GRUNDLAGEN der LOGIK

Die Logik ist die Wissenschaft vom formal richtigen Denken. Um zu erläutern, was damit gemeint ist, sollen zunächst zwei Beispiele angegeben werden.

Beispiel 1.1: Immer wenn es regnet (a), dann ist es nass (b). Es ist nicht nass (¬b).
Also regnet es nicht (¬a).

Beispiel 2.1: Kein Raucher lebt gesund (a). Einige Sportler rauchen (b).
Also leben nicht alle Sportler gesund (c).

Beide Beispiele bestehen aus einer Verknüpfung von sprachlichen Aussagen, welche sicherlich von jedem Leser als folgerichtig bewertet wird. Die Logik versucht nun aufzudecken, worin diese **Folgerichtigkeit** besteht. Zur Erläuterung sollen zwei weitere Beispiele angegeben werden.

Beispiel 1.2: Immer wenn es regnet (a), dann ist es nass (b). Es ist nass (b).
Also regnet es (a).

Beispiel 2.2: Kein Raucher lebt gesund (a). Einige Sportler sind Raucher (b).
Also lebt kein Sportler gesund (c).

Bei näherer Analyse wird man unschwer erkennen, dass bei diesen Beispielen eine zwingende Folgerichtigkeit nicht vorliegt. Zur Abrundung dieser Gedanken noch zwei letzte Beispiele.

Beispiel 1.3: Immer wenn es regnet (a), dann ist es trocken (b). Es regnet (a).
Also ist es trocken (b).

Beispiel 2.3: Alle Raucher leben gesund (a). Einige Sportler sind Raucher (b).
Also leben einige Sportler gesund (c).

In diesen beiden letzten Beispielen liegt der etwas verwirrende Tatbestand vor, dass sie zwar formal folgerichtig sind, aber inhaltlich sind sie schlicht und einfach falsch. Anhand dieser sechs Beispiele sollen die Arbeitsweisen des logischen Denkens analysiert werden.

(1) Der Prozess der Formalisierung

Zunächst muss einmal der Prozess der Formalisierung näher erklärt werden. Dabei werden in einem Satzgefüge (Aussagenverknüpfung) alle einzelnen Sätze (Aussagen) durch Variable (a,b,c, d, ...) ersetzt. Für die Verknüpfungsoperationen werden logische Konstante (die so genannten **Junktoren** UND, ODER, WENN-DANN, NICHT, ...) eingesetzt.

Mit einer solchen Schreibweise hat Beispiel 1.1 folgendes formale Aussehen:

Beispiel 1.1: Wenn ((Wenn a, dann b) und (nicht b)), dann (nicht a).

Wird die Folgerung (Wenn-dann) durch das Symbol $\rightarrow$, die Konjunktion (und) durch $\wedge$, die Negation (nicht) durch $\neg$ gekennzeichnet, so lautet die vollständige Formalisierung:

Beispiel 1.1: $((a \rightarrow b) \wedge \neg b) \rightarrow \neg a$

Beispiel 1.2: $((a \rightarrow b) \wedge b) \rightarrow a$

Beispiel 1.3: $((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b$

Die Beispiele 2.x haben hingegen alle dasselbe einfache formale Grundgerüst: $(a \wedge b) \rightarrow c$

Im Gegensatz zu den Beispielen 1.x wird die Folgerichtigkeit der Beispiele 2.x nicht durch die äußere Verknüpfung von Aussagen begründet, sondern durch die innere Struktur der einzelnen Aussagen. Darunter versteht man die formalen Beziehungen (Relationen), in denen die Begriffe innerhalb einer Aussage zueinander stehen.

Die innere Grundstruktur von jedem Satz besteht in der Zuordnung eines Prädikatbegriffes (P) zu einem Subjektbegriff (S). Symbolisch schreibt man dafür S * P. Diese Zuordnung kann in ihrer Qualität bejahend oder verneinend sein, in ihrer Quantität kann sie für alle Individuen einer Grundmenge (Gültigkeitsbereich) oder nur für einige (d.h. mindestens eines) gelten. Diese Sachverhalte werden durch eigene Operationszeichen, die so genannten **Quantoren** dargestellt. Im ersten Fall spricht man von einer All-Aussage (für alle x, Alloperator $\forall x$), im zweiten Fall von einer Existenz-Aussage (für mindestens ein x, Existenzoperator $\exists x$).

Für den Allquantor $\forall x$ wird auch das Symbol $\wedge x$ und für den Existenzquantor $\exists x$ das Symbol $\vee x$ verwendet.

In dem einfachen Satz „Alle Meschen sind sterblich“ sind die „Menschen“ das logische Subjekt S und „sterblich zu sein“ das logische Prädikat P. Die Symbole S und P bezeichnen die Umfänge der gemeinten Begriffe, d.h. die Menge jener Individuen, auf welche der gemeinte Begriffsinhalt zutrifft. Im Sinne einer elementaren Mengenlehre kann dann der Satz durch „S ist eine Teilmenge von P“, also durch $(S \subset P)$ formalisiert werden. Mithilfe von Quantoren und Junktoren ist die entsprechende Formalisierung etwas komplexer: $\forall x$: $(x \in S) \rightarrow (x \in P)$. Dabei symbolisiert das Zeichen $\in$, dass ein Element x in einer Menge S enthalten ist. Eine ausführliche Beschreibung dieser Formalisierung würde lauten: Für alle Elemente x einer gegebenen Grundmenge gilt, wenn x in der Menge S liegt, dann liegt x auch in der Menge P.

In der **elementaren Mengenlehre** unterscheidet man folgende Verbindungen von gegebenen Mengen A,B,C, ... zu neuen Mengen: Der Durchschnitt $A \cap B$ besteht nur aus jenen Elementen, die sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten sind. Die Vereinigung $A \cup B$ besteht aus allen Elementen, die in der einen oder in der anderen Menge liegen. Eine Teilmenge T einer Grundmenge G existiert dann, wenn alle Elemente der Teilmenge auch Elemente der Grundmenge sind $(T \subset G)$. Die Elemente, die zwar in der Grundmenge G, nicht aber in der Teilmenge T liegen, bilden die so genannte Komplementärmenge T´. Jene Elemente, die in der Menge A, nicht aber in der Menge B liegen, bilden die Differenzmenge A\B. Schließlich werden zur Darstellung einer Menge deren Elemente in einer geschweiften Klammer (Mengenklammer) aufgezählt; z.B. ist G = {2,4,6,8} die Menge aller geraden, natürlichen Zahlen, welche kleiner als 10 sind. Das Symbol {} bedeutet die leere Menge, in der kein Element vorhanden ist.

Mit diesen Werkzeugen der elementaren Mengenlehre kann Beispiel 2.1 ($a \wedge b \rightarrow c$) unschwer formalisiert werden. Dabei bedeutet M den Begriffsumfang der „Raucher“, P alle „gesund Lebenden“, und S sind die „Sportler“.

Beispiel 2.1: $(M \subset P') \wedge (S \cap M \neq \{\}) \rightarrow (S \cap P' \neq \{\})$

Die Aussage a bedeutet, dass M eine Teilmenge von P´ ist; b besagt, dass der Durchschnitt von S und M nicht leer ist; c bedeutet, dass auch der Durchschnitt von S und P´ nicht leer ist. Eine in diesem Sinne durchgeführte Formalisierung liefert für die Beispiele 2.2 und 2.3 folgende Strukturen:

Beispiel 2.2: $(M \subset P') \wedge (S \cap M \neq \{\}) \rightarrow (S \subset P')$

Beispiel 2.3: $(M \subset P) \wedge (S \cap M \neq \{\}) \rightarrow (S \cap P \neq \{\})$

Somit lassen sich in der Logik zwei Teilbereiche abgrenzen: Die **äußere Logik** (Junktorenlogik, Aussagenlogik), die sich mit der Verknüpfung von ganzen Aussagen zu Satzgefügen beschäftigt und die **innere Logik** (Quantorenlogik, Prädikatenlogik), die sich mit der Quantifizierung der Begriffszuordnungen innerhalb einzelner Aussagen beschäftigt. Im Folgenden sollen beide Teilgebiete der klassischen Logik kurz beschrieben werden.

Noch ein letztes Wort zum Prozess der Formalisierung. Die obigen Darlegungen zeigen, dass es wichtig ist zwischen Form und Inhalt zu unterscheiden. Die Form wird durch die logischen Operatoren (Junktoren und Quantoren) festgelegt. Der Inhalt einer einzelnen Aussage aber entzieht sich der formalen Logik. Ob es faktisch wahr ist, dass „alle Raucher ungesund leben“ kann aus rein formalen Gründen nicht entschieden werden. Hiezu muss beobachtet und gemessen werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **empirischer Verifizierung**, d.h. Überprüfung an der Erfahrungswirklichkeit. Die formale Gültigkeit (Allgemeingültigkeit) hingegen wird allein durch die formale Struktur einer Aussagenverknüpfung begründet. Es muss daher streng zwischen inhaltlicher (faktischer, empirischer) Wahrheit und formaler Wahrheit (Allgemeingültigkeit) unterschieden werden. Die Beispiele 1.3 und 2.3 sind offenkundig inhaltlich falsch, jedoch formal-logisch richtig.

(2) Grundzüge der Aussagenlogik (Junktorenlogik)

Die Aussagenlogik analysiert die formale Struktur von Aussagenverknüpfungen (Satzgefügen). Die einzelnen Aussagen werden dabei nicht aufgebrochen, ihr innerer Inhalt, also die Begriffszuordnung von Subjekt und Prädikat (S * P) wird nicht berücksichtigt. Die Aussagen werden als Ganzes durch Variable (a,b,c, ...) ersetzt. Von jeder Aussage wird angenommen, dass sie entweder WAHR (w) oder FALSCH (f) ist. Dies ist die Grundannahme der klassischen, zweiwertigen Logik. Über die innere Wahrheit einer Aussage entscheidet nicht die formale Logik, sondern die empirische Verifizierbarkeit. Für die Verknüpfung von Aussagen existieren bestimmte vorgegebene Operatoren, die **Junktoren**: Die Negation (nicht a, $\neg a$), die Konjunktion (a und b, $a \wedge b$), die Disjunktion (a oder b, $a \vee b$), die Antivalenz (entweder a oder b, $a \times b$), die Implikation (wenn a dann b, $a \rightarrow b$), die Äquivalenz (wenn a dann b, und umgekehrt, $a \leftrightarrow b$), die NOR-Verknüpfung (weder a noch b) und andere Aussagenvernüpfungen. Die Bedeutung der Junktoren wird durch ihre **Wahrheitstabellen** festgelegt. Diese Tabellen bestimmen den Wahrheitswert der Aussagenverknüpfung für die verschiedenen Belegungen der Einzelaussagen mit wahr und falsch.

