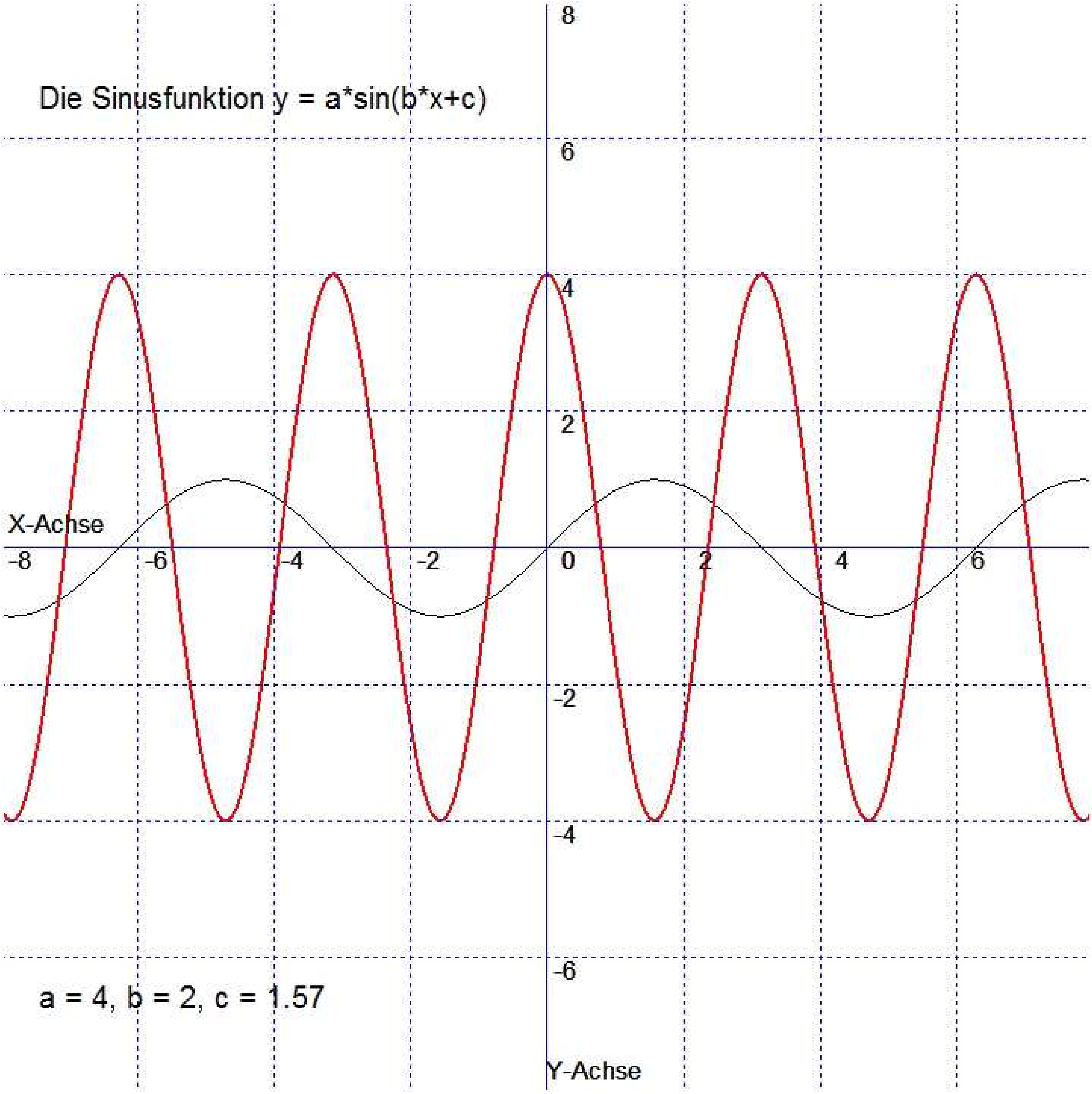
Die Funktion y = sin(x+c) entsteht durch Hintereinanderausführen der linearen Funktion g(x) = x+c und der einfachen Sinusfunktion. Dabei wird die ursprüngliche Sinusfunktion um die Konstante c längs der x-Achse verschoben. Das wird als Phasenverschiebung bezeichnet.



(5) Die Sinusfunktion y = a*sin(b*x+c)

Die Funktion y = a*sin(b*x+c) entsteht durch Hintereinanderausführen der linearen Funktion g(x) = b*x+c und der Sinusfunktion.

