Herbert Paukert

Schulmathematik in 8 Bänden

Version 6.0, 2016

MATHE 2

Geometrie - Unterstufe

MATHE, Band 1

Arithmetik - Unterstufe

MATHE, Band 2

Geometrie - Unterstufe

MATHE, Band 3

Logik
Zahlenmengen
Algebra

MATHE, Band 4

Differenzialrechnung

MATHE, Band 5

Integralrechnung

MATHE, Band 6

Matrizenrechnung
Statistik
Wahrscheinlichkeit

MATHE, Band 7

Trigonometrie

MATHE, Band 8

Analytische Geometrie
Kegelschnittslinien
Geometrische Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

Hinweis: In Dezimalzahlen wird anstelle eines Kommas ein Dezimalpunkt geschrieben.

Hinweis: Auf seiner Homepage ***www.paukert.at*** stellt der Autor viele weitere Lernhilfen aus unterschiedlichen Fachgebieten zur Verfügung.

Umfang und Fläche von Rechtecken

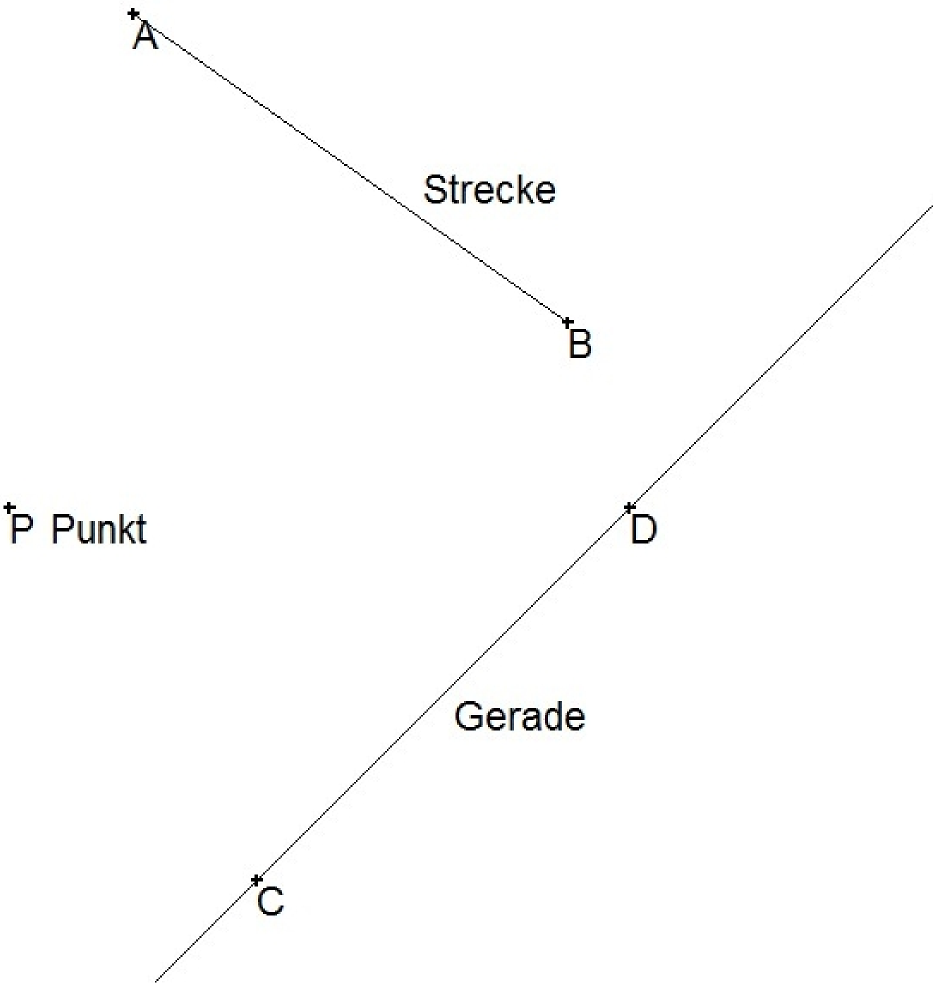
I. Der Umfang von Rechtecken

Elemente der Geometrie

In der Zeichenebene liegen **Punkte**, die wir mit Großbuchstaben beschriften. (A,B,C,D, ... ,P, ...)

Verbindet man zwei Punkte mit dem Lineal, dann erhält man eine **Strecke**, die wir mit Kleinbuchstaben beschriften. (a,b,c,d, ... ,p, ...)