Auf der folgenden Seite sind die Wahrheitstabellen für die wichtigsten Junktoren aufgelistet.

Die Wahrheitstabellen der wichtigsten Junktoren:

a	¬a
f	w
w	f

Die **NEGATION** (nicht a) ist dann wahr, wenn a falsch ist.
Sie ist dann falsch, wenn a wahr ist. Abkürzung: NOT, ¬.

Beispiel: *Das Kind weint. Das Kind weint nicht.*

a	b	a ∧ b
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Die **KONJUNKTION** (a und b) ist nur dann wahr,
wenn sowohl die eine als auch die andere Aussage wahr ist.
Abkürzung: AND, ∧.

Beispiel: *Der Hund bellt und das Kind weint.*

a	b	a ∨ b
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Die **DISJUNKTION** (a oder b) ist immer dann wahr,
wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.
Abkürzung: OR, ∨ (einschließendes ODER).

Beispiel: *Der Hund bellt oder das Kind schreit.*

a	b	a × b
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Die **ANTIVALENZ** (entweder a oder b) ist immer dann wahr,
wenn die beiden Aussagen entgegengesetzte Wahrheitswerte haben.
Abkürzung: XOR, × (ausschließendes ODER).

Beispiel: *Entweder ist die Luft kalt oder sie ist warm.*

a	b	a → b
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Die **IMPLIKATION** (aus a folgt b) ist nur dann falsch,
wenn a wahr und b falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie richtig.
Abkürzung: IMP, →.

Beispiel: *Wenn es regnet, dann ist es nass.*

a	b	a ↔ b
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Die **ÄQUIVALENZ** (a gleichwertig zu b) ist immer dann wahr,
wenn beide Aussagen denselben Wahrheitswert haben.
Abkürzung: EQU, ↔.

Beispiel: *Ein Dreieck ist rechtwinkelig. Im Dreieck gilt* $a^2 + b^2 = c^2$.

Die Gleichwertigkeit (L = R) bzw. Äquivalenz (L ↔ R) von zwei komplexen Aussagenverknüpfungen L und R kann folgendermaßen nachgewiesen werden. Man berechnet gemäß den Wahrheitstabellen für alle möglichen Belegungen der Teilaussagen mit den Werten WAHR (w) und FALSCH (f) die Wahrheitswerte von den beiden Aussagenverknüpfungen L und R. Stimmen diese für alle Belegungen überein, d.h. haben L und R immer denselben Wahrheitswert, dann sind L und R gleichwertig. Im Folgenden werden des Öfteren komplexe Aussagenverknüpfungen gleichgesetzt. Der Beweis dieser Gleichwertigkeiten kann mit obiger Methode leicht vom Leser nachvollzogen werden.

Sehr interessant ist die Wahrheitstabelle der **Implikation** (Folgerung). Bei der Implikation wird behauptet, dass immer wenn die Aussage a wahr ist, auch die Aussage b zutrifft. Das ist offenkundig der Fall, wenn beide Aussagen wahr sind (w→w). Wenn jedoch die Aussage a wahr und die Aussage b falsch ist (w→f), dann muss die behauptete Folgerung falsch sein. In den zwei anderen Fällen (f→w) und (f→f) kann über die Richtigkeit der behaupteten Folgerung nicht geurteilt werden. Als eine Grundregel der logischen Argumentation müssen alle jene Behauptungen, die nicht widerlegt werden können, als richtig anerkannt werden. Sowie in der Rechtssprechung gilt auch hier der Grundsatz „*in dubio pro reo*“, d.h. im Zweifelsfalle ist für den Angeklagten zu stimmen.

Der Leser möge sich diesen Sachverhalt an der Folgerung „*Immer wenn ein Zug vorbeifährt, dann dröhnen die Schienen*“ näher vor Augen führen, indem er für die Aussagen a und b die verschiedenen Wahrheitswerte w und f einsetzt und sich hierfür reale Sachverhalte vorstellt.

Mithilfe der Wahrheitstabellen, kann für jede Wahrheitsbelegung der Einzelaussagen der Wahrheitswert der gesamten Aussagenverknüpfung eindeutig berechnet werden. Dieses Entscheidungsproblem ist somit innerhalb der Aussagenlogik stets lösbar. Eine besondere Klasse von Aussagenverknüpfungen sind jene, welche bei jeder Belegung ihrer Einzelaussagen mit wahr oder falsch immer den Wert wahr erhalten. Solche Aussagenverknüpfungen heißen logisch **allgemein gültig**. Ihre Richtigkeit hängt somit nicht vom Inhalt der einzelnen Aussagen ab, sondern von der formalen Struktur ihrer Verknüpfung. Sie sind, unabhängig von der Erfahrungswelt, stets aus sich heraus wahr. Man bezeichnet sie daher auch als **Tautologien** (tautos = aus sich heraus). Solche Tautologien stellen somit die universellen Spielregeln unseres formal-richtigen Denkens dar.

Beispiel: *(a) Immer wenn es regnet, dann ist es nass.*
(b) Es ist nicht nass.

(c) Daher hat es nicht geregnet.

Diese Aussagenverküpfung **((a→b) ∧ ¬b) → ¬a** ist eine Tautologie, die als **Kontrapositionsregel** bezeichnet wird. Die Allgemeingültigkeit kann mithilfe der Wahrheitstabellen einfach nachgewiesen werden:

a	b	((a→b)∧ ¬b)→ ¬a
f	f	w, weil ((f→f)∧ ¬f)→ ¬f = ((w ∧ w)→ w) = (w → w) = w
f	w	w, weil ((f→w)∧ ¬w)→ ¬f = ((w ∧ f)→ w) = (f → w) = w
w	f	w, weil ((w→f)∧ ¬f)→ ¬w = ((f ∧ w)→ f) = (f → f) = w
w	w	w, weil ((w→w)∧ ¬w)→ ¬w = ((w ∧ f)→ f) = (f → f) = w

Zur Demonstration seien einige wichtige Tautologien angeführt, von denen wir viele im Alltag unbewusst verwenden.

(1) Regel vom ausgeschlossenen Dritten: (a ∨ ¬a)
(2) Regel vom zu vermeidenden Widerspruch: ¬(a ∧ ¬a)
(3) Regel von der doppelten Verneinung: a ↔ ¬(¬a)
(4) Deduktionsregel (bejahende Abtrennung): ((a → b) ∧ a) → b
(5) Kontrapositionsregel (verneinende Abtrennung): ((a → b) ∧ ¬b) → ¬a
(6) Erstes Vertauschungsgesetz: (a ∧ b) ↔ (b ∧ a)
(7) Zweites Vertauschungsgesetz: (a ∨ b) ↔ (b ∨ a)
(8) Erstes Verknüpfungsgesetz: (a ∧ b) ∧ c ↔ a ∧ (b ∧ c)
(9) Zweites Verknüpfungsgesetz: (a ∨ b) ∨ c ↔ a ∨ (b ∨ c)
(10) Erstes Verteilungsgesetz: (a ∧ b) ∨ c ↔ (a ∨ c) ∧ (b ∨ c)

(11) Zweites Verteilungsgesetz: $(a \vee b) \wedge c \leftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
(12) Regel vom Kettenschluss: $((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$
(13) Erste De Morgansche Äquivalenz: $\neg(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$
(14) Zweite De Morgansche Äquivalenz: $\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
(15) Äquivalenz und Implikation: $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a))$
(16) Antivalenz und Äquivalenz: $(a \times b) \leftrightarrow \neg(a \leftrightarrow b)$

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass einzelne Junktoren durch die Kombination anderer Junktoren äquivalent ersetzt werden können. Daraus ergibt sich die Entbehrlichkeit vieler Junktoren. So ist es möglich, die gesamte Aussagenlogik mithilfe der drei Grundjunktoren (NOT, AND und OR) darzustellen, die man auch eine Junktoren-Basis nennt. Dazu dienen folgende zusätzliche Äquivalenzen:

$(a \times b) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$ Antivalenz-Reduktion
$(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg a \vee b)$ Implikation-Reduktion

Man kann mithilfe der Tautologien alle Aussagenverknüpfungen auf die drei Grundjunktoren reduzieren und dann konjunktive Normalformen bilden. Diese bestehen aus Gliedern, die ihrerseits nur mehr die Junktoren $\neg$ und $\vee$ enthalten und mittels $\wedge$ verknüpft sind. Für die konjunktive Normalform von XOR gilt: $(a \times b) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$.

Man kann aber auch noch einen Schritt weiter gehen und alle Junktoren auf einen einzigen zurückführen, z.B. auf die NOR-Verknüpfung (weder a noch b). Diese ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen falsch sind. In allen anderen Fällen ist sie falsch.

a	b	a NOR b
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	f

Die **NOR-Verknüpfung** ist das Gegenteil der einschließenden Disjunktion. NOR = NOT OR.
Beispiel: *Es ist weder warm noch still hier.*

$(\neg a) \leftrightarrow$ (a NOR a) Negation-Reduktion
$(a \wedge b) \leftrightarrow$ (a NOR a) NOR (b NOR b) Konjunktion-Reduktion
$(a \vee b) \leftrightarrow$ (a NOR b) NOR (a NOR b) Disjunktion-Reduktion

Beweis der beiden letzten Aussagenverküpfungen:

a	b	(a ∧ b)	(a NOR a) NOR (b NOR b)	
f	f	f	w NOR w	f
f	w	f	w NOR f	f
w	f	f	f NOR w	f
w	w	w	f NOR f	w

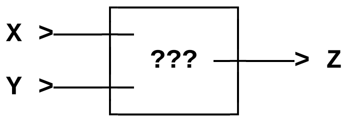
a	b	(a ∨ b)	(a NOR b) NOR (a NOR b)	
f	f	f	w NOR w	f
f	w	w	f NOR f	w
w	f	w	f NOR f	w
w	w	w	f NOR f	w

(3) Anwendungen in der Computertechnologie

Der Computer ist eine Maschine, welche der **Informationsspeicherung** und der **Informationsverarbeitung** dient. Er besteht aus einem Netzwerk von Schaltelementen (Schaltkreis). Ein Schalter, früher elektromechanisches Relais - heute elektronisches Bauelement, kann genau zwei Zustände annehmen. Wenn eingeschaltet ist, dann fließt ein schwacher elektrischer Strom (binäres Signal 1). Wenn ausgeschaltet ist, dann fließt kein Strom (binäres Signal 0). Diese Zweiwertigkeit wird als binär oder dual bezeichnet. Daraus ergibt sich zwingend, dass die Information in einem binären Code, der nur aus 0 und 1 besteht, verschlüsselt sein muss. Unter einem **Bit** versteht man diese binäre Informationseinheit (0 oder 1). Ein Byte umfasst 8 Bits und ein Kilobyte (KB) genau $2^{10} = 1024$ Bytes. Ein Megabyte (MB) besteht aus $2^{20} = 1048576$ Bytes.