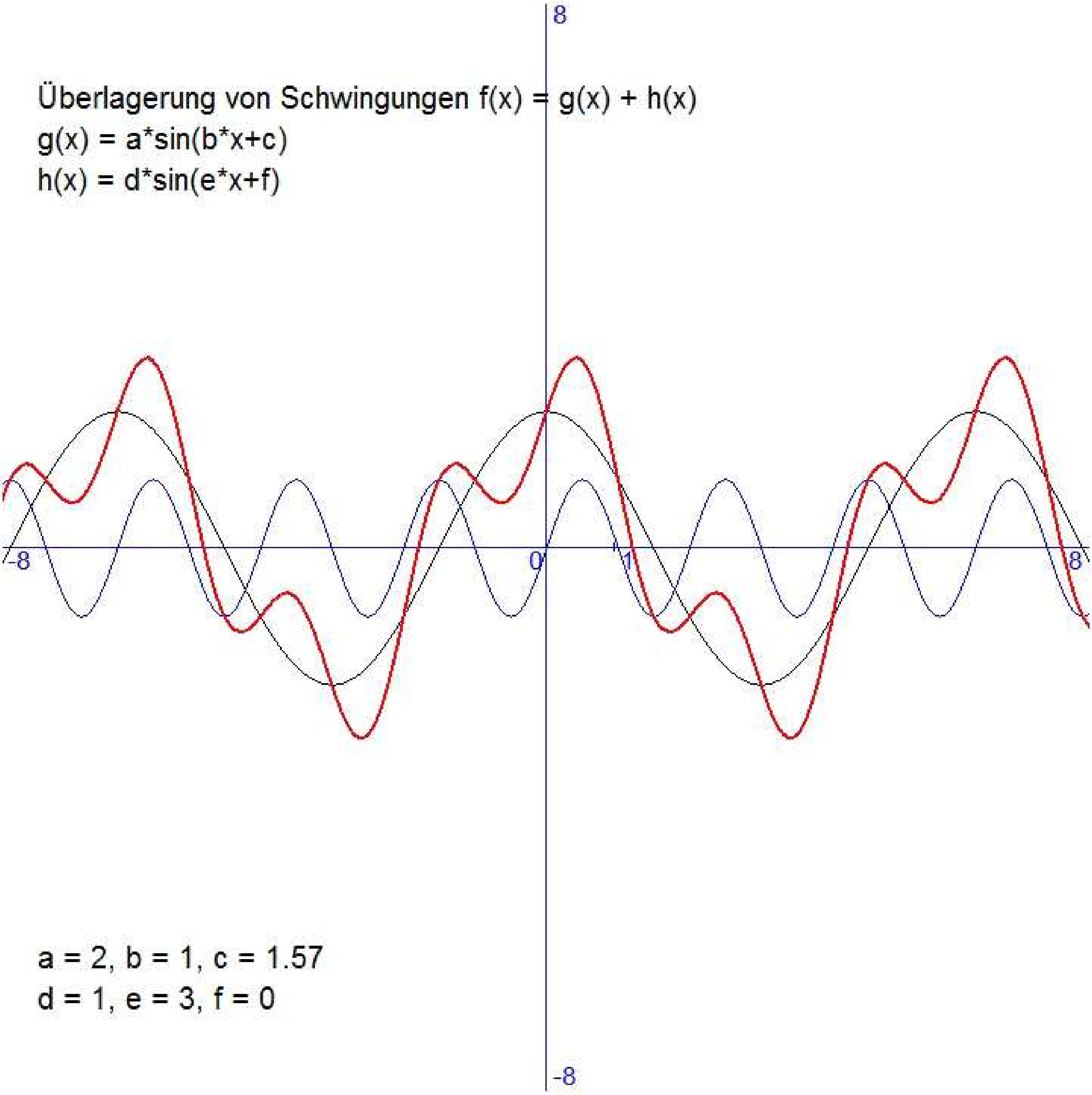
a ... Amplitude
b ... Frequenz
c ... Phasenverschiebung