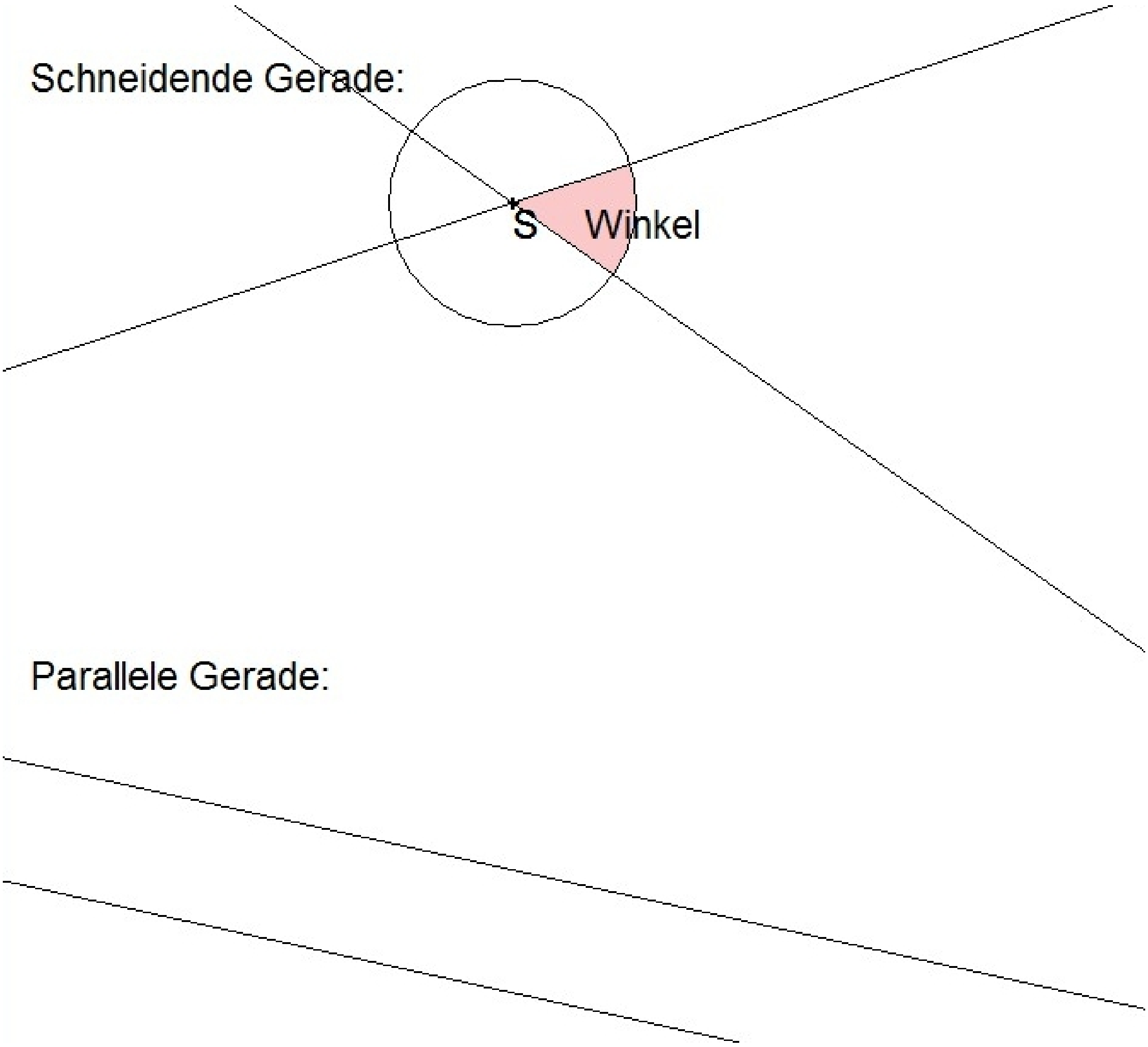
Verlängert man eine Strecke über ihre zwei Endpunkte beliebig lange hinaus, dann erhält man eine **Gerade**.



Zwei Gerade können sich schneiden. Dann haben sie einen gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt S).

Wenn sich zwei Gerade schneiden, dann bilden sie miteinander einen Winkel (Schnittwinkel).

Schneiden sich zwei Gerade nicht, dann haben sie keinen Schnittpunkt, dann liegen sie **parallel**.



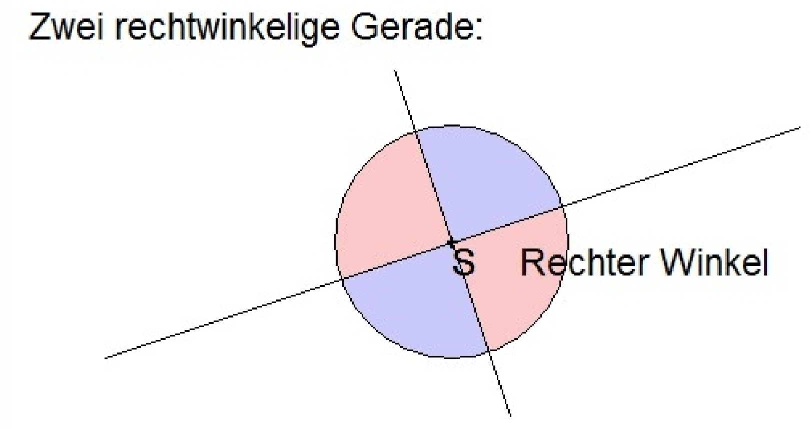
Wenn sich zwei Gerade schneiden, dann bilden sie miteinander nicht nur **einen** Winkel, sondern **vier** Winkel.

Gegenüber liegende Winkel heißen **Gegenwinkel**. Diese sind immer gleich groß.

Nebeneinander liegende Winkel heißen **Nebenwinkel**. Diese sind zusammen ein gestreckter Winkel.

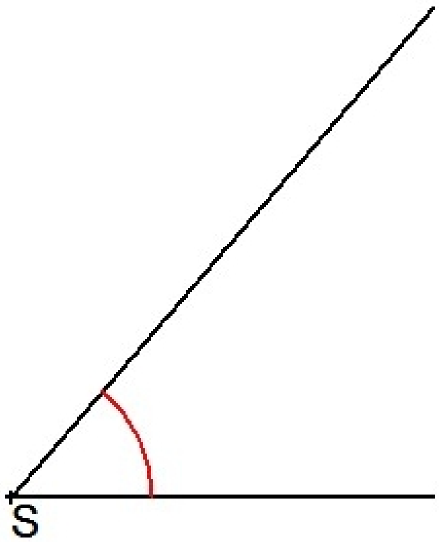
Sind die Nebenwinkel gleich groß, dann heißen sie **rechte Winkel**. Die beiden Gerade stehen dann aufeinander rechtwinkelig.

Rechte Winkel werden sehr leicht mit dem **Geo-Dreieck** gezeichnet.