Bei der Informationsspeicherung werden durch entsprechend verdrahtete Schaltelemente solche binären Signale gespeichert (passive Schaltkreise, binäre Speicherzellen).

Bei der Informationsverarbeitung werden durch entsprechend verdrahtete Schaltelemente solche binären Signale miteinander verknüpft (aktive Schaltkreise, Logikglieder).



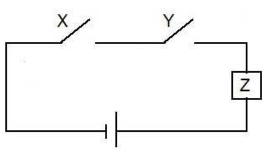
Blockbild eines Schaltkreises mit den zwei Eingängen X, Y und Ausgang Z.

In einem Schaltkreis werden die Signalzustände an den Eingängen durch die jeweilige Schaltung zu den Signalzuständen an den Ausgängen umgeformt.

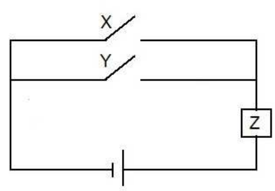
Offensichtlich liegt eine Entsprechung zwischen solchen Schaltungen und den Aussagenverbindungen unseres sprachlichen Denkens (und auch unserer neuronalen Gehirnstrukturen) vor. Das menschliche Denken besteht im Verknüpfen von einzelnen Gedanken. Aussagen sind das sprachliche Kleid der Gedanken. Eine einzelne Aussage kann entweder wahr (w=1) oder falsch (f=0) sein. Aussagen entsprechen daher einfachen binären Schaltelementen, die ebenfalls nur genau zwei Zustände annehmen können. Wird eine solche Aussagenverknüpfung mithilfe binärer Schaltelemente technisch nachgebaut, dann spricht man von einem logischen Schaltkreis.

Eine technische Realisierung der AND-Schaltung besteht aus einer Serienschaltung der zwei Eingangsschalter X und Y. Die Glühlampe Z stellt den Ausgang dar. Sie leuchtet nur dann, wenn beide Schalter geschlossen sind. Das entspricht nun genau der Wahrheitstabelle für die logische UND-Verknüpfung. Eine OR-Schaltung hingegen wird durch eine Parallelschaltung realisiert.

AND-Schaltung:



OR-Schaltung:

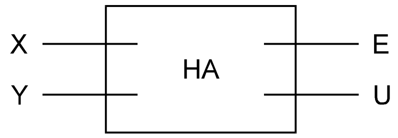


Logische Operationen verwenden wir täglich, wenn wir **Rechnungen** ausführen und auch **Entscheidungen** fällen. Genau das sind aber auch die beiden Hauptleistungen der zentralen Prozessoreinheit eines Computers.

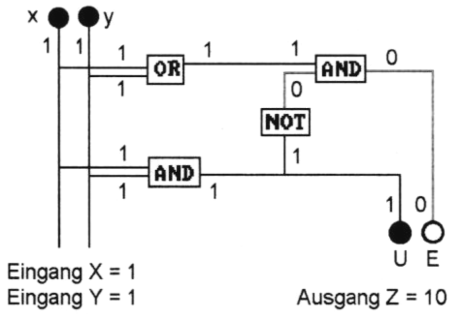
Rechnungen mit Zahlen kann man im Wesentlichen auf das **Addieren** von natürlichen Zahlen im binären Code zurückführen. Die Multiplikation ist nichts anderes als eine Addition von lauter gleichen Summanden (+x). Die Subtraktion entspricht einer Addition mit der Gegenzahl, und die Division ist nichts anderes als eine Subtraktion von lauter gleichen Subtrahenden (-x).

Das Grundproblem dabei, nämlich die Addition zweier Binärziffern (**Bits**), wird mithilfe der **Halbaddier-Schaltung** (HA) gelöst: 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=2. Der Zahl 2 entspricht im binären System die Ziffernfolge 10, die aus einer Einerstelle und aus einer Zweierstelle besteht. Die Addition von mehrstelligen Zahlen wird durch Kombination von HA-Schaltungen realisiert.

X	Y	U	E
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



Die Halbaddierschaltung (HA) und ihre Wertetabelle.

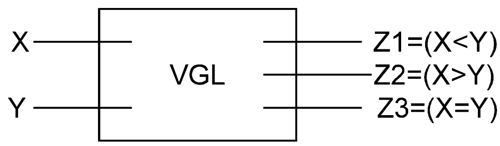


Es sind X und Y die Summanden. E ist die Einerstelle und U die Zweierstelle (Überlauf) der Summe. Es ist ersichtlich, dass sowohl E als auch U durch logische Schaltungen dargestellt werden können:

E = (X XOR Y) = $(X \vee Y) \wedge \neg(X \wedge Y)$
U = (X AND Y) = $(X \wedge Y)$

Entscheidungen können im Wesentlichen auf das **Vergleichen** von Zahlen im binären Code zurückgeführt werden. Das Grundproblem dabei, nämlich der Vergleich zweier Binärziffern, wird mithilfe von **Vergleichsschaltungen** (VGL) gelöst:

X	Y	<	>	=
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1



Dabei sind X und Y die beiden binären Ziffern. Die drei Ausgänge der Schaltung entsprechen den Aussagen (X<Y), (X>Y) und (X=Y). Auch diese Vergleichsschaltungen können durch logische Operationen dargestellt werden:

(X < Y) = (NOT X) AND Y
(X > Y) = X AND (NOT Y)
(X = Y) = X EQU Y = NOT (X XOR Y)

Somit lassen sich die beiden Hauptleistungen, das **Rechnen** und das **Entscheiden** auf die logischen Grundfunktionen zurückführen. Man kann aber noch einen Schritt weitergehen und alle logischen Grundfunktionen mithilfe einer einzigen realisieren, z.B. mittels NOR-Verknüpfung. Dieses Ergebnis ist von großer praktischer Bedeutung, denn dadurch genügt die serienmäßige Produktion von einem einzigen logischen Schaltkreis, um bei entsprechender Verdrahtung von tausenden solcher gleichartiger Bauelemente auf kleinster Fläche alle gewünschten Funktionen und Leistungen zu realisieren (IC = Integrated Circuit, Chip).

Neben diesen aktiven Schaltungen zur Informationsverarbeitung (Rechnen, Entscheiden) gibt es auch elektronische Schaltungen zur bitweisen Informationsspeicherung. Eine solche Speicherzelle für ein Byte besteht aus 8 binären Signalspeichern, welche stabil in einem eingestellten Zustand (0 oder 1) verbleiben, solange sie nicht neu gesetzt werden. Technisch können diese binären Signalspeicher mithilfe von zwei rückgekoppelten NOR-Schaltungen verwirklicht werden (RS-Flip-Flop, Latch). Die gesamte Hardware ist aus solchen elektronischen Schaltkreisen aufgebaut.

[4] Die Prädikatenlogik (Quantorenlogik)

Die Prädikatenlogik analysiert die innere Struktur von Aussagen. Diese besteht in der Zuordnung eines Prädikatbegriffes P zu einem Subjektbegriff S, symbolisiert durch S * P. Durch Angabe der Anzahl der Individuen x einer Grundmenge G, für welche die prädikative Zuordnung zutrifft (gültig ist), erfolgt eine Quantifizierung. Sie kann mit den beiden quantorenlogischen Operatoren $\forall x$ (Allquantor, für alle x) und $\exists x$ (Existenzquantor, für mindestens ein x) einfach beschrieben werden. Der Satz „Alle Menschen sind sterblich" kann durch **„$\forall x$: F(x)"** formalisiert werden, wobei x für die Menschen und F(x) für das Prädikat „sterblich zu sein" steht. Die Wahrheit einer quantorenlogischen **All-Aussage** ist dann gegeben, wenn die Aussage für jedes Element der Grundmenge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots.., x_N\}$ zutrifft, d.h. es gilt $F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge \ldots.. F(x_N)$, was einer mehrgliedrigen Konjunktion entspricht. Der Satz „Einige Menschen sind sterblich" kann durch **„$\exists x$: F(x)"** formalisiert werden. Die Wahrheit einer quantorenlogischen **Existenz-Aussage** ist dann gegegeben, wenn die Aussage für mindestens ein Element der Grundmenge zutrifft, d.h. es gilt $F(x_1) \vee F(x_2) \vee F(x_3) \vee \ldots.. \vee F(x_N)$, was einer mehrgliedrigen Disjunktion entspricht.

Ein quantorenlogischer Ausdruck heißt **allgemein gültig**, wenn er in allen nicht leeren Individuenbereichen gültig ist. Zum Nachweis einer solchen Allgemeingültigkeit genügen die einfachen Wahrheitstabellen der Junktorenlogik offensichtlich nicht mehr. Wie soll das Zutreffen einer Prädikation F(x) für große oder gar unendliche Grundmengen im Einzelnen überprüft werden? Hier muss ein völlig anderer Weg beschritten werden. Die Quantorenlogik wird mithilfe eines so genannten **Kalküls** dargestellt. Die elementaren Bestandteile eines Kalküls sind Grundzeichen (Atome), mit denen einschlägige Ausdrücke (Figuren) gebildet werden. Eine bestimmte Anzahl solcher Ausdrücke wird als Inventar (Grundfiguren, Axiome) vorgegeben. Schließlich gibt es noch bestimmte Grundregeln (Ableitungsregeln), die nichts anderes als Herstellungsvorschriften für weitere einschlägige Ausdrücke (Figuren) sind. Jeder im Axiomen-system des Kalküls herleitbarer Ausdruck wird als allgemein gültig angesehen. Ob jeder allgemein gültige Ausdruck immer auch herleitbar ist, das ist eine andere Frage. Das hängt davon ab, wie vollständig das zu Grunde gelegte Axiomensystem ist. Anstelle des Begriffs der Allgemeingültigkeit wird meistens der schwächere Begriff der Ableitbarkeit verwendet.

Die Grundzeichen eines quantorenlogischen Kalküls sind Junktoren, Aussagenvariable, Quantoren, Individualvariable, Prädikatenvariable und Klammern. Aus diesen werden die einschlägigen quantorenlogischen Ausdrücke gebildet. Sodann wird ein System von Axiomen und Ableitungsregeln festgelegt, die im Kalkül von vornherein (a priori) gelten sollen.