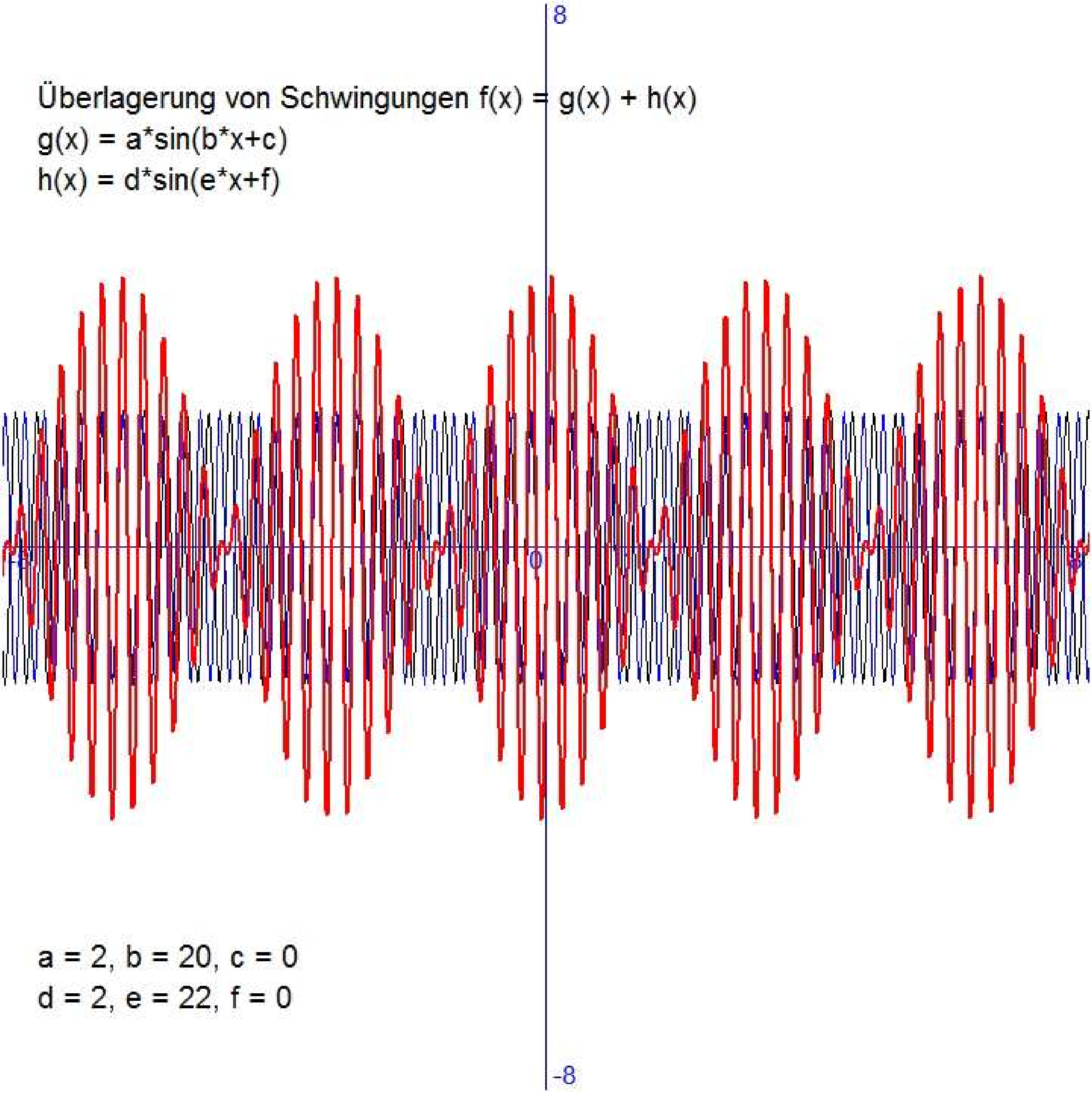
(6) Überlagerung von Schwingungen

Erste Schwingung: g(x) = a*sin(b*x+c)
Zweite Schwingung: h(x) = d*sin(e*x+f)

Summenfunktion: f(x) = g(x) + h(x)