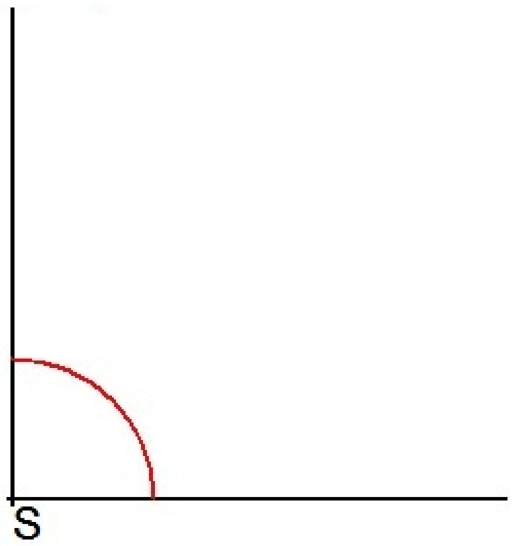


Verschiedene WINKEL

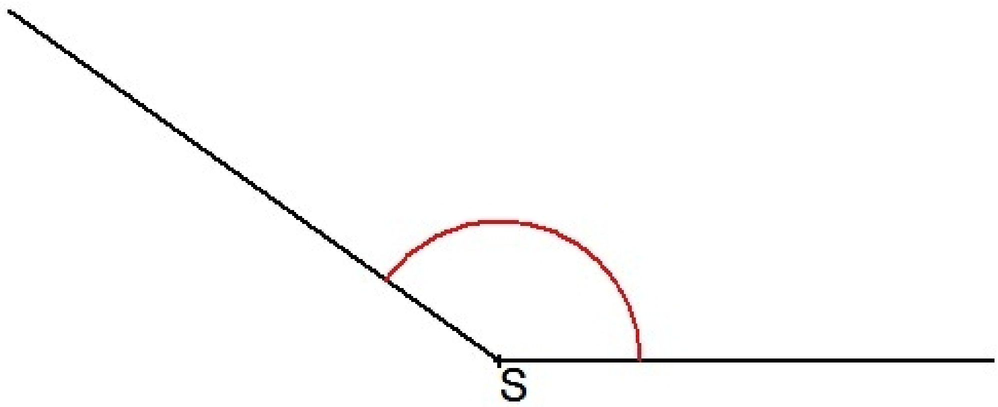
Das ist ein spitzer Winkel.



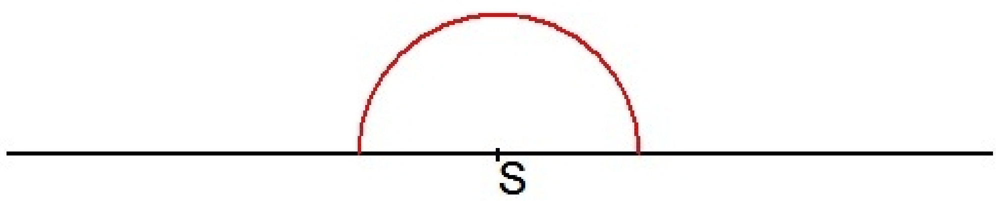
Das ist ein rechter Winkel.



Das ist ein stumpfer Winkel.



Das ist ein gestreckter Winkel.

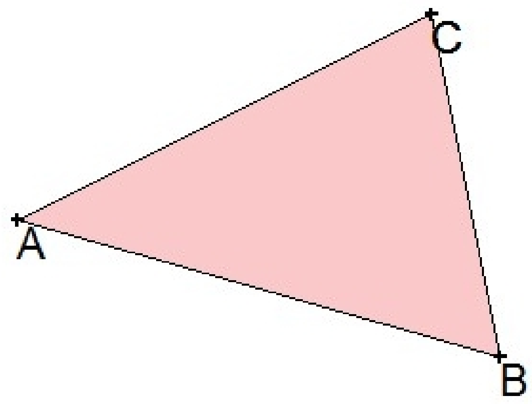


Verbindet man drei Punkte A, B, C mit dem Lineal, erhält man ein **Dreieck**.

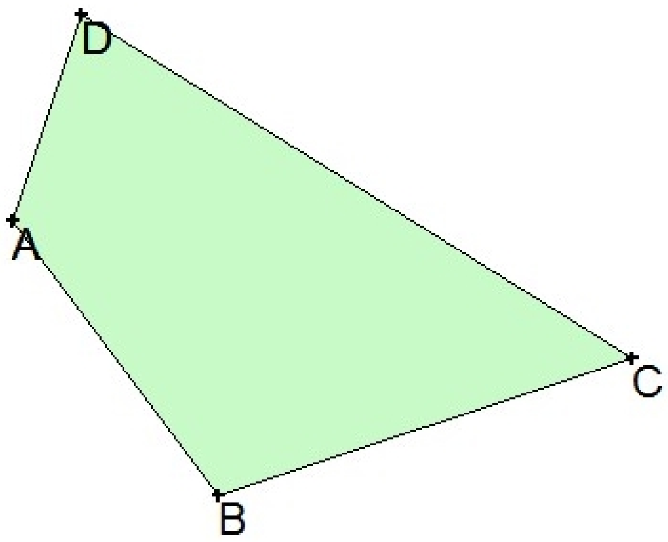
Verbindet man vier Punkte A, B, C, D mit dem Lineal, erhält man ein **Viereck**.

Die Verbindungsstrecken der Eckpunkte nennt man **Seiten**.
Zwei angrenzende Seiten bilden immer einen **Winkel**.

Dreieck:



Viereck:



Fünf Übungsaufgaben

1. Aufgabe:

Zeichne auf einem Blatt Papier drei spitze Winkel.

2. Aufgabe:

Zeichen auf einem Blatt Papier drei stumpfe Winkel.

3. Aufgabe:

Zeichne auf einem Blatt Papier drei rechte Winkel.

4. Aufgabe:

Zeichne auf einem Blatt Papier ein Dreieck und
beschrifte die drei Eckpunkte.

5. Aufgabe:

Zeichne auf einem Blatt Papier ein Viereck und
beschrifte die vier Eckpunkte.

Das Rechteck und sein Umfang

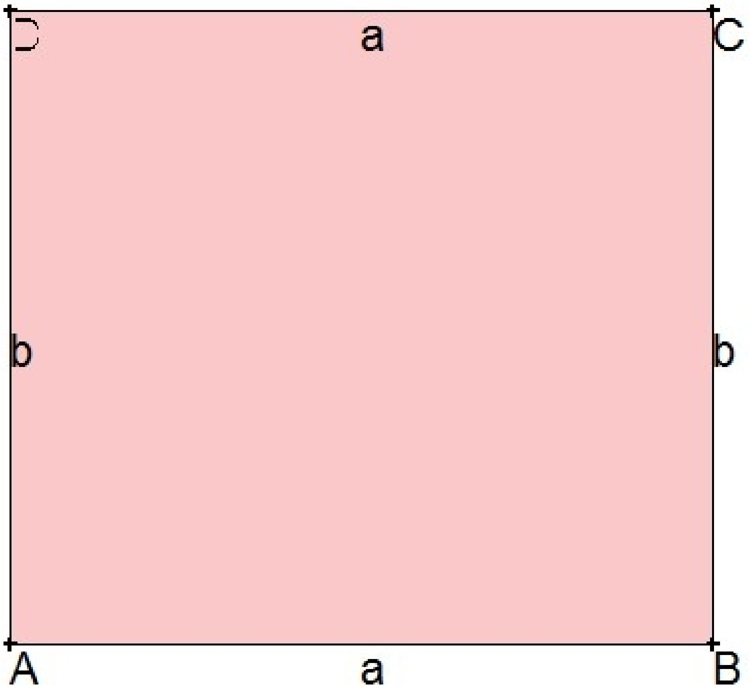
Wenn in einem Viereck alle vier Winkel **rechte Winkel** sind, so ist das Viereck ein **Rechteck**.

