Fachbereich
Mathematik
Hochschule Regensburg

HOCHSCHULE REGENSBURG UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Kurz-Skriptum zu Fourierreihen

Prof. Dr. Michael Fröhlich

Inhaltsverzeichnis

Prof. Dr. Michael Fröhlich

Fakultät Informatik und Mathematik
Hochschule Regensburg
Postfach 12 03 27
93 025 Regensburg

michael.froehlich@hs-regensburg.de
Tel.: +49 941/943-9786.
Raum U 320, Sammelgebäude, Universitätsstraße 31.

Kapitel 1

p-periodische Funktionen und trigonometrische Reihen

In vielen Bereichen der Physik spielen periodische Vorgänge eine wichtige Rolle (Schwingungen, Wellenausbreitungen, Wechselstrom). Zu ihrer Beschreibung verwendet man in der Mathematik periodische Funktionen.

1.1 p-periodische Funktionen

Definition von p-periodisch:

Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ **periodisch mit Periode p** *(oder einfach* **p-periodisch***), falls ein* $p \in \mathbb{R}_{>0}$ *existiert mit*

$$f(x + p) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung:

Perioden sind für eine Funktion f nicht eindeutig bestimmt: Ist p eine Periode von f, so sind auch alle Vielfachen kp mit $k \in \mathbb{N}$ Perioden von f.
Die kleinste Periode von f heißt **Grundperiode** bzw. **primitive Periode**.

Beispiele für p-periodische Funktionen

Die vielleicht wichtigsten Beispiele periodischer Funktionen sind die **trigonometrischen Funktionen**:
Die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ haben die **Grundperiode** 2π, während $f(x) = \tan x$ und $f(x) = \cot x$ die Grundperiode π haben.
Die jeweiligen Umkehrfunktion **Arcussinus usw.** sind nicht p-periodisch.

Eine konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c$ ist p-periodisch für jedes $p > 0$.
Die komplexwertige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{jx}$ ist 2π-periodisch.

Bemerkung:

Eine p-periodische Funktion f ist durch ihre Werte $f(x)$ auf einem beliebigen Intervall der Länge p bestimmt. Man verwendet als Grundintervall meistens $[0, p[$ oder $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}[$.

Definition von p-periodischer Fortsetzung:

Ist eine Funktion zunächst nur durch ihre Werte $g(x)$ mit $0 \leq x < q$ oder $-a \leq x < a$ erklärt, so kann man sie direkt zu einer p-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p = q$ oder $p = 2a$ wie folgt fortsetzen:

$$f(x) := g(x - np) \text{ für geeignetes } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } np \leq x < (n+1)p.$$

oder

$$f(x) := g(x - np) \text{ für geeignetes } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } -a \leq x - np < a.$$

1.1.1 Sätze über p-periodische Funktionen:
Sei im folgenden $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. *Hat f die Periode p, so gilt für alle $k \in \mathbb{Z} : f(x + kp) = f(x)$*
2. *Ist $g(x)$ p-periodisch und $c \in \mathbb{R}$ konstant, dann ist auch $f(x) = g(x - c)$ p-periodisch.*
3. *Sind f und g periodisch mit Periode p und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist $c_1 f + c_2 g$ auch p-periodisch.*
4. *Ist f periodisch mit Periode p, so ist auch jede zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ periodisch mit Periode p.*
5. *Hat f Periode p, so sind für beliebige $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $d \in \mathbb{R}$ die Funktionen $d \cdot f(cx)$ periodisch mit Periode $\frac{p}{c}$.*
6. *Seien f_1 bzw. f_2 periodische Funktionen mit Periode p_1 bzw. p_2. Wenn $z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existieren mit*
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{z_1}{z_2},$$
dann ist $f_1 \pm f_2$ periodisch mit Periode $p := z_2 p_1 = z_1 p_2$.
7. *Hat f Periode p, ist reellwertig und integrierbar, dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$:*
$$\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx. \quad \text{(=konstant)}$$
8. *Hat f Periode p, ist reellwertig und integrierbar, dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$:*
$$\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)dx = \int_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)dx.$$

Beweis: Zu 1.: Sei $k \in \mathbb{Z}$. Falls $k > 0$, folgt

$$f(x + kp) = f((x + (k-1)p) + p) = f(x + (k-1)p) = f(x + (k-2)p) = ... = f(x + p) = f(x).$$

Falls $k < 0$, folgt

$$f(x + kp) = f((x + kp) + p) = f(x + (k+1)p) = f(x + (k+2)p) = ... = f(x + p) = f(x).$$

Zu 2: Es gilt $f(x+p) = g((x+p)-c) = g((x-c)+p) \overset{g\ p-periodisch}{=} g(x-c) = f(x)$.

Zu 3: Folgt direkt aus Definition von p-periodisch.
Zu 4.: Es gilt $(g \circ f)(x+p) = g(f(x+p)) \overset{f\ p-periodisch}{=} g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Zu 5: Man setze $g(x) := d \cdot f(cx)$. Dann gilt

$$g\left(x + \frac{p}{c}\right) = d \cdot f\left(c\left(x + \frac{p}{c}\right)\right) = d \cdot f(cx+p) \overset{f\ p-periodisch}{=} d \cdot f(cx) = g(x).$$

Zu 6.: Wegen 1. gilt

$$(f_1 \pm f_2)(x+p) = f_1(x+p) \pm f_2(x+p) = f_1(x + z_2 p_1) \pm f_2(x + z_1 p_2) \overset{1.}{=} f_1(x) \pm f_2(x) = (f_1 \pm f_2)(x).$$

Zu 7.: Sei $a \in \mathbb{R}$. Da f Periode p hat, folgt mit der Substitution $g(x) = x - p$:

$$\int_p^{a+p} f(x)dx = \int_p^{a+p} f(x-p)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

Addition von $\int_a^p f(x)dx$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt die Behauptung.

8. folgt direkt aus 7. für $-\frac{p}{2}$ anstelle von a bzw. $a - \frac{p}{2}$ anstelle von a.