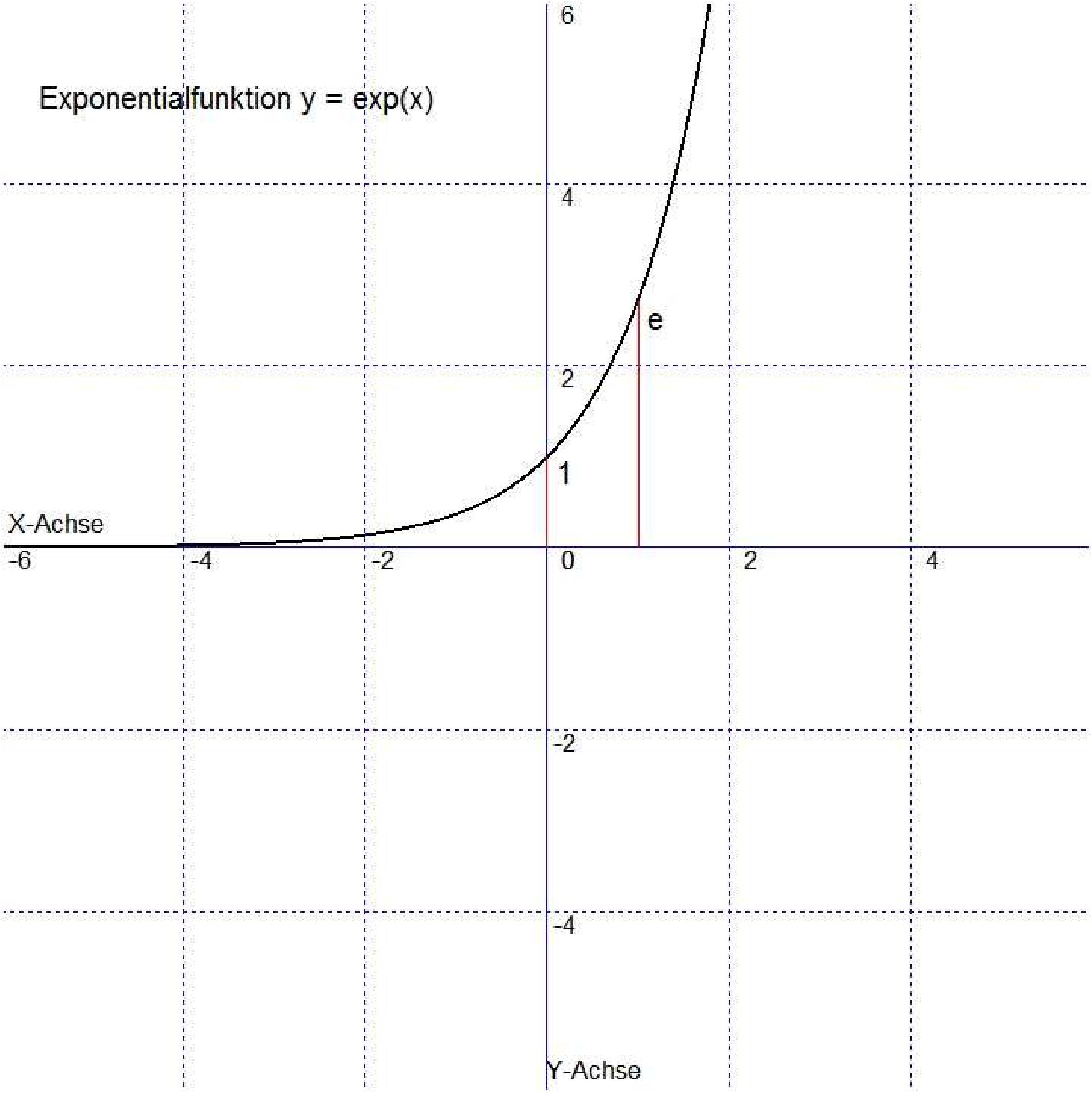


Schwebungen:



(7) Exponentialfunktion $y = \exp(x) = e^x$

Die natürliche Exponentialfunktion $y = \exp(x) = e^x$ entsteht durch Potenzierung der Eulerschen Konstanten e = 2.71828... mit den veränderlichen Hochzahlen x. Die Definitionsmenge ist die Menge aller reellen Zahlen R. Die Wertemenge enthält nur positive reelle Zahlen. Die Funktion ist stetig und streng monoton steigend. Wenn x gegen $-\infty$ strebt, dann strebt y gegen 0, d.h. die x-Achse ist eine Asymptote der Kurve.