In jedem Rechteck gilt: Gegenüberliegende Seiten sind immer parallel und gleich lang.

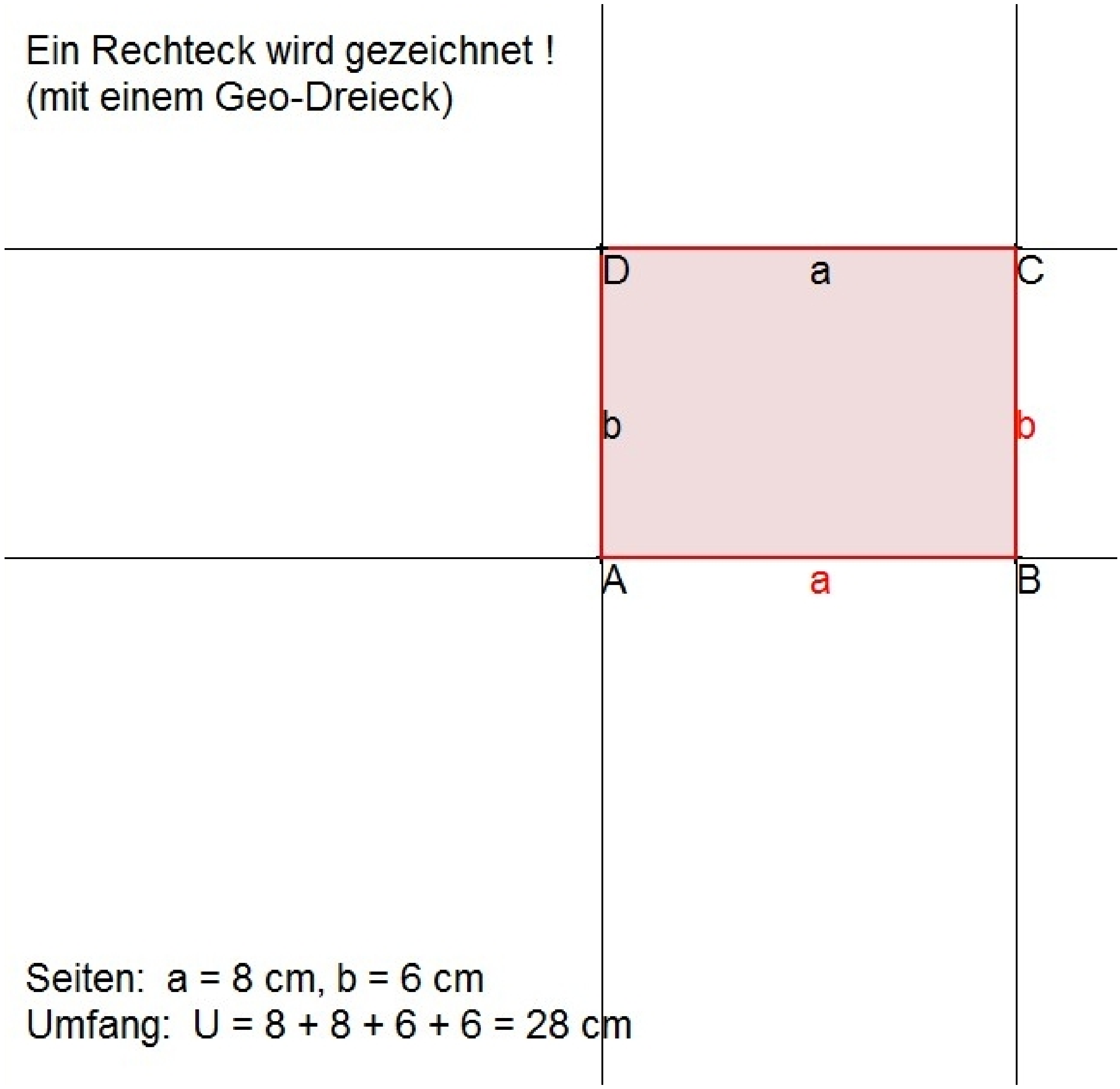
Eine Seite wird als **Länge** bezeichnet
und wird mit **l** oder mit **a** beschriftet.

Die andere Seite heißt **Breite**
und wird mit **b** beschriftet.

Wenn man alle Seiten des Rechtecks addiert, dann erhält man den **Umfang**.

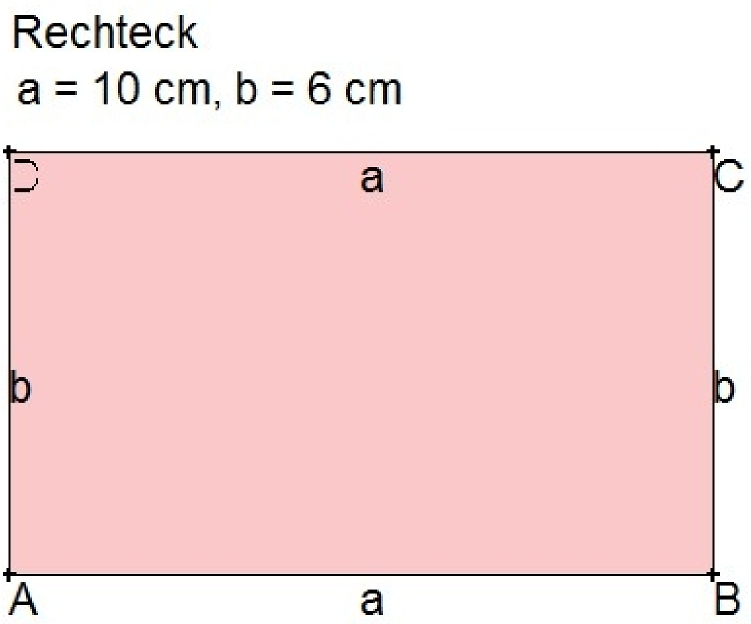


Zeichne das Rechteck auf einem Blatt Papier. Verwende dazu das Geo-Dreieck.