Bemerkung:

Die Grundperiode von $g \circ f$ kann kleiner als die Grundperiode von f sein: Für $f = \sin$ und g der Betragsfunktion $|\ |$ ist z.B. die Grundperiode von f gleich 2π und von $g \circ f$ gleich π, da $(g \circ f)(x) = |\sin x|$.

Beispiele zu obigem Satz

1. $\sin x$ ist 2π-periodisch, also ist $\sin(3x)$ gemäß 5. aus (1.1.1) dann $\frac{2\pi}{3}$-periodisch.

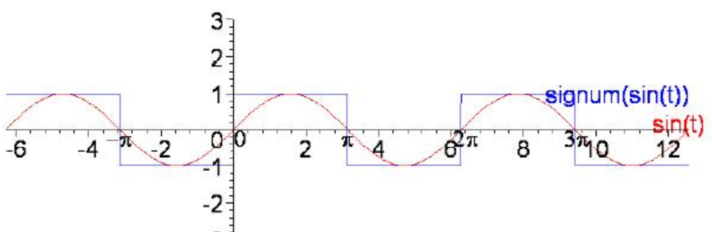
2. $\sin(3x)$ ist $\frac{2\pi}{3}$-periodisch, also ist gemäß 2. aus (1.1.1) $\sin(3x-2)$ auch $\frac{2\pi}{3}$-periodisch.

3. $\sin(2x)$ und $\cos(2x)$ sind π-periodisch, also ist gemäß 3. aus (1.1.1)
   $3\sin(2x) - 5\cos(2x)$ auch π-periodisch.

4. Rechteckfunktion : Mit "signum"wird die sogenannte **Vorzeichenfunktion**

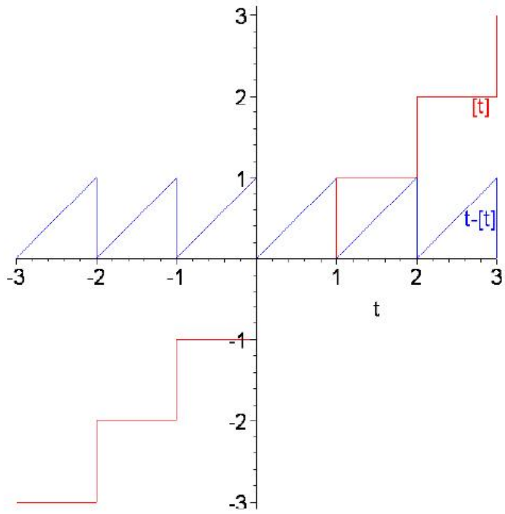
$$signum(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad \text{bezeichnet.}$$

$\sin(x)$ ist periodisch mit Periode 2π, also ist gemäß 4. aus (1.1.1) auch $signum(\sin(x))$ periodisch mit Periode 2π:



5. Überlagerung von Sägezahnfunktionen:

Die Funktion "untere Gaußklammer" $\lfloor x \rfloor := max\ \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$ ist eine nicht periodische Treppenfunktion. Aber die sogenannte **Sägezahnfunktion** $f_1(x) := x - \lfloor x \rfloor$ ist periodisch mit Periode 1. Somit hat $f_2(x) := 3x - \lfloor 3x \rfloor$ nach 5. in (1.1.1) die Periode $\frac{1}{3}$, und die **Überlagerung** $f_1(x) - f_2(x) = -2x - \lfloor x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor$ hat nach 6. in (1.1.1) die Periode 1.



6. Die Funktion $f(x) = \sin(3x)\sin(7x)$ ist π-periodisch:

   Man verwende die Identität $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ und erhält

$$\sin(3x)\sin(7x) = \frac{1}{2}(\cos(4x) - \cos(10x)).$$

   Mit Hilfe von 6. aus (1.1.1) folgt die Behauptung.

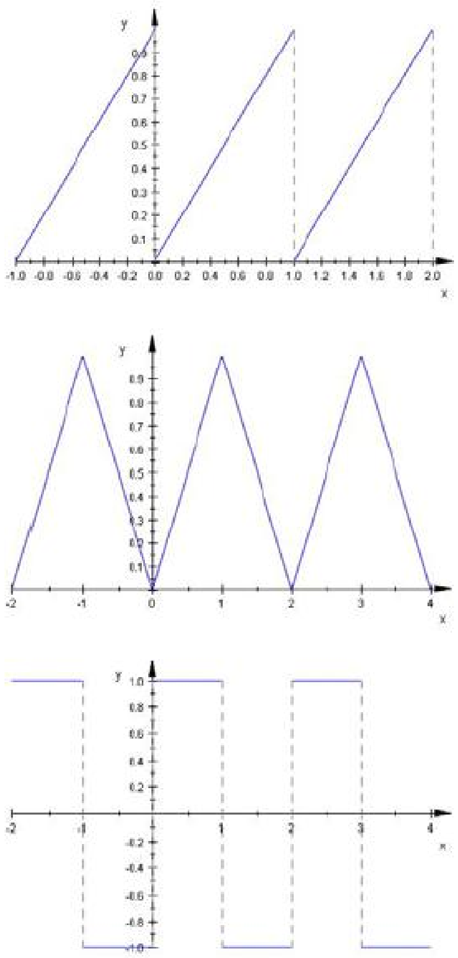
Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **gerade** (achsensymmetrisch zur y-Achse, falls f reellwertig), falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **ungerade** (punktsymmetrisch zum Nullpunkt, falls f reellwertig), falls $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Eine gerade oder ungerade p-periodische Funktion f ist durch ihre Werte $f(x)$ auf einem beliebigen Intervall der Länge $\frac{p}{2}$ bestimmt. Man verwendet als Grundintervall meistens $[0, \frac{p}{2}[$.

Funktionsgraphen der p-periodischen Funktionen Sägezahn-, Dreiecks- und Rechteckfunktion:



Zur Wiederholung Exkurs über Additionstheoreme und deren Folgerungen: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Additionstheorem: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

2. Additionstheorem: $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Folgerungen:

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$.