Im Laufe der historischen Entwicklung der mathematischen Logik sind verschiedene, gleichwertige Axiomensysteme für die Quantorenlogik aufgestellt worden. Eine ausführlichere Beschreibung dieser Kalküle würde den Rahmen einer Einführung überschreiten. Zur Demonstration sollen abschließend vier Äquivalenzen aufgelistet werden, die in allen bekannten quantorenlogischen Kalkülen als allgemein gültig angesehen werden und dort entweder als Axiome oder als herleitbare Ausdrücke vorkommen.

(1)	$\forall x$: F(x)	$\leftrightarrow$	$\neg(\exists x$: $\neg$F(x))	(alle = keines nicht)
(2)	$\forall x$: $\neg$F(x)	$\leftrightarrow$	$\neg(\exists x$: F(x))	(alle nicht = keines)
(3)	$\neg(\forall x$: F(x))	$\leftrightarrow$	$\exists x$: $\neg$F(x)	(nicht alle = mindestens eines nicht)
(4)	$\neg(\forall x$: $\neg$F(x))	$\leftrightarrow$	$\exists x$: F(x)	(nicht alle nicht = mindestens eines)

An den Kalkül der Quantorenlogik werden bestimmte Anforderungen gestellt. Das Axiomensystem soll widerspruchsfrei sein, d.h. es dürfen nicht eine Aussage a und ihr Gegenteil $\neg$a herleitbar sein. Das System soll konsistent sein, d.h. alle ableitbaren Aussagen sollen auch allgemein gültig sein. Die Axiome des Systems sollen voneinander unabhängig sein.

Neben der Widerspruchsfreiheit, Konsistenz und Unabhängigkeit sind die Entscheidbarkeit und die Vollständigkeit weitere wichtige Kriterien. Entscheidbarkeit liegt dann vor, wenn von jedem quantorenlogischen Ausdruck entschieden werden kann, ob er allgemein gültig ist oder nicht. Vollständigkeit bedeutet, dass jeder allgemein gültige Ausdruck im Axiomensystem herleitbar ist.

Grundsätzlich können über Individuen **x** ausgesagte Prädikate **F** entweder Eigenschaften (Attribute, z.B. „Herwig ist intelligent.“) oder Beziehungen (Relationen, z.B. „Herwig ist der Sohn von Alois.“) sein. Weil der Kalkül der Quantorenlogik sich mit solchen Prädikaten beschäftigt, wird er auch Prädikatenkalkül genannt. Man kann diesen Kalkül nun derart erweitern, dass man auch Prädikate von Prädikaten zulässt. Alle metasprachlichen Ausdrücke, welche man mithilfe mehrstufiger Abstraktionen gewinnt, sind solche Prädikatenprädikate bzw. Prädikate zweiter Stufe. Typische Beispiele dafür sind die zwei mathematischen Begriffe „Zahl“ und „Symmetrie“. Der Begriff „Zahl“ wird nicht von Individuen ausgesagt, sondern von Mengen. Der Begriff „Symmetrie“ wird ebenfalls nicht von Individuen ausgesagt, sondern von Beziehungen. Auch Begriffe der Grammatik (z.B. Geschlecht, Fall, usw.) sind Prädikate der zweiten Stufe. Somit muss der einfache Prädikatenkalkül, der nur Prädikate der ersten Stufe enthält, von dem erweiterten Prädikatenkalkül, der auch Prädikatenprädikate enthält, unterschieden werden.

Der Wiener Mathematiker ***Kurt Gödel*** hat 1931 mit seinem Unvollständigkeitssatz bewiesen, dass es im erweiterten Prädikatenkalkül grundsätzlich immer einen allgemein gültigen Ausdruck geben wird, der im Axiomensystem nicht herleitbar ist. Der Mathematiker ***Alonzo Church*** hat 1936 mit seinem Unentscheidbarkeitssatz bewiesen, dass es im erweiterten Prädikatenkalkül grundsätzlich immer Audrücke gibt, von denen nicht entschieden werden kann, ob sie allgemeingültig sind oder nicht. Mit diesen beiden Sätzen hat die formale Logik einen gewissen Abschluss erreicht.

Logische Axiomensysteme finden vor allem in der Mathematik vorrangige Anwendung. So wurde für die Menge der natürlichen Zahlen von ***Giuseppe Peano*** (1894) ein Axiomensystem angegeben. ***David Hilbert*** (1934) enwickelte ein solches für die euklidische Geometrie. Schließlich müssen noch die „Principia Mathematica“ von ***A. Whitehead*** und ***B. Russel*** (1913) erwähnt werden, die eine Grundlegung der Mathematik mithilfe des formalen Logikkalküls darstellen.

Noch einige Überlegungen zur so genannten **Metasprache**. Die Sprache, mit der wir uns über die Welt und ihre Objekte unterhalten, heißt Objektsprache. Natürlich kann aber die Sprache selbst zum Gegenstand der Besprechung gemacht werden. Dies wird dann mit Metasprache bezeichnet. Jedes grammatikalische Beschreibungssystem einer Sprache ist selbst eine Metasprache. Um nicht Meta-Meta-Sprachen einzuführen, belässt man es grundsätzlich bei **einer** Metasprache. Dass die Trennung von Objektsprache und Metasprache sinnvoll ist, zeigen Sätze wie „Lang ist kurz“ oder „Ich lüge jetzt.“ Rein objektsprachlich stellen solche Sätze in sich einen klaren Widerspruch dar: Wenn man sie als „wahr“ annimmt, dann erweisen sie sich als „falsch“. Nimmt man sie als „falsch“ an, dann erweisen sie sich als „wahr“. Dieser Widerspruch kann durch entsprechende metasprachliche Formulierungen aufgehoben werden: „Die Länge des Eigenschaftswortes <lang> ist kurz.“ oder „Der <Satz>, den ich damals gesagt habe, war gelogen.“

Der Mathematiker ***Bertrand Russel*** hat 1903 gezeigt, dass auch in der naiven Mengenlehre bestimmte Widersprüche (Paradoxien) auftreten können. Normale Mengen können sich nicht selbst als Element enthalten. Wenn man jedoch die Existenz einer „Menge aller normalen Mengen“ zulässt, dann wird es paradox. In der folgenden Geschichte steckt genau diese Paradoxie: Ein Barbier schließt im alten Griechenland mit dem Bürgermeister eines Dorfes einen Vertrag ab, genau jene Dorfbewohner zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Als er am Ende des Jahres den Bürgermeister aufsucht, um seinen Gehalt zu fordern, verweigert dieser die Bezahlung mit der Begründung, er habe seinen Vertrag nicht eingehalten. Er selbst habe sich nämlich rasiert und er sollte laut Vertrag doch nur jene rasieren, die es nicht selbst tun.

Der Barbier erkennt seinen offenkundigen Fehler und eilt von dannen. Im nächsten Jahr engagiert er einen Freund, der ihn immer rasiert. Als der Barbier zum Jahresende wieder zum Bürgermeister kommt, verweigert dieser ihm abermals die Bezahlung mit der Begründung, er habe wieder nicht den Vertrag eingehalten: als Dorfbewohner, der sich nicht selbst rasiert, muss er sich laut Vertrag rasieren. Was hätte der arme Barbier tun sollen?

Die Geschichte vom Advokaten. Ein junger Mann im alten Griechenland beschließt bei einem großen Gelehrten die Kunst der Rechtsprechung zu erlernen. Sie schließen folgenden Vertrag ab: der Schüler muss erst dann das Schulungsgeld an den Lehrer bezahlen, wenn er selbst seinen ersten Prozess gewonnen hat. Nach dem Ende der Lehrzeit jedoch führt der Schüler keinen Prozess. Nun verklagt ihn sein ehemaliger Lehrer mit der Argumentation, dass er auf jeden Fall sein Geld zu erhalten habe. Gewinnt er nämlich seine Klage, so bekommt er von seinem Schüler das Geld auf Grund des Gerichtsurteils. Verliert er seine Klage, so gewinnt sein Schüler seinen ersten Prozess und auf Grund des Vertrages erhält der Lehrer sein Geld. Auf diese Argumentation des Lehrers erwidert der Schüler seinerseits, dass sein Lehrer auf keinen Fall sein Geld erhalten wird. Gewinnt dieser nämlich seine Klage, so hat der Schüler seinen ersten Prozess verloren und muss laut Vertrag nicht zahlen. Verliert der Lehrer aber seine Klage, so muss der Schüler nach dem Spruch des Gerichtes auch nichts bezahlen. Wer von den beiden hat nun Recht?

(5) Traditionelle Schlusslehre (Syllogistik)

Die traditionelle Schlusslehre wurde schon von dem griechischen Philosophen ***Aristoteles*** in der Antike begründet und stellt sich aus moderner Sicht als begrenztes Teilgebiet der Quantorenlogik dar. Sie beschäftigt sich mit dreiteiligen Aussagenverknüpfungen der Form ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$).

Beispiel:
(a) Kein Raucher [M] lebt gesund [P].
(b) Einige Sportler [S] rauchen [M].
———————————————
(c) Nicht alle Sportler [S] leben gesund [P].

[S] Subjektsbegriff
[M] Mittelbegriff
[P] Prädikatsbegriff

Die Aussagen **a**, **b** heißen Prämissen (Vordersätze), die Aussage **c** heißt Konklusion (Schlusssatz). In den drei Aussagen kommen drei Begriffe (S, M, P) vor. Wichtig ist dabei, dass in der einen Prämisse dem Subjektsbegriff (**S**) ein Mittelbegriff (**M**) zugeordnet wird, und in der anderen Prämisse dem Mittelbegriff (**M**) ein Prädikatsbegriff (**P**). In der Konklusion wird dann dem Subjekt (**S**) das Prädikat (**P**) zugewiesen. Der Mittelbegriff spielt also, seinem Namen gemäß, eine Vermittlerrolle, indem er dem Subjekt das Prädikat zuführt. Solche dreiteilige Schlüsse heißen auch **Syllogismen**. Zur Demonstration diene das obige Beispiel. Eine Formalisierung liefert dann nachfolgende Struktur, wo das Symbol * die Begriffszuordnung bezeichnet, „Raucher“ den Mittelbegriff, „Sportler“ das Subjekt und „gesund leben“ das Prädikat darstellen.

$$\mathbf{(M * P) \wedge (S * M) \rightarrow (S * P)}$$

Nach Aristoteles werden bei der Begriffszuordnung in einer Aussage zwei Kategorien benötigt, die **Qualität** und die **Quantität**. Der Qualität entsprechend gibt es affirmative (bejahende) und negative (verneinende) Urteile. Der Quantität entsprechend gibt es universelle (allgemeine) und partikuläre (teilweise) Urteile. Durch deren Kombination können vier verschiedene Urteilsformen (Modi) unterschieden werden, welche durch die Vokale a, i, e und o gekennzeichnet sind. Diese sind der jeweils erste und zweite Vokal der Worte ***affirmo*** (ich bejahe) und ***nego*** (ich verneine). Zur Illustration werden für jeden Modus Beispiele angegeben, und dann werden diese in der Mengenlehre und in der Quantorenlogik formalisiert.