Formel für den Umfang: $U = a + a + b + b = 2*a + 2*b$

Der Zufall erzeugt ein Rechteck mit den Seiten a = 10 cm und b = 6 cm.
Hinweis: Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt **Quadrat**.
Zeichne das Rechteck auf einem Blatt Papier. Berechne den **Umfang.**

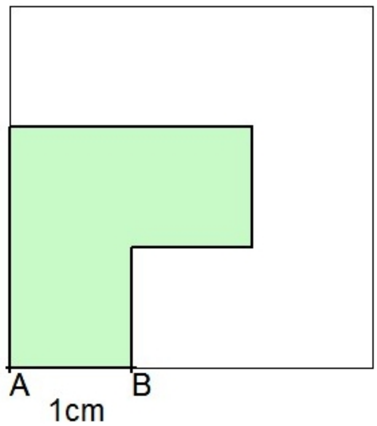


Umfang U =   2*a + 2*b = ? cm

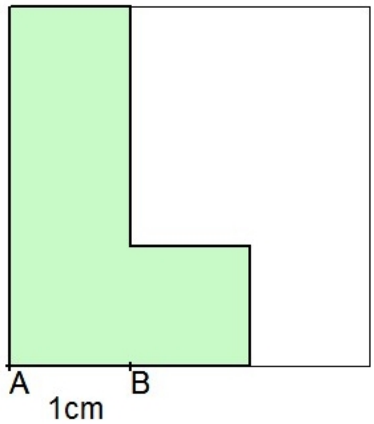
Zusammengesetzte Flächen, Teil 1

Folgende sechs Figuren sind nur aus Quadraten zusammengesetzt.
Der Umfang dieser Figuren entspricht den Längen ihrer Ränder.
Zeichne die Figuren auf einem Blatt Papier mit dem Geo-Dreieck.
Ermittle die Umfänge U.

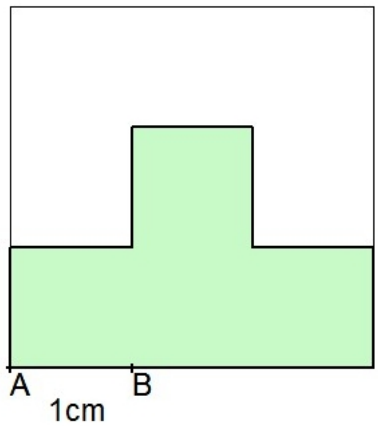
Figur 1, U1 = ?



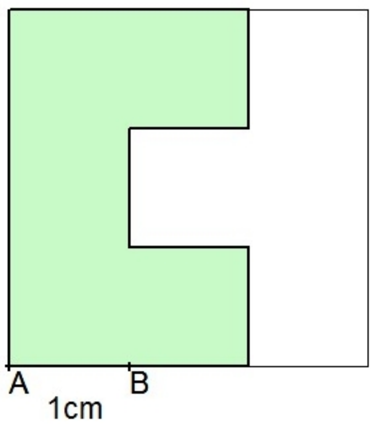
Figur 2, U2 = ?



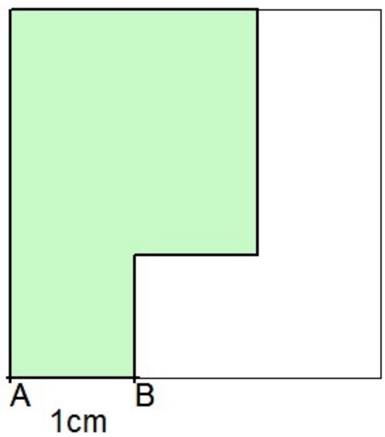
Figur 3, U3 = ?



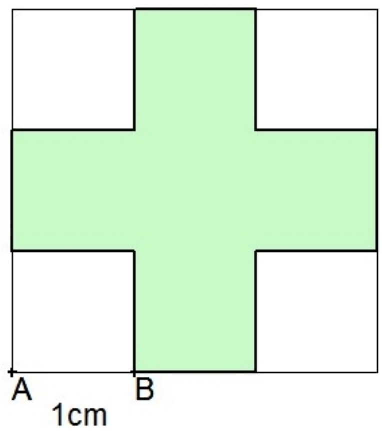
Figur 4, U4 = ?



Figur 5, U5 = ?



Figur 6, U6 = ?



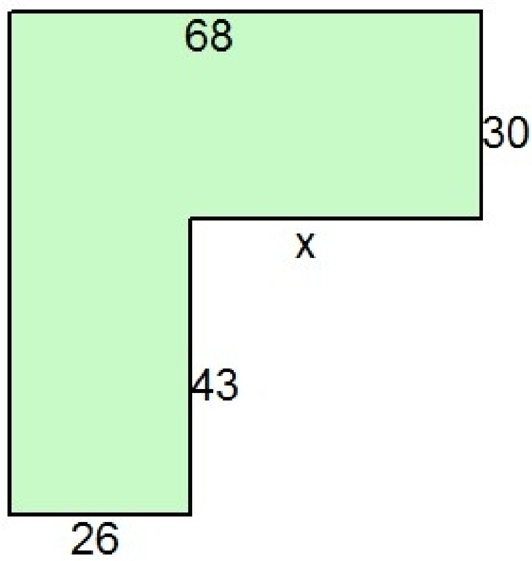
Zusammengesetzte Flächen, Teil 2

Der Zufall erzeugt eine Figur, die aus Rechtecken zusammengesetzt ist.

Zerlege die Figur in 2 Rechtecke und ermittle dann die fehlende Seite x.
Berechne auch den Umfang der Figur.

Zeichne diese Figur auf einem Blatt Papier mit dem Geo-Dreieck.
Anstelle von m zeichne mit mm.

Ein Grundstück



Maßeinheit der Länge = 1 m

Umfang des Grundstücks = ?