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$.

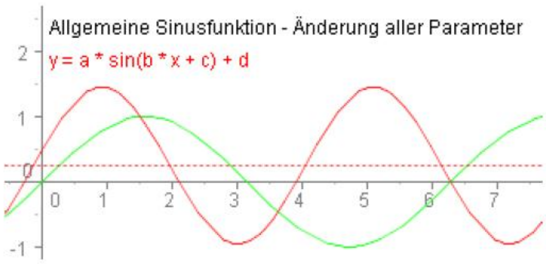
$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$.

Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

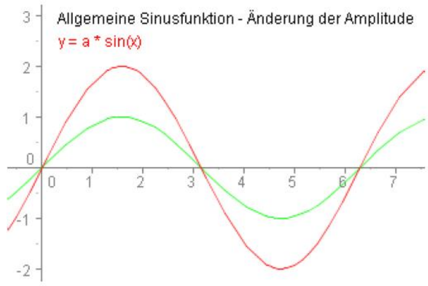
1.2 Approximation periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen

Periodische, meist zeitabhängige Vorgänge spielen in Naturwissenschaft und Technik eine wichtige Rolle. In der Physik lassen sich einfache, zeitlich periodische Vorgänge wie z.B. die Schwingung eines Federpendels durch die allgemeine Sinusfunktion der Form

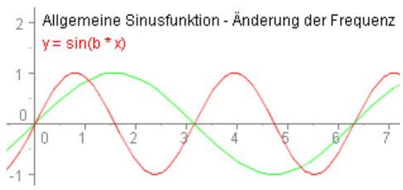
$$f(x) = a \cdot sin(bx + c) + d \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c, d \in \mathbb{R} \text{ beschreiben.}$$



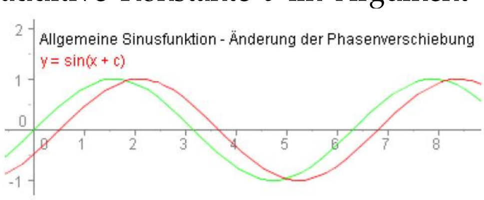
Einfluß der Konstante a auf die Sinuskurve: Jeder Funktionswert der Grundfunktion $\sin x$ wird mit a multipliziert. Dies bedeutet graphisch eine Streckung für $|a| > 1$ bzw. Stauchung für $|a| < 1$ in y-Richtung. Man bezeichnet den Wert a auch als **Amplitude**.



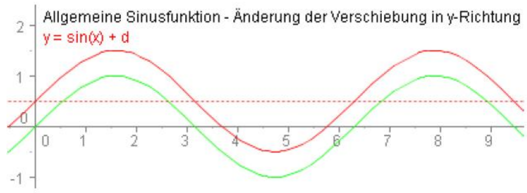
Einfluß der Konstante b auf die Sinuskurve: Der Faktor b bewirkt eine Änderung der Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$. Graphisch bedeutet dies eine Streckung für $|b| < 1$ bzw. Stauchung für $|b| > 1$ in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$. Man bezeichnet den Wert b auch als **Frequenz**.



Einfluß der Konstante c auf die Sinuskurve: Die additive Konstante c im Argument des Sinus bewirkt eine **Phasenverschiebung**. Graphisch bedeutet dies eine Verschiebung auf der x-Achse um $\frac{c}{b}$: nach links, falls $c > 0$ und nach rechts, falls $c < 0$.



Einfluß der Konstante d auf die Sinuskurve: Zu jedem Funktionswert wird die Konstante d dazu addiert. Graphisch bedeutet dies eine Verschiebung parallel der y-Achse um d: Der Graph schwingt um die Gerade $y_0 = d$.



Analoges gilt für die allgemeine Cosinus-Funktion

$$f(x) = a \cdot cos(bx + c) + d \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c, d \in \mathbb{R}.$$

In den Anwendungen, z.B. der Akkustik, werden oft eine Grundschwingung (bzw. harmonische Schwingung mit Grundfrequenz $\omega > 0$)

$$f_1(x) = a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x)$$

mit dazugehörigen endlich vielen Oberschwingungen

$$f_k(x) = a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x), k = 2, ..., n$$

überlagert, und man erhält dann als sogenannte **Überlagerung (Superposition)** die Funktion:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

Definition trigonometrisches Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$:

Sei $\omega > 0, a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Die Funktion

$$T_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))\,, x \in \mathbb{R}$$

heißt **trigonometrisches Polynom vom Grad n**.
Die Zahlen a_0, a_k, b_k heißen die **Koeffizienten** des trigonometrischen Polynoms.
Konvergiert die Folge der Partialsummen $((T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so wird durch

$$T(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))\,, x \in \mathbb{R}$$

eine $\frac{2\pi}{\omega}$-periodische Funktion definiert. Man nennt $T(x)$ eine (unendliche) **trigonometrische Reihe**.

Im folgenden wird gezeigt, daß auch die Umkehrung gilt: Fast jede p-periodische Funktion läßt sich als trigonometrische Reihe darstellen:

Besonders in der Elektrotechnik treten zeitabhängige Vorgänge auf, die zwar periodisch aber nicht mehr sinusförmig verlaufen, z.B. die **Kippschwingung bzw. "Sägezahnimpuls"**. Kann man solch eine nichtsinusförmige Schwingung aus **harmonische Einzelschwingungen** zusammensetzen? Ja, unter gewissen Voraussetzungen ist es möglich, einen Schwingungsvorgang (p-periodische Funktion f) in eine **trigonometrisches Reihe** zu "entwickeln":

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right), x \in \mathbb{R}$$

Diese Darstellung heißt **Fourier-Reihe**, und die Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe bezeichnet man als **Fourier-Analyse**. Die Koeffizienten a_0, a_k und b_k für $k \in \mathbb{N}$ heißen Fourier-Koeffizienten. Sie geben die Amplituden der einzelnen Frequenzkomponenten an.