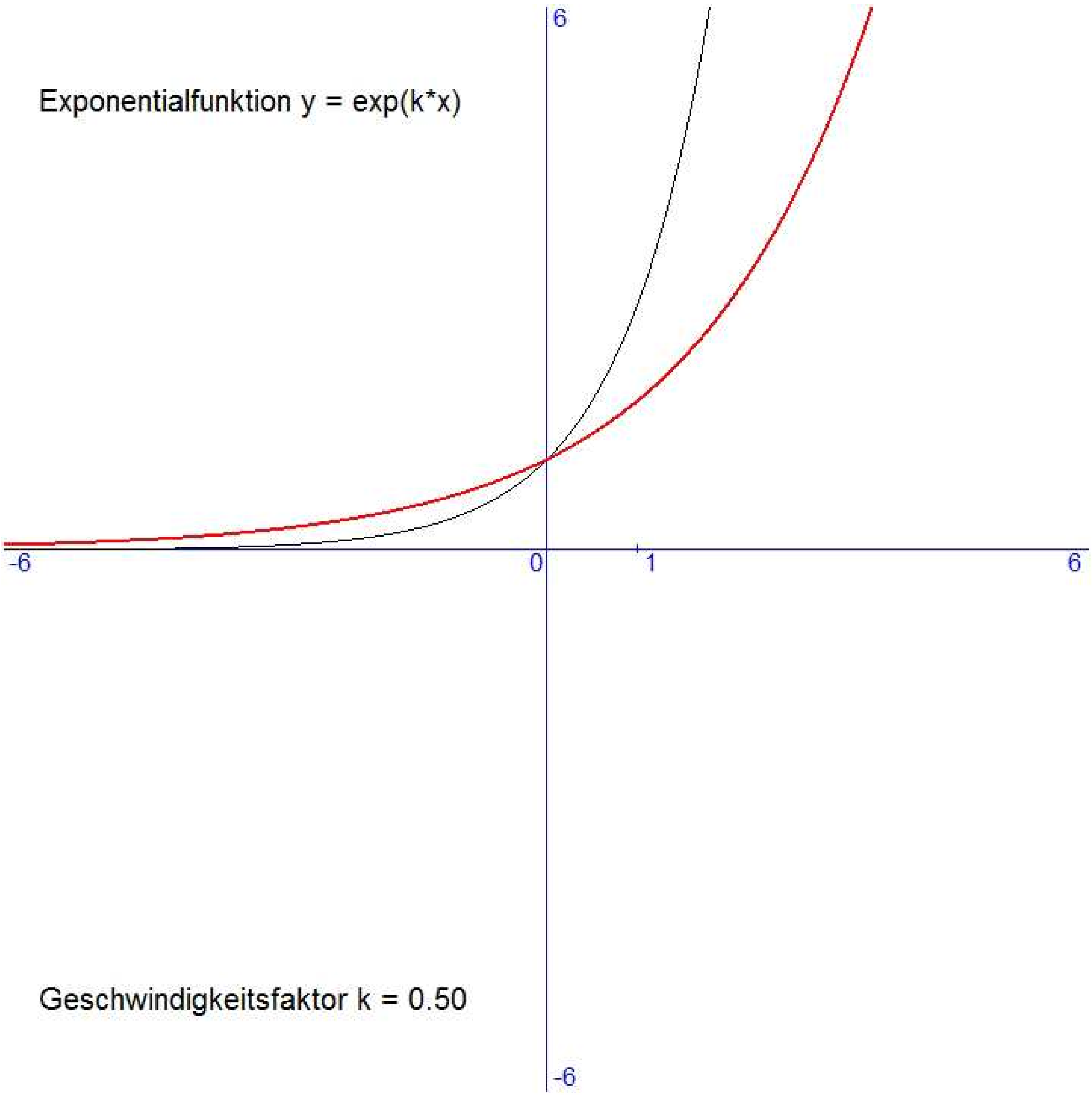


(8) Exponentialfunktion y = exp(k*x)