Seite x = ? m

Umfang U = ? m

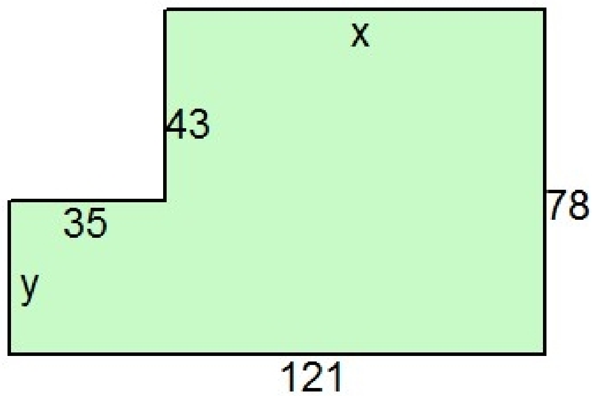
Zusammengesetzte Flächen, Teil 3

Der Zufall erzeugt eine Figur, die aus Rechtecken zusammengesetzt ist.

Zerlege die Figur in 2 Rechtecke und ermittle die fehlenden Seiten x, y.
Berechne auch den Umfang der Figur.

Zeichne diese Figur auf einem Blatt Papier mit dem Geo-Dreieck.
Anstelle von m zeichne mit mm.

Ein Grundstück



Maßeinheit der Länge = 1 m

Umfang des Grundstücks = ?

Seite x = ? m

Seite y = ? m

Umfang U = ? m

Die Messung von Streckenlängen

Die Längenmessung

Als Maßeinheit dient die Einheitsstrecke AE, welcher die Länge e mit e = 1 cm zugeordnet wird.

Gegeben ist eine bestimmte Strecke PQ mit unbekannter Länge s.

Wir zählen ab, wie oft die Einheit e in der Strecke PQ enthalten ist.

Die Einheitsstrecke wird 4 Mal auf der Strecke PQ abgetragen.
Es bleibt ein Rest r übrig, der kleiner als die Einheitsstrecke ist.

Es gilt daher: $s = 4*e + r$ mit $r < e$, d.h. $s = 4\text{ cm} + r$.

Um den Rest zu messen, wird die Maßeinheit e in 10 gleich lange Teile zerlegt. Ein solcher Teil wird als neue Einheit mit Länge z = 1 mm festgesetzt. Mit dieser Einheit wird der Rest r gemessen. Bleibt dabei wieder ein Rest übrig, dann wird die Maßeinheit noch einmal verfeinert. Dieser Messvorgang wird so lange wiederholt bis der letzte Rest unter einer vorbestimmten Genauigkeit liegt.

Maßeinheiten der Länge

Die Maßeinheiten für die Längenmessung sind km, m, dm, cm, mm.

1 km = 1000 m
1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

Zwei Beispiele für Maßumwandlungen:

Dazu kann man eine Einheiten-Tabelle verwenden. Dort trägt man an den richtigen Positionen die Zahlen ein und liest dann die Einheiten ab.

Umwandlung von 327 mm in die verschiedenen Maßeinheiten.

```
k       d c m
m     m m m m
- - - - - - -
        3 2 7
```

327 mm = 3 dm 2 cm 7 mm.

Umwandlung von 40 m 9 cm in mm.

```
k       d c m
m     m m m m
- - - - - - -
      4 0 0 9 0
```

40 m 9 cm = 40090 mm.

II. Die Fläche von Rechtecken

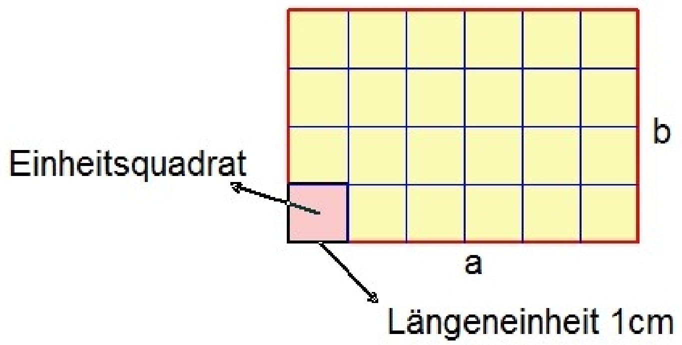
Die Flächenmessung

Wie jede Messung erfolgt auch die Flächenmessung in zwei Schritten:

(1) Festlegung der Maßeinheit. Das ist die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge von genau einer Längeneinheit (z.B. in cm).

(2) Überprüfen, wie oft das Einheitsquadrat in der gegebenen Fläche enthalten ist. Das liefert den Zahlenwert der Fläche (z.B. in cm²).

Fläche A (area) eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.
(In unserem Beispiel ist a = 6 cm und b = 4 cm).
Zuerst muss eine gemeinsame Maßeinheit (... dm, cm, mm ...) für die beiden Seitenlängen bestimmt werden. Bei uns ist das 1 cm.
Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm ist die Maßeinheit für die Fläche. Dafür schreibt man dann 1 cm² (ein Quadrat-Zentimeter).



Frage: Wie oft ist das Einheitsquadrat im Rechteck enthalten ?

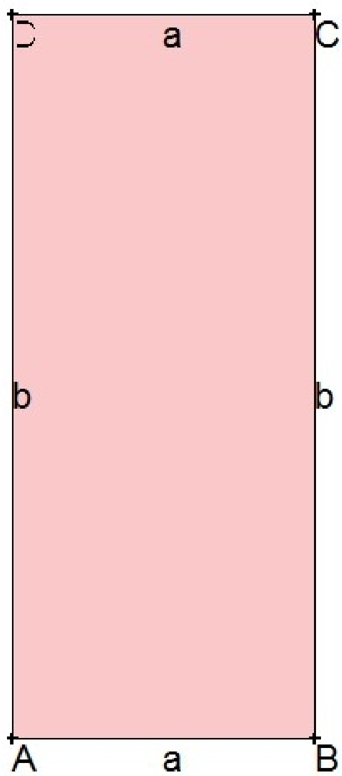
Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm wird im linken unteren Eck des Rechtecks gezeichnet. In der untersten Reihe liegen genau 6 Einheitsquadrate. Das ganze Rechteck besteht aus 4 Reihen.
Daher sind in dem Rechteck 6 * 4 Einheitsquadrate enthalten.
In unserem Beispiel hat das Rechteck somit eine Fläche von 24 cm².