Exkurs unendliche Reihen

Bemerkungen zur Konvergenz von trigonometrischen Reihen:

1. Es existieren trigonometrischen Reihen, die für alle x divergieren.
2. Sind die beiden Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$ konvergent, so konvergiert die zugehörige trigonometrische Reihe, und die durch die Reihe definierte Funktion ist stetig.
   (ein hinreichendes Konvergenzkriterium)
3. Es gibt trigonometrische Reihen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, obwohl die zugehörigen Koeffizientenreihen nicht konvergieren. Beispiel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$.

Kapitel 2

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen (nach Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830) werden verwendet, um periodische Funktionen als unendliche Reihe von Sinus - und Cosinusgliedern darzustellen.

Bei der Taylorschen Reihenentwicklung (MA2 Vorlesung) wird die Entwicklung einer Funktion nach dem Funktionssystem $\{x^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ durchgeführt. Diese Entwicklung funktioniert nicht, falls die zu interpolierende Funktion oder ihre Ableitungen Unstetigkeitsstellen aufweisen. Im folgenden Kapitel werden einige periodische Funktionen mit Unstetigkeitsstellen mit Hilfe des Funktionssystems $\{\sin(mx), \cos(nx) \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ in eine Fourier-Reihe entwickelt.

Ist eine p-periodische Funktion gegeben, stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen diese als Fourier-Reihe darstellbar ist, und wie dann die Koeffizienten a_0, a_k, b_k für $k \in \mathbb{N}$ berechnet werden können:

2.1 Bestimmung der Fourier-Koeffizienten für 2π-periodische Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 2π-*periodische* Funktion, d.h. $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmt werden sollen die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k aus folgendem Ansatz:

$$(*) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

D.h. welcher Zusammenhang besteht zwischen der Funktion $f(x)$ und den Koeffizienten a_0, a_k, b_k, wenn $f(x)$ eine trigonometrische Reihe ist?

Es wird hier stillschweigend vorausgesetzt, daß nur solche Koeffizienten a_0, a_k, b_k gewählt werden, für welche die unendlichen Reihen, die sich beim Einsetzen von reellen Zahlen x ergeben, immer konvergieren.

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_k und b_k benötigt man folgende bestimmte Integrale:

2.1.1 Lemma (Orthogonalität der Sinus - und Cosinusfunktionen):

1. $\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)dx = 0 = \int\limits_0^{2\pi} \cos(nx)dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $\int\limits_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases} \quad = \pi\delta(n-m)$

3. $\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases} \quad = \pi\delta(n-m)$

4. $\int\limits_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$.

Das in 2. und 3. verwendete **Kronecker-Symbol** $\delta : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ ist definiert durch

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Beweis: 1. folgt durch Nachrechnen. Für 2. und 3. erhält man mit Hilfe der Formeln $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ und $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ und zusammen mit 1. für $m \neq n$ die Behauptungen. Für $m = n$ folgt mit partieller Integration

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \pi = \int\limits_0^{2\pi} sin^2(nx)dx.$$

4. folgt mit Hilfe der Formel $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$ und aus 1.

Bestimmung von $\frac{a_0}{2}$:

Gliedweise Integration von Gleichung (∗) im Intervall $[0, 2\pi]$ liefert mit 1.+2. aus Lemma (2.1):

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_0^{2\pi} \cos(kx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int\limits_0^{2\pi} \sin(kx)dx \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}2\pi, \end{aligned}$$

und es folgt

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Insbesondere ist $\frac{a_0}{2}$ der Mittelwert der Funktion $f(x)$ über dem Periodenintervall 2π.

Bestimmung von a_k:

Multiplikation von $f(x)$ in der Darstellung von $(*)$ mit $\cos(kx), k \in \mathbb{N}$ und anschließende Integration über das Intervall $[0, 2\pi]$ liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(kx)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi\delta(n-k) = \pi a_k \quad \text{nach 1., 2. und 4. aus Lemma (2.1.1)}\end{aligned}$$

Es folgt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmung von b_k:

Multiplikation von $f(x)$ in der Darstellung von $(*)$ mit $\sin(kx), k \in \mathbb{N}$ und anschließende Integration über das Intervall $[0, 2\pi]$ liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x) sin(mx)dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi}\cos(nx)\sin(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(kx)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \pi\delta(n-k) = \pi b_k \quad \text{nach 1., 3. und 4. aus Lemma (2.1.1).}\end{aligned}$$

Es folgt

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)x \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

2.2 Fourier-Reihen für 2π-periodische Funktionen

Dirichlet (1805-1859) hatte folgenden Konvergenzsatz bewiesen:

"Ist die p-periodische Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert die Fourier-Reihe von f für alle $x \in [a, b]$ gegen $\frac{1}{2}(f_l(x) + f_r(x))$."

Folgende zwei von Dirichlet entwickelten Voraussetzungen gewährleisten also, daß die Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion f überall gegen f konvergiert, so daß der Grenzwert

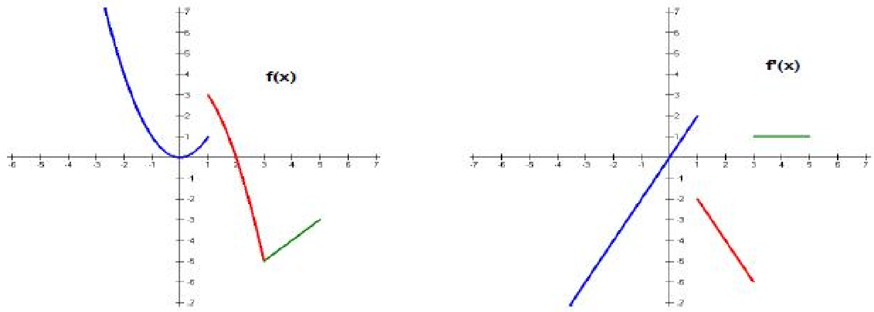
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

jeweils mit $f(x)$ übereinstimmt:

Voraussetzung 1: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn f bis auf endlich viele Stellen $x_1 < x_2 < ... < x_n$ in $[a, b]$ stetig differenzierbar ist und in diesen Stellen die einseitigen Grenzwerte von $f(x)$ (und $f'(x)$) existieren:

$$f_l(x_k) = \lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} f(x_k - \epsilon) \text{ bzw. } f_r(x_k) = \lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} f(x_k + \epsilon).$$

Es sind also Sprungstellen in der Funktion bzw. Ableitung erlaubt, aber keine Polstellen.