(1) allgemein bejahend (a): *Alle Schüler sind fleißig.*
(2) teilweise bejahend (i): *Einige Schüler sind fleißig.*
(3) allgemein verneinend (e): *Alle Schüler sind nicht fleißig.* (*Kein Schüler ist fleißig.*)
(4) teilweise verneinend (o): *Einige Schüler sind nicht fleißig.* (*Nicht alle Schüler sind fleißig.*)

Die Prädikation S(x) bedeutet dabei, dass x ein Element einer Menge S ist ($x \in S$). Übersetzt man diese Aussagenstrukturen in die Sprache der elementaren Mengenlehre, dann entsprechen die Begriffsumfänge den Mengen, und die Urteilsmodi kennzeichnen die Beziehungen, welche zwischen den einzelnen Mengen bestehen.

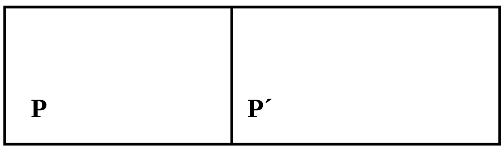
Wichtige Mengenoperationen: $\in$ = Element von, $\subset$ = eine Teilmenge von, $\cap$ = Durchschnitt, $\cup$ = Vereinigung, P´ = Komplementärmenge von P, Q \ R = Differenzmenge, {} = leere Menge.

(1) allgemein bejahend (a): S a P, $(S \subset P)$, $\forall x: (S(x) \rightarrow P(x))$
(2) teilweise bejahend (i): S i P, $(S \cap P) \neq \{\}$, $\exists x: (S(x) \wedge P(x))$
(3) allgemein verneinend (e): S e P, $(S \subset P')$, $\forall x: (S(x) \rightarrow \neg P(x))$
(4) teilweise verneinend (o): S o P, $(S \cap P') \neq \{\}$, $\exists x: (S(x) \wedge \neg P(x))$

Mit diesen Werkzeugen kann nun obiges Beispiel formalisiert werden:

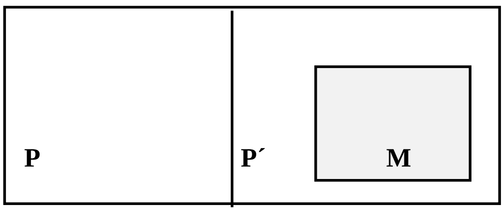
$(M\ e\ P) \wedge (S\ i\ M) \rightarrow (S\ o\ P)$ Syllogistik
$(M \subset P') \wedge (S \cap M \neq \{\}) \rightarrow (S \cap P' \neq \{\})$ Mengenlehre
$\forall x: (M(x) \rightarrow \neg P(x)) \wedge \exists x: (S(x) \wedge M(x)) \rightarrow \exists x: (S(x) \wedge \neg P(x))$ Quantorenlogik

Mengendiagramme bieten für diese abstrakte Formalisierung eine anschauliche und übersichtliche Hilfe. Die Welt aller denkbaren Objekte (Grundmenge G) wird komplementär in „gesund (P) und ungesund Lebende (P´)“ aufgeteilt:



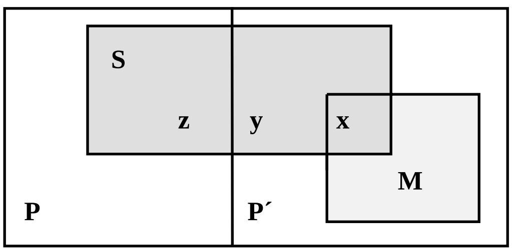
Mengendiagramm: $G = P \cup P'$

In der ersten Prämisse werden die „Raucher“ (M) als eine Teilmenge der „ungesund Lebenden“ (P´) ausgewiesen („Kein Raucher lebt gesund.“):



Mengendiagramm: $M \subset P'$

In der zweiten Prämisse wird behauptet, dass es „einige rauchende Sportler“ gibt, also dass der Durchschnitt der „Raucher“ (M) und der „Sportler“ (S) nicht leer ist:



Mengendiagramm: $S \cap M \neq \{\}$
Ergebnis: $(M \subset P') \wedge (S \cap M \neq \{\}) \rightarrow (S \cap P' \neq \{\})$

Möglichkeiten für Sportler S:
x = rauchende, ungesund Lebende
y = nicht rauchende, ungesund Lebende
z = nicht rauchende, gesund Lebende

Aus dem dritten Diagramm ergibt sich automatisch die Aussage, dass auch der Durchschnitt der „Sportler“ (S) mit der Menge der „ungesund Lebenden“ (P´) nicht leer ist, also nicht alle Sportler gesund leben, weil es ja „rauchende Sportler“ gibt. Damit ist die Behauptung der Konklusion im System der Mengenlehre hergeleitet und die formale Allgemeingültigkeit dieses dreiteiligen Schlusses nachgewiesen.

In dem allgemeinen Syllogismus-Schema $(M * P) \wedge (S * M) \rightarrow (S * P)$ gibt es für die Begriffszuordnung 4 Möglichkeiten (a, e, i, o). Dadurch können $4^3 = 64$ verschiedene Syllogismus-Formen gebildet werden. Durch systematische Überprüfung mithilfe der elementaren Mengenlehre kann wie in obigem Beispiel nachgewiesen werden, dass von diesen 64 möglichen Syllogismusformen genau vier allgemein gültig sind. Diese werden mit den Fantasienamen B**a**rb**a**r**a**, D**arii**, C**e**l**are**nt und F**e**r**io** bezeichnet, wobei die Vokale in jedem Merkwort die Urteilsmodi der einzelnen Aussagen angeben. Das obige Beispiel ist in dieser Nomenklatur ein Ferio-Schluss. Der interessierte Leser möge zu den anderen drei allgemein gültigen Syllogismus-Formen jeweils ein passendes Beispiel finden und ihre Allgemeingültigkeit mithilfe der Mengenlehre nachweisen.

Schließlich kann noch die Stellung des Mittelbegriffes in beiden Prämissen variiert werden, wodurch sich vier verschiedene Schlussfiguren ergeben:

M * P	P * M	M * P	P * M
S * M	S * M	M * S	M * S
———	———	———	———
S * P	S * P	S * P	S * P

Werden in diese vier Syllogismus-Figuren sämtliche Variationen der 4 Urteilsmodi eingesetzt, so erhält man 4 x 64 = 256 verschiedene Syllogismus-Formen. Davon erweisen sich jedoch nur 19 als allgemein gültig.

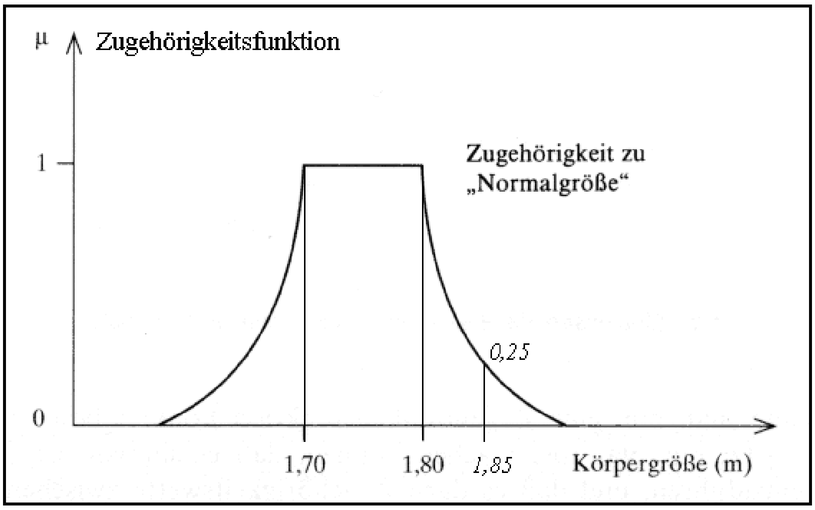
Alle allgemein gültigen dreiteiligen Schlüsse von der Form eines Syllogismus können mithilfe der elementaren Mengenlehre abgeleitet werden. Weil die Mengenlehre mit dem quantorenlogischen Prädikatenkalkül beschrieben werden kann, ist es auch möglich jeden Syllogismus als quantorenlogische Formel darzustellen.

Dadurch erweist sich die traditionelle Schlusslehre (Syllogistik) als ein Teilgebiet der allgemeineren Quantorenlogik. Die herausragende Bedeutung der Syllogistik liegt darin, dass der Mensch beim schlussfolgernden Denken sehr häufig die allgemein gültigen Syllogismus-Formen besonders der ersten Schlussfigur (Barbara, Darii, Celarent, Ferio) verwendet, und dies täglich!

(6) Fuzzy-Logik

Im Gegensatz zur klassischen zweiwertigen Logik, wo jede Aussage entweder **falsch** (0) oder **wahr** (1) ist, besteht unser Wissen oft aus unscharfen Aussagen (unsicheres Wissen). Als Beispiel seien drei Sätze angeführt: „*Herr Meier ist kahlköpfig*“, „*Herr Meier hat eine normale Körpergröße*“ und „*Herr Meier befindet sich in der Umgebung von Wien*“. Offenkundig kann diesen Aussagen kein eindeutiger Wahrheitswert im Sinne von falsch oder wahr zugeordnet werden. Ab wie vielen Haaren spricht man von einer Glatze, was ist normal, und wo beginnt die Umgebung von Wien? Hingegen ist es durchaus plausibel, dass einer solchen **unscharfen Aussage** eine Wahrscheinlichkeit zukommt, welche beliebige reelle Zahlenwerte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Im ersten Fall könnte diese durch die prozentuelle Haarbedeckung des Schädels, im zweiten Fall durch die Abweichung vom Mittelwert und im dritten Fall durch die Entfernung von Wien definiert werden.

Was ist der Grund für unscharfe Aussagen? Der Grund für unsicheres Wissen sind **unscharfe Mengen**, bei denen die Frage nach der Zugehörigkeit eines Objektes zu einer solchen Menge nicht eindeutig mit nein (0) oder ja (1) beantwortet werden kann. Die Zugehörigkeit stellt sich dabei als Funktion μ(X) der Intensität einer bestimmten Eigenschaft X dar und kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen.