Für die Fläche des Rechtecks gilt allgemein die Formel: A = a * b

Das Rechteck und seine Fläche

Der Zufall erzeugt ein Rechteck mit den Seiten a = 5 cm und b = 12 cm.
Hinweis: Ein Rechteck mit gleich langen Seiten heißt **Quadrat**.
Zeichne das Rechteck auf einem Blatt Papier. Berechne die **Fläche A.**

Rechteck



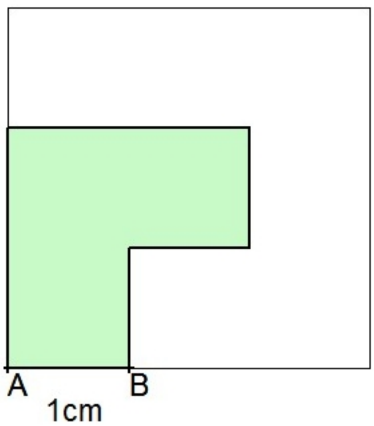
a = 5 cm, b = 12 cm

Fläche A = a * b = ? cm²

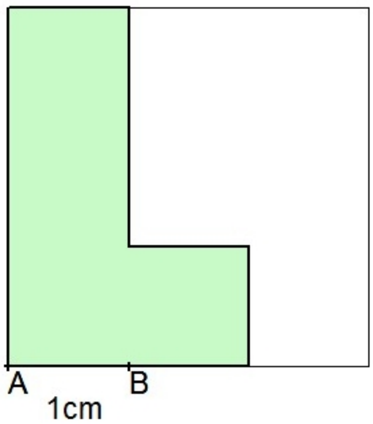
Zusammengesetzte Flächen, Teil 1

Der Zufall erzeugt eine Figur, die nur aus Einheitsquadraten (1 cm²) zusammengesetzt ist.
Zerlege die Figur in entsprechende Teile und addiere diese Teilflächen zur Gesamtfläche A.
Zeichne die Figur auf einem Blatt Papier. Verwende das Geo-Dreieck.

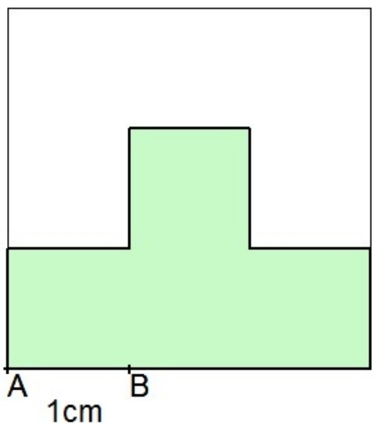
Figur 1, A1 = ? cm²



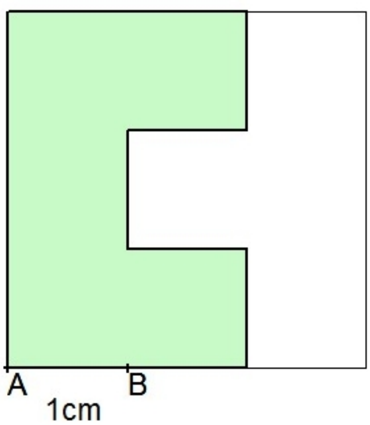
Figur 2, A2 = ? cm²



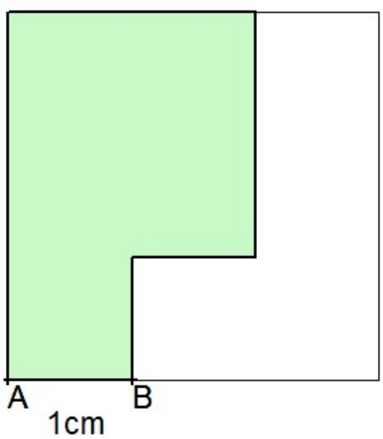
Figur 3, A3 = ? cm²



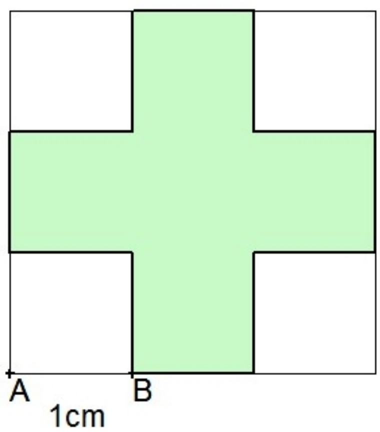
Figur 4, A4 = ? cm²



Figur 5, A5 = ? cm²



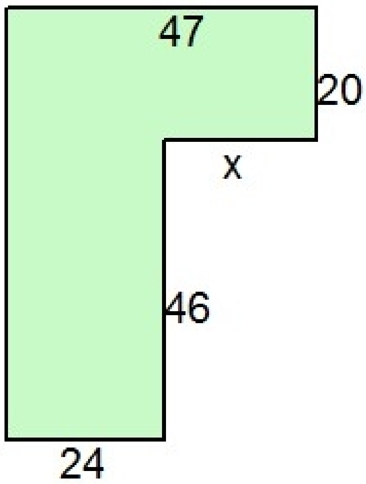
Figur 6, A6 = ? cm²



Zusammengesetzte Flächen, Teil 2

Der Zufall erzeugt eine Figur, die aus Rechtecken zusammengesetzt ist.
Zerlege die Figur in 2 Rechtecke und ermittle dann die fehlende Seite x.
Berechne auch die Fläche der Figur.
Zeichne diese Figur auf einem BlattPapier mit dem Geo-Dreieck.
Anstelle von m zeichne mit mm.

Ein Grundstück



Maßeinheit der Länge = 1 m
Maßeinheit der Fläche = 1 m²

Fläche des Grundstücks = ?

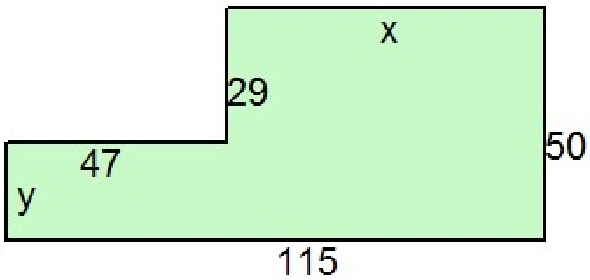
Seite x = ? m

Fläche A = ? m²

Zusammengesetzte Flächen, Teil 3

Der Zufall erzeugt eine Figur, die aus Rechtecken zusammengesetzt ist.
Zerlege die Figur in 2 Rechtecke und ermittle die fehlenden Seiten x, y.
Berechne auch die Fläche der Figur.
Zeichne diese Figur auf einem Blatt Papier mit dem Geo-Dreieck.
Anstelle von m zeichne mit mm.