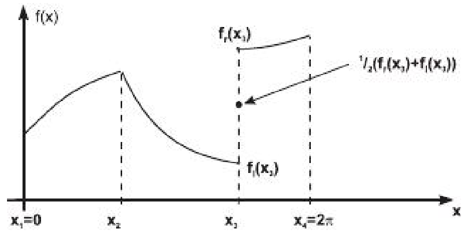


Voraussetzung 2: Es gelte die sogenannte **Mittelwerteigenschaft** für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f_l(x) + f_r(x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung:

$\frac{1}{2}(f_l(x) + f_r(x))$ ist das arithmetische Mittel des rechts- und linksseitigen Grenzwertes von $f(x)$. An den Stetigkeitsstellen x_0 von f gilt immer $\frac{1}{2}(f_l(x_0) + f_r(x_0)) = f(x_0)$, und an den endlichen Unstetigkeitsstellen x_k definiert man $f(x_k)$ durch dieses arithmetische Mittel.



Zusammenfassend mit den Berechnungen der Fourierkoeffizienten (**Euler-Fourier Formeln**) und den beiden Dirichlet-Voraussetzungen erhalten wir den **Darstellungssatz von Dirichlet für 2π-periodische Funktionen**:

2.2.1 Satz *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische und stückweise stetig differenzierbare Funktion, und für alle $x \in \mathbb{R}$ sei die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f überall, und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \textit{ für } k \in \mathbb{N}.$$

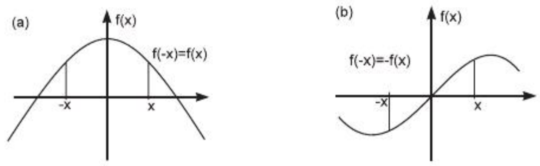
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \textit{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Bemerkungen: Da für eine 2π-periodische Funktion f gemäß (1.1.1) gilt

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = \int_a^{2\pi+a} f(x)\cos(kx)dx \text{ und } \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \int_a^{2\pi+a} f(x)\sin(kx)dx \text{ für alle } a \in \mathbb{R},$$

kann für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten ein beliebiges Periodenintervall der Länge 2π ausgewählt werden. Man wählt das Intervall $[-\pi, \pi]$.
Insbesondere vereinfacht sich dann die Berechnung der Fourier-Koeffizienten für symmetrische Funktionen:

Ist f **gerade**, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle x, dann ist $f \cdot \cos$ auch eine gerade Funktion aber $f \cdot \sin$ ungerade, d.h. $f(x)\sin(x) = -f(-x)\sin(-x)$ für alle x.



Wählt man als Integrationsintervall $[-\pi, \pi]$, so folgt für die Fourier-Koeffizienten:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \text{ also } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cos(0x)dx.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)dx = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cos(kx)dx \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion ist also eine reine Cosinus-Reihe.

Ist f **ungerade**, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle x, dann ist $f \cdot \cos$ auch eine ungerade Funktion aber $f \cdot \sin$ gerade. Wählt man als Integrationsintervall wieder $[-\pi, \pi]$, so folgt für die Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = 0 = a_k \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

$$b_k = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion ist also eine reine Sinus-Reihe.

Lemma: *Jede beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ läst sich in eine Summe aus einer geraden Funktion f_g mit einer ungeraden Funktion f_u zerlegen.*

Beweis:

$$f_g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ ist eine gerade Funktion.}$$

$$f_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_u(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{ist eine ungerade Funktion,}$$

und es gilt $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Diese im Lemma beschriebene Zerlegung einer beliebigen Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil entspricht aufgrund der obigen Bemerkungen eine Zerlegung einer 2π-periodischen Funktion in eine Cosinus - und eine Sinusreihe.

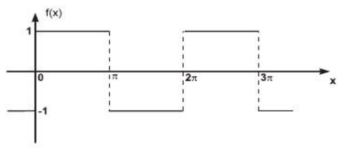
Beispiele für Fourier-Reihen von 2π-periodischen Funktionen

1. Gegeben ist folgende Rechteckfunktion g:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = 0, \pi, 2\pi \\ -1 & \text{für } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

g ist 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar zur Funktion $f :=$ signum (sin).

Gesucht ist die Fourier-Reihe von f:



f ist stückweise stetig differenzierbar und erfüllt in allen Punkten die Mittelwerteigenschaft. Außerdem ist f ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung.

Somit gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_k: Da f ungerade, ist $f \cdot \sin$ gerade. Nach (1.1.1) und aufgrund der Achsensymmetrie von $f \cdot \sin$ folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{k}\cos(kx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k}(-\cos(k\pi) + \cos(0)) = \frac{2}{\pi k}(-(-1)^k + 1), \end{aligned}$$

da $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\cos(0) = 1$.

Es folgt

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von f lautet somit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x).$$

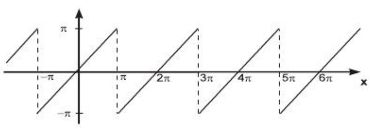
Insbesondere verhalten sich die Koeffizienten der Fourier-Reihe proportional zu $\frac{1}{k}$.

2. Gegeben ist folgende Funktion g:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{für} \quad x = \pi, 2\pi \\ x - 2\pi & \text{für} \quad \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

g ist 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar. Sei f die 2π-periodische Fortsetzung

Gesucht ist die Fourier-Reihe von f:



f ist stückweise stetig differenzierbar und erfüllt in allen Punkten die Mittelwerteigenschaft. Außerdem ist f ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung.