Die gegebene Grafik zeigt die **Zugehörigkeitsfunktion** μ(X) zu der unscharfen Menge der „Normalgröße“, wie sie durch statistische Erhebungen ermittelt werden könnte. Beispielsweise könnten von 100 Befragten alle 100 die X-Werte von 170cm bis 180cm als „normal“ betrachten, d.h. μ(X) = 1,00. Aber 25 bezeichnen eine Größe von X = 185cm auch noch als „normal“, d.h. μ(185) = 0,25.

Unscharfe Mengen werden auch als **fuzzy** (verschwommen) bezeichnet. In der so genannten **Fuzzy-Logik** wird zunächst eine Mengenlehre der unscharfen Mengen entwickelt und dann werden logische Verknüpfungen von unscharfen Aussagen analysiert. Die Fuzzy-Logik versucht also die Unschärfe zu formalisieren und passende Kalküle hierfür aufzustellen. Als Beispiel sei die allgemein gültige Deduktionsregel (modus ponens) der klassischen Aussagenlogik herangezogen: $\mathbf{((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b}$. Setzt man für a und b unscharfe Aussagen ein, dann ergibt sich auch eine unscharfe Schlussweise.

*Wenn ein Mensch wenige Haare hat, dann geht er selten zum Friseur (**a** →**b**).*
*Herr Meier hat nur mehr wenige Haare (**a**).*
----
*Herr Meier geht also selten zum Friseur (**b**).*

Das Problem des approximativen (näherungsweisen) Schließens ist die Quantifizierung. Nach dem Grad der Zugehörigkeit von Herrn Meier zur unscharfen Menge der Kahlköpfigen richtet sich die Häufigkeit seiner Friseurbesuche. Auf die entsprechenden Formalisierungen der Fuzzy-Logik kann hier nicht genauer eingegangen werden. Der interessierte Leser sei auf einschlägige Fachbücher verwiesen.

Der formale Kalkül der Fuzzy-Logik findet eine wichtige Anwendung in der Prozess-Steuerung. Im Gegensatz zur herkömmlichen Prozess-Steuerung, welche mithilfe präziser Differentialgleichungen beschrieben wird, gründet die Fuzzy-Regelung auf einer zutiefst menschlichen Beobachtung. Diese Beobachtung besteht darin, dass Menschen ihr Wissen zumeist nicht in mathematischen Differentialgleichungen repräsentiert haben, sondern in Form von einfachen natürlichsprachlichen Regeln. Und diese sind eben unscharf.

So orientieren sich Autofahrer, wenn sie vor einer Kurve bremsen, ja nicht an der exakten Berechnung von Reibungs- und Fliehkräften, sondern an einfachen Faustregeln wie „***Wenn der Radius der Kurve zu klein ist für die Geschwindigkeit meines Autos, dann muss ich bremsen***“.

In einem Fuzzy-System wird eine Basis von einigen solcher unscharfen Regeln verwendet und auf Grund der Quantifizierung von Kurvenkrümmung und Fahrgeschwindigkeit die Intensität der passenden Bremsstärke ermittelt. Dabei wird zunächst der Grad der Zugehörigkeit bestimmt, den die gemessenen Werte von Krümmung und Geschwindigkeit zu den unscharfen Mengen (z.B. „klein“ - „mittel“ - „groß“) aufweisen. Der zweite und entscheidende Schritt ist sodann die Festlegung, wie aus den ermittelten Zugehörigkeiten auf Grund der vorgegebenen unscharfen Regeln eine exakte Bremsstärke hergeleitet werden kann. Am Ende dieser Berechnungen erfolgt die Ausgabe einer präzisen Maßzahl für die erforderliche Bremsstärke, was dann einer scharfen Aussage entspricht (Defuzzyfizierung).

Ein Fuzzy-System stellt einen Kalkül dar, in welchem zunächst die Zugehörigkeiten zu unscharfen Mengen ermittelt und dann aus wenigen einfachen, unscharfen Regeln eine scharfe (d.h. präzise) Bewertung hergeleitet wird. Sehr viel versprechend scheint der Ansatz zu sein, die Fuzzy-Logik in der kognitiven Psychologie anzuwenden, denn der kognitive Prozess der Bewertung von Informationen erfolgt im Gehirn zumeist eher aus unscharfen Vorstellungen heraus, als aus messerscharfen Gedankenfolgerungen.

(7) Die Hypothesenbildung

Das menschliche Denken verwendet die allgemein gültigen Formeln der Logik als Werkzeuge zur Beweisführung. Generell wird dieses formal richtige Schlussfolgern als *Deduktion* bezeichnet. Zur Bildung von Hypothesen über die reale Welt werden aber auch andere Verfahren angewendet, die ihrerseits **nicht formal allgemeingültig** sind. Dazu zählen *Reduktion*, *Induktion* und *Analogieschluss*.

Hypothesen werden aufgestellt, um die Welt zu **erklären** und auch **Vorhersagen** zu ermöglichen. Dadurch erst gelingt es dem Menschen die Welt technisch zu beherrschen. Außerdem gewinnt er dadurch auch Sicherheit - was man erklären und vorhersagen kann, davor braucht man sich nicht zu fürchten.

Betrachtet man das nachfolgende Beispiel, so ist offensichtlich, dass es sich dabei um keine Tautologie, also eine allgemein gültige Aussagenverknüpfung handelt. Dennoch wird dieser Rückwärtsschritt vom Nachsatz auf den Vordersatz einer Folgerung gewagt, um eine mögliche Hypothese oder auch Erklärung für einen vorliegenden Tatbestand zu gewinnen. Dieser kommt jedoch dann nicht mehr **Wahrheit** zu, sondern nur mehr eine von anderen Faktoren abhängige **Wahrscheinlichkeit.**

Erstes Beispiel: *Immer wenn es regnet (a), dann ist es nass (b).*
Es ist jetzt nass (b).

Also hat es (möglicherweise) geregnet (a).

Diese Aussagenverknüpfung **((a → b) ∧ b) → a** wird als **Reduktion** bezeichnet und die Aussage **a** als hypothetische Erklärung von **b** herangezogen. Die Belegung **a** = f und **b** = w führt auf Grund der Wertetabelle der Implikation dazu, dass die gesamte Aussagenverbindung falsch wird, also ist die Reduktion nicht allgemein gültig:

a	b	((a→b)∧ b)→ a
f	f	w
f	w	f
w	f	w
w	w	w

Je mehr Zusatzinformationen die Hypothese **a** bestätigen (verifizieren), umso wahrscheinlicher wird sie. Ein einziges Gegenbeispiel (z.B. ein vorbeifahrender Spritzwagen hat Wasser versprüht) genügt, um die Hypothese zu widerlegen (falsifizieren).

Ein zweites Beispiel soll die Bedeutung der reduktiven Hypothesenbildung im Alltag augenfällig demonstrieren:

Immer wenn die Batterie leer ist (a), dann lässt sich das Auto nicht starten (b).
Das Auto kann jetzt nicht gestartet werden (b).

Also ist (möglicherweise) die Batterie leer (a).

Neben der **reduktiven Methode** wird sehr häufig auch noch die **induktive Methode** verwendet. Der Schluss vom Allgemeinen auf den Einzelfall $\forall x: F(x) \rightarrow \exists x: F(x)$ ist formal allgemein gültig. Seine Umkehrung hingegen nicht. Der Rückwärtsschritt von Existenzaussagen auf Allaussagen wird als Induktion bezeichnet. Eine solche Verallgemeinerung $\exists x: F(x) \rightarrow \forall x: F(x)$ wird immer wahrscheinlicher, je größer die Anzahl der Individuen x ist, auf welche das Prädikat F zutrifft.

Induktion: $\exists x: F(x) \rightarrow \forall x: F(x)$

Die **Induktion** ist die wichtigste Methode zur Bildung naturwissenschaftlicher Hypothesen über die Welt: Zunächst wird ein mathematischer Zusammenhang (Relation, Funktion) zwischen zwei wohl definierten Messgrößen X und Y in endlich vielen (n) Beobachtungen und Messungen festgestellt. Sodann wird dieser Zusammenhang auf alle mögliche Fälle verallgemeinert. Er bildet eine Hypothese, die umso wahrscheinlicher wird, je öfter sie verifiziert worden ist. Sehr gut und sehr oft bestätigte Hypothesen werden auch Naturgesetze genannt. Dennoch gelten sie nur bis auf Widerruf, d.h. solange sie nicht falsifiziert werden.

Als ein praktisches Beispiel sei das Fallgesetz in der Physik erwähnt. Dabei ist es von Interesse, welcher mathematische Zusammenhang zwischen der verstrichenen Zeit (t) und dem zurückgelegten Weg (s) eines fallenden Körpers besteht. Im Experiment werden nun zu vielen Fallzeiten die Fallwege exakt gemessen. Bei der mathematischen Analyse der endlich vielen Messpaare (t / s) entdeckt man die Beziehung, dass der Weg s proportional zum Quadrat der Zeit t ist ($s = k * t^2$). Verallgemeinert man diese Beziehung, wird aus der Hypothese ein Naturgesetz.

Ein drittes häufig angewendetes Verfahren ist der **Analogieschluss**: Stimmen zwei Objekte in mehreren Merkmalen überein, dann werden sie wahrscheinlich auch noch in anderen Merkmalen gleich sein. Der Analogieschluss kann als induktive Verallgemeinerung über der Menge der Merkmale F von zwei Objekten x und y aufgefasst werden:

Analogie: $\exists F: (F(x) \wedge F(y)) \rightarrow \forall F: (F(x) \wedge F(y))$

Dieses Verfahren mündet in die Hypothese einer Identität der zwei Objekte (x = y), wenn sie in allen ihren Merkmalen übereinstimmen.

Die Denkmethoden der **Reduktion, Induktion** und **Analogie** sind keine formal allgemein gültigen Verfahren. Sie stellen jedoch Werkzeuge dar, welche angewendet werden, um Hypothesen über die Welt zu gewinnen. Eine kritische Auseinandersetzung mit diesen Methoden erfolgt in der so genannten **Wissenschaftstheorie**, die die Vorgangsweisen wissenschaftlicher Erkenntnisbildung beschreibt.