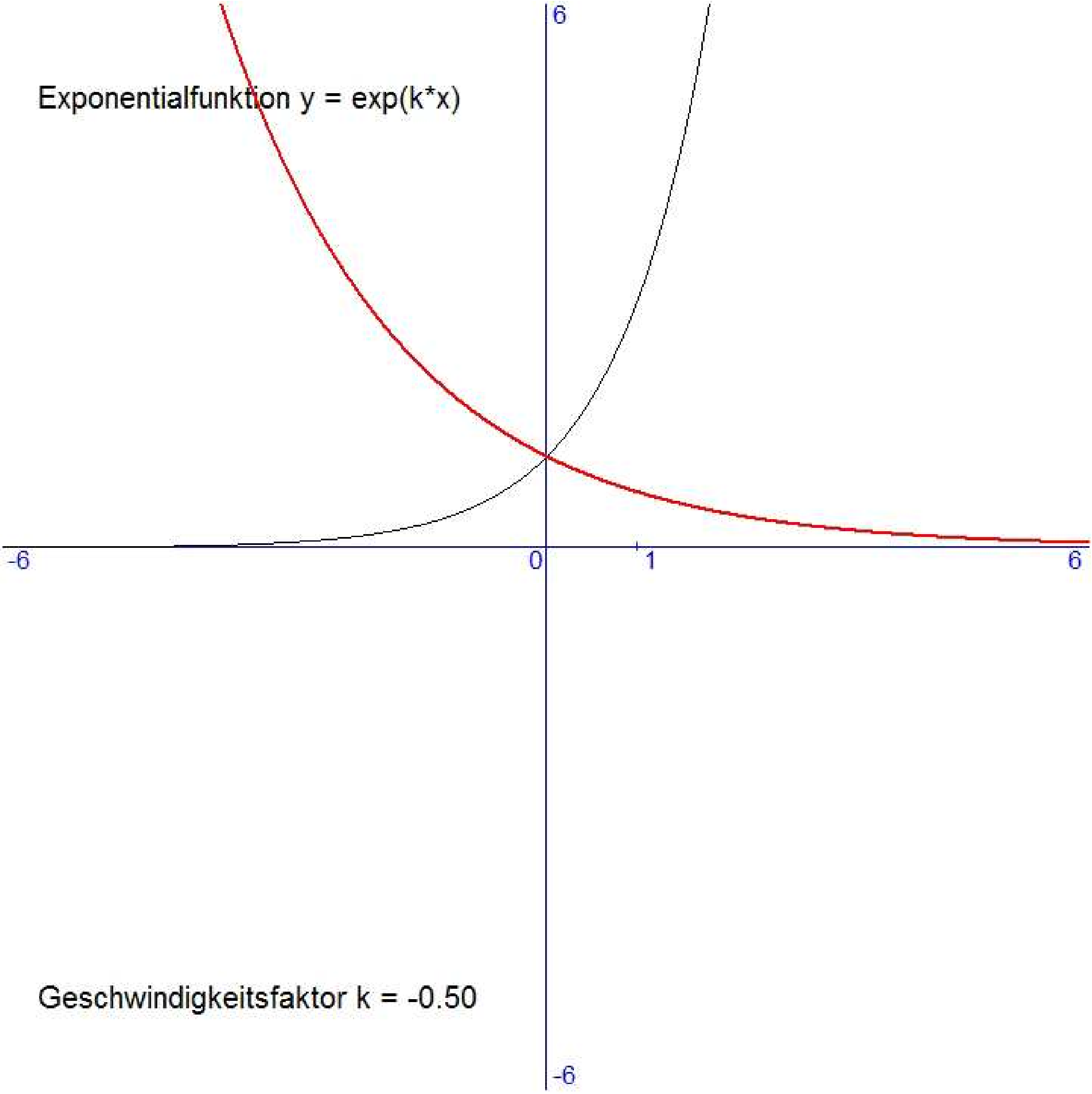
Die Funktion y = exp(k*x) entsteht durch Hintereinanderausführen der Funktion g(x) = k*x und der natürlichen Exponentialfunktion.

Für k > 0 ist die Kurve streng monoton steigend.
Für k = 0 ist die Kurve konstant (exp(0) = 1).
Für k < 0 ist die Kurve streng monoton fallend.

Der Betrag der Konstanten k bestimmt daher die Stärke der Zu- oder Abnahme und heißt daher auch Wachstumsgeschwindigkeit.



Monoton fallende Exponentialfunktion:



(9) Gedämpfte Schwingungen: y = a * exp(k*x) * sin(b*x+c)

Die gedämpfte Schwingung y = a * exp(k*x) * sin(b*x+c) entsteht durch die Multiplikation einer periodischen Sinusfunktion (sin) mit einer fallenden Exponentialfunktion (exp).

a ... Amplitude (maximale Schwingungsweite)
b ... Frequenz (Anzahl der Schwingungen innerhalb 2*¶)
c ... Phasenverschiebung im Bogenmaß (2*¶ = 6.2832 ... 360°)
k ... Wachstumsfaktor (k > 0) bzw. Dämpfungsfaktor (k < 0)

Hinweis: Durch geeignete Wahl der Konstanten (a, b, c, k) können ungedämpfte Schwingungen (k = 0) dargestellt und die Bedeutung von Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung gezeigt werden.