Somit gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_k: Wegen (1.1.1), der Achsensymmetrie von $f \cdot \sin$ und unter Verwendung der partiellen Integration erhält man für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(kx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} ((-\pi \cos(k\pi) - 0) - 0) = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

da $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

Folglich ist die Fourier-Reihe von f:

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin(kx).$$

Insbesondere verhalten sich die Koeffizienten der Fourier-Reihe proportional zu $\frac{1}{k}$.

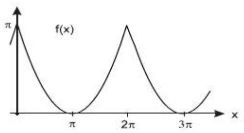
3. **Interessantes Nebenergebnis:** Sei $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\pi}(x-\pi)^2$. Indem man in die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spezielle Werte einsetzt, kann man beweisen, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Zunächst berechnet man die Fourier-Reihe von f im Intervall $[0, 2\pi]$:



f ist stückweise stetig differenzierbar und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Außerdem ist f gerade, d.h. achsensymmetrisch zur y-Achse.

Somit gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für den Koeffizient a_0 erhält man

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\pi}(x-\pi)^2 dx = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{1}{3}(x-\pi)^3\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\pi.$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten $a_k, k \in \mathbb{N}$: Wegen (1.1.1) und der Achsensymmetrie von $(x-\pi)^2\cos(kx)$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}(x-\pi)^2\cos(kx)dx$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi^2}\left(\left[(x-\pi)^2\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(x-\pi)\frac{1}{k}\sin(kx)dx\right) \\
&= -\frac{4}{\pi^2 k}\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin(kx)dx \\
&= -\frac{4}{\pi^2 k}\left(\left[(x-\pi)\frac{-1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-1}{k}\cos(kx)dx\right) \\
&= \left(-\frac{4}{\pi^2 k}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{k}\right) = \frac{4}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Somit lautet die Fourier-Reihe von f:

$$f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(kx).$$

Insbesondere verhalten sich die Koeffizienten der Fourier-Reihe proportional zu $\frac{1}{k^2}$.

Es folgt $\pi = f(0) = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ und also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Außerdem gilt $0 = f(\pi) = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}$ und also

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

2.2.2 Gibbsches Phänomen

Entwickelt man Funktionen, die einen Sprung als Unstetigkeitsstelle haben, in eine Fourier-Reihe, so kann man das sogenannte **Gibbsche Phänomen** beobachten: **Alle** Partialsummen S_n der Fourier-Reihe über- und unterschwingen für große n an den Unstetigkeitsstellen um rund 9 % der "Sprunghöhe ".

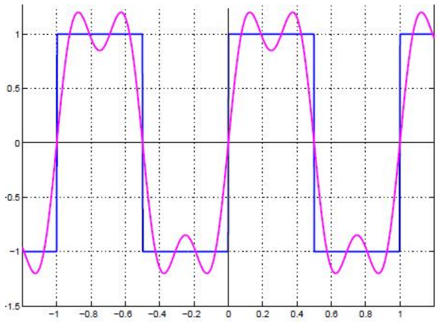
Als Beispiel diene folgende Rechteckfunktion:

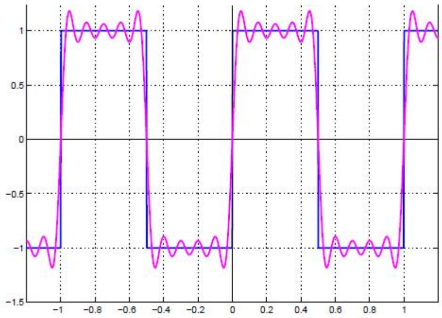
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } -1 < x < 0 \end{cases}$$

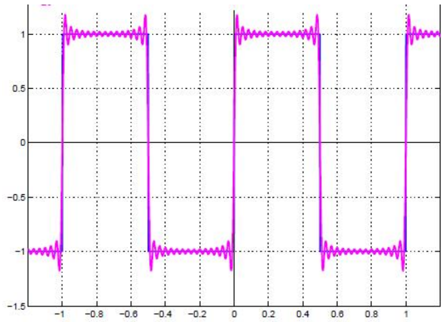
ist 2-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar zur Funktion f, und es gilt analog zum 1. Beispiel für die Fourier-Reihe von f:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi x}{(2k+1)}.$$

Im Folgenden ist die Interpolation der Funktion f durch einige Partialsummen der Fourier-Reihe graphisch dargestellt.







Man erkennt, daß der erste Überschwinger bei größerem k (wenn man noch mehr Glieder der Fourier-Reihe mit hinzunimmt) nicht kleiner wird und immer näher an die Unstetigkeitsstellen der Funktion f heranrückt, und man kann zeigen, daß sich der erste Überschwinger für große k auf ca. 1,18 einpendelt, was genau 9% der Sprunghöhe entspricht.

2.2.3 Parsevalsche Gleichung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen ihre Fourier-Reihe mit den Koeffizienten $\frac{a_0}{2}, a_k$ und b_k konvergiert. Dann gilt:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Anwendungsbeispiele Aufgabe 7, Übungsblatt 1.

2.2.4 Differentation und Integration von Fourier-Reihen

Differentation: Man kann eine Fourier-Reihe zwar ohne weiteres gliesweise differenzieren, aber die daraus resultierende Fourier-Reihe muß ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht notwendig konvergieren oder die Ableitung der Funktion darstellen:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ ist z.B. die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung f der Sägezahnfunktion $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$. Die gliedweise Ableitung der Fourier-Reihe ergibt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(kx)$, die im Intervall $(0, 2\pi)$ nicht konstant ist, aber es ist $g'(x) = -\frac{1}{2}$.

Wenn die 2π-periodische Funktion f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, erhält man die Fourier-Reihe von f' durch gliedweise Differentation der Fourier-Reihe von f.

Beispiel: $f(x) = |\sin x|$.