(8) Beobachten und Messen

Die Basis jeder Wissenschaft besteht in der Datenerfassung durch Beobachtung und Messung. Bei jeder Messung wird einem Merkmal eines Objektes O eine reelle Zahl X als Messergebnis zugeordnet. Diese Zuordnung erfolgt mithilfe eines Messwerkzeuges (technisches Instrument oder psychologischer Test) und muss **eindeutig** und **relationentreu** sein. Eine solche Zuordnung heißt homomorphe Funktion (kurz Homomorphismus). Als Symbol für die Messfunktion wird der Buchstabe f verwendet, und man schreibt dann X = f (O), d.h. X ist eine Funktion von O. Unter Eindeutigkeit versteht man, dass einem Objekt nur eine Maßzahl zugeordnet werden kann. Die Relationentreue setzt voraus, dass in der Objektmenge eine Beziehung (Relation) B zwischen den Objekten besteht, und dass es auch in der Menge der Maßzahlen eine entsprechende Relation R gibt. Bei der Messung wird der Objektbeziehung die Zahlenbeziehung zugeordnet. Sind beispielsweise die Objekte O die Schüler einer Klasse und die Maßzahlen X ihre Körpergrößen, dann muss der Sachverhalt, dass Schüler O_1 physisch kleiner als Schüler O_2 ist, dazu führen, dass auch X_1 zahlenmäßig kleiner als X_2 ist. Die Messwerte müssen die Objektbeziehung getreu widerspiegeln. Das ist mit dem Begriff Homomorphismus bzw. Relationentreue gemeint.

Das Ergebnis dieser eindeutigen und relationentreuen Abbildung einer empirischen Menge in eine numerische Menge wird auch als **Skala** bezeichnet. Unter einer **zulässigen Transformation t** versteht man nun eine Funktion, welche zwar die Zahlenwerte X einer Skala verändert, nicht aber die zwischen ihnen bestehende Relation. Man schreibt symbolisch Y = t(X). So wird beispielsweise bei der Temperaturmessung die Celsius-Skala X durch eine lineare Funktion in die Fahrenheit-Skala Y transformiert: Y = 9/5 * X + 32 (d.h. 0°C = 32°F, 100°C = 212°F).

Entsprechend den zulässigen Transformationen unterscheidet man grundsätzlich vier verschiedene Skalentypen. Bei einer einfachen **Nominalskala** werden zum Zwecke bloßer Identifizierung den verschiedenen Objekten verschiedene Kennzahlen zugewiesen. Bei einer **Ordinalskala** liegt eine Rangordnung der Daten vor. Erlaubt sind alle Transformationen, welche diese Rangordnung nicht verändern, also alle monoton wachsenden Funktionen. So ist beispielsweise die quadratische Funktion $Y = X^2$ monoton wachsend, d.h. größeren X-Werten werden auch größere Y-Werte zugeordnet. Eine Anwendung der Transformation auf die X-Werte 1, 2, 3, 4, 5 ergibt die Y-Werte 1, 4, 9, 16, 25. Augenscheinlich bleibt dabei die „Kleiner“-Relation erhalten. Auf einer **Intervallskala** sind die Intervalle zwischen zwei direkt benachbarten Datenpunkten immer gleich groß (äquidistant), sodass beispielsweise die Differenz (5-4) das Gleiche bedeutet wie die Differenz (2-1). Alle linearen Transformationen Y = k * X + d ändern am Verhältnis dieser Differenzen nichts. Jedoch wird über die Lage des Nullpunktes nichts ausgesagt. Wird dieser Nullpunkt noch zusätzlich festgelegt, dann spricht man von einer **Verhältnisskala**. Auf ihr sind nicht nur die Verhältnisse der Differenzen, sondern auch die Verhältnisse der Skalenwerte selbst invariant. Als Transformationen sind nur proportionale Funktionen Y = k * X zulässig (Ähnlichkeitstransformationen). Erst Verhältnisskalen erlauben Aussagen wie die, dass ein Objekt doppelt so groß ist wie ein anderes. Bei reinen Intervallskalen sind solche Vergleiche nicht möglich.

Vom **Skalentyp der Messwerte** hängt auch ab, welche **statistischen Berechnungen** durchgeführt werden dürfen. So setzen Mittelwertbildungen offensichtlich Intervallskalen voraus. Das arithmetische Mittel aus drei Daten 2, 3, 4 kann nur dann mit 3 berechnet werden, wenn die Intervalle (3-2) und (4-3) als gleich groß vorausgesetzt werden. Bei Schulnoten, die bestenfalls Ordinalskalen zur Erfassung von Rangplätzen darstellen, werden von Lehrern und Schulbehörden regelmäßig Mittelwerte gebildet (bei Prüfungen, bei Stipendiengewährungen, usw.).

Wenn aber nicht einmal das Intervallskalenniveau bei Schulnoten sichergestellt ist, dann ist die Berechnung von arithmetischen Mittelwerten sinnlos. Dann sind aber auch die direkte Annahme einer Normalverteilung und weiterführende statistische Berechnungen wie Streuungen, Regressionen und Korrelationen fragwürdig.

In der Psychologie wird durch ein vorgelegtes Item (eine Frage, ein Bild) eine Reaktion der Versuchsperson (Vp) provoziert. Man unterstellt nun der Versuchsperson, dass sie psychische Merkmale (X_1, X_2, ...) aufweist, deren individueller Ausprägungsgrad für die jeweilige Antwort bestimmend ist. Nur das Reaktionsverhalten kann beobachtet oder gemessen werden. Daraus wird dann auf den Ausbildungsgrad der Merkmale rückgeschlossen.

Beispielsweise kann durch Beantwortung entsprechender Fragen festgestellt werden, dass die Menschen Heuschnupfen weniger fürchten als Lungenkrebs. Es lassen sich also Grade der Furcht unterscheiden. Folglich lässt sich die Rangordnung der Zahlen verwenden, um die verschiedenen Grade der Furcht vor Krankheiten zumindest auf einer Ordinalskala abzubilden. Aus solchen Rangreihen können mit Hilfe mathematischer Verfahren auch Intervallskalen entwickelt werden. Dann können auch höhere Methoden der Statistik verwendet werden, um die Daten weiter auszuwerten.

Die folgende Tabelle zeigt die wichtigsten Skalentypen (dabei werden die auf einer Skala f zulässigen Transformationen mit f´ bezeichnet).

Skalentyp	Nominalskala	Ordinalskala	Intervallskala	Verhältnisskala (auch: Ratio-Skala)
empirische Operationen	Bestimmung von Gleichheit und Ungleichheit	zusätzlich: Best. einer Rangfolge, z. B. $x > y > z$	zusätzlich: Intervalle gleich (z. B. $10-7 \approx 7-4$) willkürlich festgelegter Nullpunkt	zusätzlich: Bestimmung gleicher Verhältnisse (z. B. $\frac{x}{y} \approx \frac{k}{l}$); absoluter Nullpunkt
zulässige Transformationen	Umbenennung	nur: monoton steigende Transformationen	nur: lineare Transformationen: $f'(x) = v + u \cdot f(x)$ (wobei $u > 0$)	nur: Ähnlichkeitstransformationen $f'(x) = u \cdot f(x)$ (wobei $u > 0$)
statistische Maßzahlen (Beispiele)	Häufigkeit, Modalwert	zusätzlich: Median, Quartile, Prozentrangwerte	zusätzlich: arithmetisches Mittel ($\bar{x}$) Standardabweichung (s) Schiefe, Exzeß	zusätzlich: geometrisches Mittel, Variationskoeffizient
Zusammenhangsmaße	Kontingenzkoeffizient (C) Vierfelderkoeffizient (Phi)	zusätzlich: Rangkorr.-Koeffizient (Spearmans Rho, Kendalls Tau)	zusätzlich: Produkt-Moment-Korrelation (r) Regressionskoeffizient	
Beispiele	Numerierung von Fußballspielern, Kontonummern, Quantifizierung von dichotomen Merkmalen (z. B. Geschlecht)	Schulnoten, Richtersche Erdbebenskala, Testrohwerte	Temperatur (nach Celsius, Fahrenheit, Reaumur)	Länge, Masse, Zeit, Winkel, Temperatur (nach Kelvin)

Die wichtigsten Skalentypen

(9) Grundzüge der Wissenschaftstheorie

In den Gehirnen der Menschen werden die über die Sinnesorgane einströmenden Informationen zu einem Modell der Außenwelt (Realität) verarbeitet. Mit Hilfe der Sprache können die verschiedenen subjektiven Weltbilder anderen Menschen mitgeteilt und miteinander verglichen werden. Jene Teilbereiche, in denen eine Übereinstimmung erzielt wird, nennt man dann „objektive“ Erkenntnisse über die Welt. Viele sprachliche Aussagen beziehen sich aber nicht auf eine so verstandene äußere Realität, sondern sind Ausdruck innerer Befindlichkeiten oder auch Aufforderungen an andere Menschen etwas zu tun. Diese Symptom- und Signalfunktionen der Sprache sollen hier nicht berücksichtigt werden, sondern nur die Symbolfunktion, d.h. die deskriptive Beschreibung der Welt. Zur Illustration mögen folgende zehn Beispiele von menschlichen Aussagemöglichkeiten betrachtet werden:

[01] Gott ist der Schöpfer der Welt.
[02] Der Stephansdom ist das schönste Bauwerk in Europa.
[03] Wenn in einem Gleichstromkreis die Spannung U konstant ist, dann sinkt bei wachsendem Widerstand R die Stromstärke I.
[04] Der Zaubertrank des Medizinmannes macht unbesiegbar.
[05] Der Eisberg brennt.
[06] Ich habe die Zahl 5 gegessen.
[07] Der Umpf liegt im Slak.
[08] Die ist Planet Erde ein.
[09] Die Wurzel aus 2 ist keine Bruchzahl.
[10] Wenn eine Primzahl unteilbar ist, dann ist 6 eine Primzahl.

Eine genauere, inhaltliche Analyse dieser zehn Aussagen führt zu folgenden Ergebnissen:

[01] Das ist eine Glaubensaussage. Die verwendeten Begriffe sind nicht klar. Außerdem wird die Relation der Kausalität von ihrem Gültigkeitsbereich, nämlich der beobachtbaren Welt, wo sie feststellbar ist, auf einen diese Welt übergreifenden Bereich übertragen. Sie wird auf die Welt als Ganzes angewendet. Das ist sicherlich eine spekulative Verallgemeinerung.
[02] Das ist eine subjektive Wertaussage, die aus der Lebensgeschichte des Menschen resultiert.
[03] Das ist eine objektive Erkenntnis, weil alle Begriffe wohl definiert sind und ihre Beziehungen durch Beobachtung und Messung nachprüfbar sind (**empirisch verifizierbar**).
[04] Das ist eine subjektive Fantasieaussage, die verschiedenen Quellen entspringen kann, z.B. der Enttäuschung über verlorene Lebenskämpfe und der Sehnsucht nach einem magischen Wundermittel, welches Abhilfe schafft.
[05] Dieser Satz ist empirisch falsch, er widerspricht der realen Welterfahrung.
[06] Diese Aussage ist semantisch sinnlos, weil essbare Objekte und Zahlenbegriffe verschiedenen Abstraktionsstufen angehören. Durch ihre Zuordnung entsteht Sinnlosigkeit.
[07] Hier resultiert die offensichtliche Sinnlosigkeit aus der Verwendung von nicht wohl definierten und allgemein verständlichen Begriffen.
[08] Dieser Satz ist in seinem grammatikalischen Aufbau (Syntax) falsch, daher unverständlich.
[09] Hier handelt es sich um eine wahre Aussage, die durch folgerichtiges Denken nachprüfbar ist (**logisch beweisbar)**. Ein inhaltlicher Bezug zur empirischen Wirklichkeit fehlt jedoch.
[10] Dieser Satz ist schlicht und einfach logisch falsch.