Die Fourier-Reihe der Ableitung $f'(x) = \begin{cases} -\cos x & -\pi \le x < 0 \\ \cos(x) & 0 \le x < \pi \end{cases}$ ergibt sich durch gliedweise Differentation von

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1} \quad \text{zu} \quad \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} 2k\frac{\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Integration: Man kann auch unter obigen Voraussetzungen bei der Differentation die Summe einer Reihe bestimmen, die durch gliedweise Integration einer Fourier-Reihe entsteht:

Z.B. ergibt sich aus der Fourier-Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ der Sägezahnfunktion $f'(x) = \frac{\pi-x}{2}$ durch gliedweises Ersetzen der Stammfunktionen die Fourier-Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{\cos(kx)}{k^2}$ zur Funktion $f(x) = -\frac{(\pi-x)^2}{4} + C$. Wegen

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\cos(kx)}{k^2}dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 0$$

folgt

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{(\pi-x)^2}{4} + C\right)dx = -\frac{\pi^3}{6} + 2\pi C = 0$$

und also $C = \frac{\pi^2}{12}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

Bemerkung: Analoges Vorgehen bei Aufgabe 7, 1 Übungsblatt.

2.2.5 Wie verändern sich die Fourier-Koeffizienten einer 2π periodischen Funktion, wenn man die Funktion skaliert?

Siehe Vorlesung.

2.3 Fourier-Reihen für p-periodische Funktionen

2.3.1 Satz von Fourier für p-periodische Funktionen: *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine p-periodische und stückweise stetig differenzierbare Funktion, und für alle $x \in \mathbb{R}$ sei die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f für alle $x \in \mathbb{R}$ und stimmt mit f wie folgt überein:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right).$$

Die Fourier-Koeffizienten sind:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx$$

$$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)dx \ \textit{für } k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)dx \ \textit{für } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis von (2.3.1): Setze $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $F(x) := f\left(\frac{p}{2\pi}x\right)$. Dann gilt

$$F(x+2\pi) = f\left(\frac{p}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{p}{2\pi}x + p\right) = f\left(\frac{p}{2\pi}x\right) = F(x).$$

Also ist F eine 2π-periodische Funktion, die aufgrund der Definition eine stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Mittelwerteigenschaft erfüllt.

Satz (2.2.1) liefert für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin(kx)dx.$$

Es folgt

$$f(x) = F(\frac{2\pi}{p}x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\frac{2\pi}{p}x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(k\frac{2\pi}{p}x).$$

Mit der Substitution $y = \frac{p}{2\pi}x$ erhält man die Fourier-Koeffizienten von f:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{p}{2\pi}x\right)dx = \frac{1}{p}\int_0^{p} f(y)dy$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{p}{2\pi}x\right)\cos(kx)dx = \frac{2}{p}\int_0^{p} f(y)\cos\left(k\frac{2\pi}{p}y\right)dy$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{p}{2\pi}x\right)\sin(kx)dx = \frac{2}{p}\int_0^{p} f(y)\sin\left(k\frac{2\pi}{p}y\right)dy.$$

Bemerkung: Aus den Beweisschritten des Satzes (2.3.1) folgt, daß man jede p-periodische Funktion auf eine 2π-periodische Funktion zurückführen kann, und insbesondere gelten für p-periodische Funktionen analoge Aussagen zu den Bemerkungen des Satzes (2.2.1) über 2π-periodische Funktionen.

Anwendungsbeispiel: Fourier-Zerlegung T-periodischer Signale

Sei $f(t)$ (Zeitvariable wird üblicherweise mit t benannt) eine periodische Schwingung mit Periode T (Schwingungsdauer). Dann gilt gemäß (2.3.1) zu jedem Zeitpunkt t folgende Fourier-Zerlegung:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Man bezeichnet in den Naturwissenschaften $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ als **Grundfrequenz**.

Fourier-Reihen sind der zentrale Gegenstand in der Signalverarbeitung.
Die Entwicklung des Zeitsignals $f(t)$ in unendlich viele Sinus - und Cosinusfunktionen bedeutet aus physikalischer Sichtweise eine Zerlegung des Signals in seine harmonischen Bestandteile, und man spricht von einem **diskreten Spektrum** für ein periodisches Signal: Dieses Spektrum besteht aus der Grundschwingung mit Frequenz ω_0 und den harmonischen **Oberschwingungen** mit Frequenz $k\omega_0$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k bestimmen dabei die **Amplituden** (der niedrigen Frequenzen für kleines k und hohen Frequenzen für großes k) dieser harmonischen Teilschwingungen und damit den Beitrag der Oberschwingungen zum Signal.
In der Akkustik stellen die Amplituden z.B. die Lautstärke der Töne dar, und ein tiefer Ton hat kleine Frequenz, ein hoher Ton große Frequenz.

Da man zunächst zu einer Frequenz $k\omega_0$ zwei Koeffizienten a_k, b_k erhält, geht man über zu einer Darstellung

$$a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t) = A_k\cos(k\omega_0 t - \phi_k), \text{wobei}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ und } \tan\phi_k = \frac{b_k}{a_k}, \text{ falls } a_k \neq 0.$$

Man nennt ϕ_k die **Nullphase**, und A_k ist die gesuchte Amplitude.

Begründung: Das Kosinus-Additionstheorem liefert

$$a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k) = A_k \cos(k\omega_0 t) \cos \phi_k + A_k \sin(k\omega_0 t) \sin \phi_k.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_k = A_k \cos \phi_k \text{ und } b_k = A_k \sin \phi_k.$$

Daraus folgt unmittelbar $\tan \phi_k = \frac{b_k}{a_k}$, falls $a_k \neq 0$, und durch Quadrieren beider Gleichungen erhält man

$$a_k^2 + b_k^2 = A_k^2 \cos^2 \phi_k + A_k^2 \sin^2 \phi_k = A_k^2,$$

und es folgt $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ sowie:

$$\phi_k = \begin{cases} \arctan(\frac{b_k}{a_k}), & \text{falls} \quad a_k > 0 \\ \arctan(\frac{b_k}{a_k}) \pm \pi, & \text{falls} \quad a_k < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls} \quad a_k = 0, b_k < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls} \quad a_k = 0, b_k > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad a_k = 0 = b_k \end{cases}.$$

In den Anwendungen benutzt man häufig die sogenannte Spektral-Darstellung von f:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \phi_k).$$

mit $A_0 = \frac{a_0}{2}, A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \neq 0, k \in \mathbb{N}$ und $\sin \phi_k = \frac{a_k}{A_k},\ \cos \phi_k = \frac{b_k}{A_k},\ 0 \leq \phi_k < 2\pi$.

Bezeichnungen:

A_k heißt **Gesamtamplitude**, mit der die Frequenz $k\omega_0$ im Signal vorkommt. ϕ_k ist die zugehörige **Phase** .

Die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heißt **Amplitudenspektrum**.

Die Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **Phasenspektrum**.

Das Bestimmen von Amplituden- und Phasenspektrum zu einer Funktion f heißt **harmonische Analyse**.

Die Informationen über das Signal f werden im **diskreten Spektrum** von f veranschaulicht: Man trägt dabei die Amplituden A_k bzw. Phasen ϕ_k im Stabdiagramm als Werte über den diskreten Frequenzen $k\omega, k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $k \in \mathbb{N}$ ab. Dies ist die graphische Darstellung von Amplituden- und Phasenspektrum zu einer Funktion f.

Der Koeffizient $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{p} \int\limits_0^p f(t)dt$ entspricht dem Mittelwert der Funktion während einer Schwingungsdauer / Periode p und wird als **Gleichspannungsanteil** bezeichnet.

2.4 Fourier-Reihen für komplexwertige Funktionen

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die Fourier-Darstellung in komplexer ($\mathbb{C}$) Schreibweise an.

2.4.1 Satz von Fourier für komplexwertige Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion mit reeller Periode p und eine stückweise stetig differenzierbare Funktion, und für alle $x \in \mathbb{R}$ sei die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Dann konvergiert die **komplexe Fourier-Reihe** *für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$:*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{p}x}$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten sind gegeben durch:

$$c_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-jk\frac{2\pi}{p}x} \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus den Eulerschen Formeln

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x \text{ und } \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \text{ und } \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

und da $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$, folgt mit (2.3.1) für die reelle Fourier-Reihe von f:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2}\left(e^{jk\frac{2\pi}{p}x} + e^{-jk\frac{2\pi}{p}x}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{2j}\left(e^{jk\frac{2\pi}{p}x} - e^{-jk\frac{2\pi}{p}x}\right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k - jb_k)e^{jk\frac{2\pi}{p}x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k + jb_k)e^{-jk\frac{2\pi}{p}x} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{p}x} \text{ mit } c_k := \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \\ \frac{a_0}{2} & \text{falls } k = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Satz (2.3.1) liefert $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx$ und für $k > 0$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos(k\frac{2\pi}{p}x)dx - j\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin(k\frac{2\pi}{p}x)dx\right) \\
&= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\left(\cos(k\frac{2\pi}{p}x) - j\sin(k\frac{2\pi}{p}x)\right)dx \\
&= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-jk\frac{2\pi}{p}x}dx.
\end{aligned}$$

Für $k < 0$ gilt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos(-k\frac{2\pi}{p}x)dx + j\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin(-j\frac{2\pi}{p}x)dx\right) \\ &= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\left(\cos(-k\frac{2\pi}{p}x) + j\sin(-k\frac{2\pi}{p}x)\right)dx \\ &= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-jk\frac{2\pi}{p}x}dx. \end{aligned}$$

Bemerkungen zu (2.4.1):

1. Es existiert wegen (2.4.1) eine einheitliche Formel für die Koeffizienten c_k.
2. $c_0 = \frac{a_0}{2}$ stellt den **Gleichstromanteil** des Signals dar.
3. $c_k^* = c_{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Koeffizienten zu negativem k sind komplex-konjugiert zu den entsprechenden Koeffizienten zu positivem k, und es folgt $|c_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |c_{-k}|$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit repräsentiert der Betrag der komplexen Koeffizienten das **Amplitudenspektrum** jeweils zur Hälfte von $-\infty$ bis -1 und von 1 bis ∞ .
4. Für die Phase ϕ_k der komplexen Fourier-Koeffizienten gilt für $a_k \neq 0$:

$$\tan\phi_k = \frac{Im(c_k)}{Re(c_k)} = \frac{-\frac{b_k}{2}}{\frac{a_k}{2}} = -\frac{b_k}{a_k}.$$

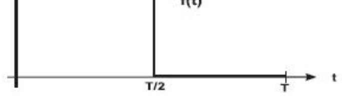
   Bis aufs Vorzeichen ist dies das **Phasenspektrum**.

5. Für die Umrechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten zu den reellen Fourier-Koeffizienten gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \\ b_k &= j(c_k - c_{-k}). \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel:

Gesucht ist die komplexe Fourier-Reihe der Funktion f, welche die T-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ ist von der hier abgebildeten Rechtecksignal-Funktion.



Für $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ sind die komplexen Fourier-Koeffizienten für $k \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{-jk\omega_0}\right)\left[e^{-jk\omega_0\frac{T}{2}} - 1\right]. \end{aligned}$$

Da $\omega_0 \cdot T = 2\pi$ und $\omega_0\frac{T}{2} = \pi$, folgt $e^{-jk\omega_0\frac{T}{2}} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$ und also

$$c_k = \frac{1}{-jk2\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{jk\pi} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \quad .$$

Der Gleichstromanteil des Signals ist anschaulich gleich $\frac{1}{2}$, also $c_0 = \frac{1}{2}$.

Es folgt

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{jk\pi}e^{jk\omega_0 t}.$$

Das Amplitudenspektrum von f ist gegeben durch

$$\frac{a_0}{2} = |c_0| = \frac{1}{2} \text{ und } A_k = 2|c_k| = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \quad .$$