Aus dieser kurzen Analyse haben sich zwei wesentliche Beurteilungskriterien herausgeschält: logisch und empirisch. „**Logisch**“ heißt folgerichtig denken. Die Spielregeln dafür werden in der mathematischen Logik erforscht. „**Empirisch**“ bedeutet die Rückführung eines Aussagegehaltes auf Beobachtungen und Messungen, über welche mithilfe der Sprache intersubjektiv Übereinstimmung erzielt werden kann. So lässt sich eine logische (formale) Wahrheit und Falschheit von einer empirischen (inhaltlichen) Wahrheit und Falschheit abgrenzen.

Der Kernpunkt einer Theorie der Wissenschaft ist die Frage nach der Qualität der wissenschaftlichen Erkenntnisse. Welche Aussagemöglichkeiten in der Vielfalt des menschlichen Sprachraumes können als wissenschaftliche Erkenntnisse bezeichnet werden? Aus der Analyse der oben angeführten Beispiele ergeben sich dafür die nachfolgenden Kriterien.

- ***Die sprachlichen Aussagen müssen syntaktisch richtig angeordnet sein.***
- ***Es dürfen nur wohl definierte Begriffe verwendet werden.***
- ***Einander direkt zugeordnete Begriffe müssen der gleichen Abstraktionsstufe angehören.***
- ***Die Aussagen müssen logisch widerspruchsfrei sein.***
- ***Realitätsbezogene Aussageninhalte müssen empirisch nachprüfbar (verifizierbar) sein***.

Diese strengen Kriterien werden aber nur von wenigen Aussagen erfüllt. Die meisten, der im Alltag geäußerten sprachlichen Sätze sind Glaubensaussagen, Wertaussagen, Wunschaussagen und Fantasieaussagen. Diese entziehen sich jedoch einer wissenschaftlichen Überprüfbarkeit. Dadurch kommt es zu einer Abgrenzung von Alltagssprache und Wissenschaft.

Was ist der Sinn einer Wissenschaft und wie ist Wissenschaft grundsätzlich aufgebaut? Dieser Aufbau kann in drei Phasen dargestellt werden:

Phase 1:	**Wissenschaftsbasis**	- Beobachtungen und Messungen liefern die Rohdaten der Welt.
Phase 2:	**Hypothesenbildung**	- Dabei werden Zusammenhänge zwischen den Daten hergestellt.
Phase 3:	**Hypothesenprüfung**	- Je öfter Hypothesen verifiziert werden, umso plausibler sind sie. Sie gelten nur, so lange sie nicht falsifiziert (widerlegt) werden.

Sinn und Zweck jeder Wissenschaft ist die Bildung von Hypothesen (Modellen) über Vorgänge in der Wirklichkeit. Dadurch kann für einen Weltbereich Folgendes geleistet werden: **Erklärung** und **Vorhersage** von Ereignissen und deren **technische Beherrschung**. Wissenschaftliche Erkenntnisse konstruieren somit Modelle der Welt, welche weitgehend abgesichert und verlässlich sind. Die Welt wird so erklärbar, vorhersagbar und daher beherrschbar. Diese Modelle werden als Vorlage für erfolgreiche Problemlösung und Lebensplanung verwendet. Das ist die Leistung aller Wissenschaften.

Die Methoden zur Bildung von Hypothesen sind die **Reduktion**, die **Induktion** und der **Analogieschluss**. Diese sind im Kapitel [7] ausführlich beschrieben.

Sind traditioneller Weise Raum, Zeit, Materie, Energie und **Kausalität** (Ursache-Wirkung-Beziehung) die zentralen Leitbegriffe der Naturwissenschaften, so kommt es heute immer mehr zu einer Bedeutungsverschiebung in Richtung von Information, Kommunikation und Rückkopplung (**Feed-back**). Bei biologischen Systemen wird häufig eine zusätzliche Orientiertheit nach Zwecken (**Finalität**) angenommen. Jedoch kann in den meisten Fällen zur Erklärung von biologischen Sachverhalten anstelle des „Zweck“-Begriffes die „Feed-back“-Regelung verwendet werden.

Eine **Kausalkette**, in der das Ereignis **a** das Ereignis **b** bewirkt, **b** dann **c** verursacht und **c** seinerseits **d** usw., stellt ein determiniertes, lineares System dar. Wenn aber **d** auf **a** zurückwirken kann, so ist das System zirkulär und erhält die Möglichkeit der Selbstregulation. Durch solche Rückkopplungen wird es möglich, wichtige Gleichgewichtszustände (Homöostasen) zu regulieren und zu erhalten. Biologische Systeme werden als offene, selbstregulierende Ganzheiten mit inneren Fließgleichgewichten aufgefasst, in denen die **Information** und die **Kommunikation** wichtige Rollen spielen. Regelkreise sind unverzichtbare Modelle zur Weltbeschreibung.
Die grundsätzliche Struktur eines **Regelkreises** besteht **erstens** aus einer realen Messstrecke, auf der mit Hilfe von Messgeräten (Fühlern) eine bestimmte Messgröße X registriert und quantitativ erfasst wird. Dieser IST-Wert wird aber durch die Einwirkung einer störenden Größe Z aus der Umgebung dauernd verändert.

Zweitens ist in einer Zentrale ein bestimmter optimaler SOLL-Wert Y festgelegt. **Drittens** erhält ein Stellwerk den IST-Wert von den Messfühlern übermittelt (Feed back) und vergleicht ihn mit dem SOLL-Wert und setzt bei Abweichungen ($X \neq Y$) entsprechende Maßnahmen (Regelmechanismen), um den IST-Wert an den SOLL-Wert anzupassen. Messfühler, Zentrale und Stellwerk sind integrierte Bestandteile eines Regelkreises. Beispiele für Regelkreise sind in der Technik und in der Natur zu finden: beispielsweise die Regelung der Raumtemperatur über einen Thermostat oder die Regelung der Hormonausschüttung in Lebewesen über die Hypophyse.

Die prinzipielle Vorgangsweise der Naturwissenschaften soll abschließend an drei einfachen Beispielen aus Physik, Medizin und Psychologie aufgezeigt werden.

Beispiel 1: **Das Fallgesetz**

Am Anfang steht die Beobachtung, dass ein in die Höhe gehobener Körper, wenn man ihn auslässt, wieder herunterfällt. Ursache für seine Bewegung ist die Schwerkraft. Für den Physiker ist es von Interesse, welcher mathematische Zusammenhang zwischen der verstrichenen Zeit (t) und dem zurückgelegten Weg (s) besteht. In einem Experiment werden nun zu vielen Fallzeiten die Fallwege exakt gemessen. Das ergibt eine Menge von endlich vielen Messpaaren (t,s). Bei der mathematischen Analyse der Zahlenwerte entdeckt man die Beziehung, dass der Weg s proportional zum Quadrat der Zeit t ist ($s=k*t^2$). Diese Relation gilt zunächst nur für die endlich vielen beobachteten Fälle. Verallgemeinert man sie auf alle möglichen Fälle (Induktion), dann wird aus einer Hypothese ein Naturgesetz, dessen Gültigkeit umso wahrscheinlicher ist, je mehr Experimente seine Aussage bestätigen (empirisch verifizieren). Und kein Ergebnis darf seine Aussage widerlegen (falsifizieren).

Beispiel 2: **Die Medikamentenprüfung**

Die Prüfung von Arzneimitteln ist ein sehr wichtiges Teilgebiet der Medizin. Die Frage der therapeutischen Wirksamkeit kann nur unter Einbeziehung von Patienten beantwortet werden, die an genau derjenigen Erkrankung leiden, gegen die das betreffende Medikament gerichtet ist. Die Beurteilung erfolgt in der Regel als kontrollierte Studie im Vergleich zu einer anerkannten Standardbehandlung bzw. im Vergleich mit einem Placebo (Scheinarznei ohne Wirkstoffe). Dabei muss sehr gewissenhaft auf unerwünschte Nebenwirkungen und Wechselwirkungen mit anderen Medikamenten geachtet werden. Die eigentliche Überprüfung erfolgt als einfacher oder doppelter Blindversuch an einigen hundert Patienten. Der Versuchsgruppe wird das Medikament mit dem Wirkstoff verabreicht, der Kontrollgruppe ein Placebo. Beim einfachen Blindversuch weiß der Patient nicht, ob er Medikament oder Placebo erhält. Beim doppelten Blindversuch weiß es auch der Arzt nicht, sondern nur der kontrollierende Versuchsleiter. Diese Blindversuche sind auch deshalb zweckmäßig, um suggestiv wirkende psychische Einflüsse auszuschließen.

Beispiel 3: **Die affektive Gedächtnishemmung**

Es ist eine Alltagserfahrung, dass ein sehr starkes Gefühl (Affekt) eine Hemmung der Gedächtnisleistung bewirkt. Zur Verifizierung dieser Behauptung stellt man wieder zwei Personengruppen zusammen, die nicht zu klein sind und deren mittlere Gedächtnisleistungen auf Grund von Vortests ungefähr gleich groß sind (parallelisierte Stichproben). Als Lernmaterial verwendet man sinnlose Silben, um etwaige Assoziationen als Gedächtnishilfen auszuschließen. Der Versuchsgruppe wird nun das Lernmaterial dargeboten und sofort nach der Darbietung ein Affekt erzeugt (z.B. Furcht). In der Kontrollgruppe wird das Lernmaterial ohne anschließende Affektprovokation dargeboten. Nach einer bestimmten Zeitspanne wird in beiden Gruppen der gemerkte Lernstoff überprüft und die jeweiligen Gruppenmittelwerte berechnet. Ist der Mittelwert in der Versuchsgruppe **statistisch signifikant** kleiner als jener in der Kontrollgruppe, dann ist die Hypothese der affektiven Gedächtnishemmung verifiziert.