Ein Grundstück



Maßeinheit der Länge = 1 m
Maßeinheit der Fläche = 1 m²

Fläche des Grundstücks = ?

Seite x = ? m

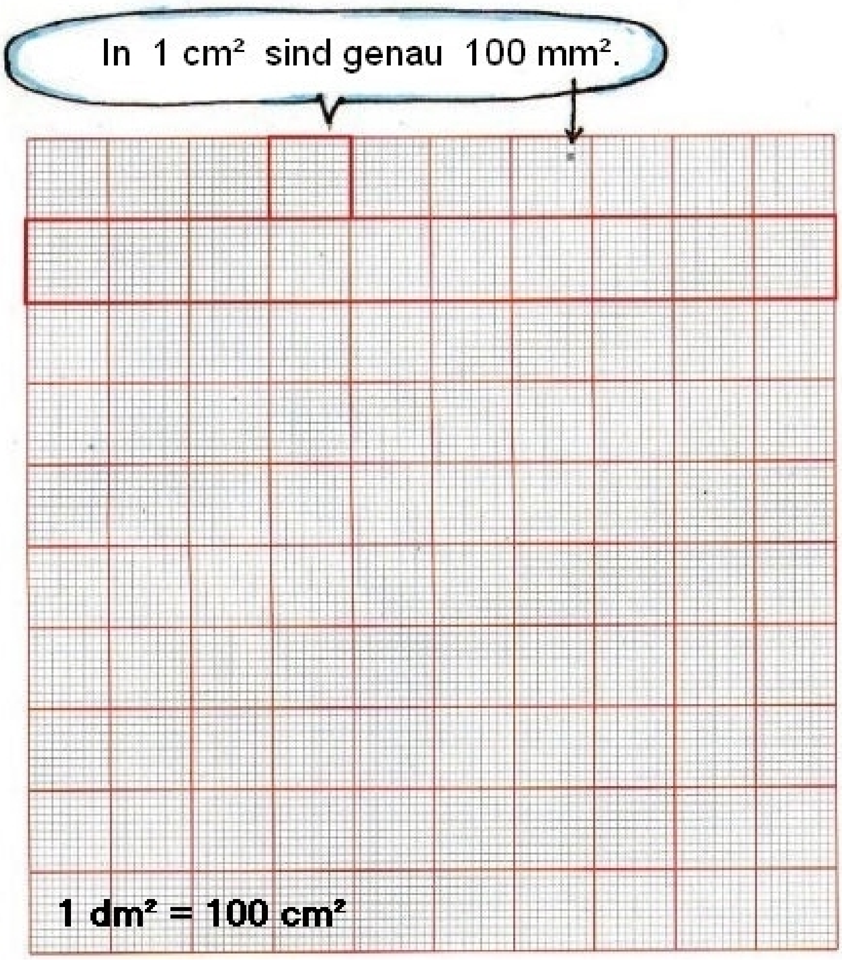
Seite y = ? m

Fläche A = ? m²

Maßeinheiten der Fläche

So wie bei der Längenmessung gibt es auch bei der Flächenmessung verschieden große Maßeinheiten.

In der Grafik kannst du sehen, dass in 1 cm² (Quadrat-Zentimeter) genau 100 mm² (Quadrat-Millimeter) liegen.



1 cm²	= 100 mm²
1 dm²	= 100 cm²
1 m²	= 100 dm²
1 a (Ar)	= 100 m²
1 ha (Hektar)	= 100 a
1 km²	= 100 ha

Umwandlung von Maßeinheiten

Maßeinheiten für die Flächenmessung: km^2, ha, a, m^2, dm^2, cm^2, mm^2.

1 cm^2 = 100 mm^2 (Hundert)
1 dm^2 = 100 cm^2 = 10 000 mm^2 (Zehntausend = 100 * 100)
1 m^2 = 100 dm^2 = 10 000 cm^2 = 1 000 000 mm^2
(1 Million = 10 000 * 100)

1 a (Ar) = 100 m^2
1 ha (Hektar) = 100 a = 10 000 m^2
1 km^2 = 100 ha = 10 000 a = 1 000 000 m^2

Ein Beispiel:

Umwandlung von 30275 cm^2 in die verschiedenen Maßeinheiten.
Dazu kann man eine Einheiten-Tabelle verwenden. Dort trägt man an den richtigen Positionen die Zahlen ein und liest dann die Einheiten ab.

k m^2		h a		a		m^2		d m^2		c m^2		m m^2
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
						3	0	2	7	5		

30275 cm^2 = 3 m^2 2 dm^2 75 cm^2.

Umwandlungsaufgaben I

Der Zufall erzeugt den Zahlenwert einer Fläche in cm^2.
Wandle diese Fläche in die verschiedenen Maßeinheiten um.
Beginne dabei ganz rechts und gehe schrittweise nach links.

A = 216049 cm^2

	m^2		dm^2		cm^2
-	-	-	-	-	-
2	1	6	0	4	9

Umwandlungsaufgaben II

Der Zufall erzeugt den Zahlenwert einer Fläche in cm².
Wandle diese Fläche in die verschiedenen Maßeinheiten um.
Hinweis: Orientiere dich dabei an der Einheiten-Tabelle.

```
k   h           d   c   m
m²  a   a   m²  m²  m²  m²
- - - - - - - - - - - - -
```

A = 78993 cm²

A = 7 m² + 89 dm² + 93 cm²

Umwandlungsaufgaben III

Der Zufall erzeugt den Zahlenwert von zwei Flächen.
Berechne die Summe dieser Flächen in drei Schritten.
Führe die Rechnung auf einem Blatt Papier aus.

<u>1. Schritt:</u> Wandle alle Flächen in die kleinste vorkommende Maßeinheit um.
<u>2. Schritt:</u> Führe die Addition aus.
<u>3. Schritt:</u> Wandle das Ergebnis wieder in die verschiedenen Maßeinheiten um.

1. Fläche = 82 m² + 99 dm² + 66 cm² = 829966 cm²

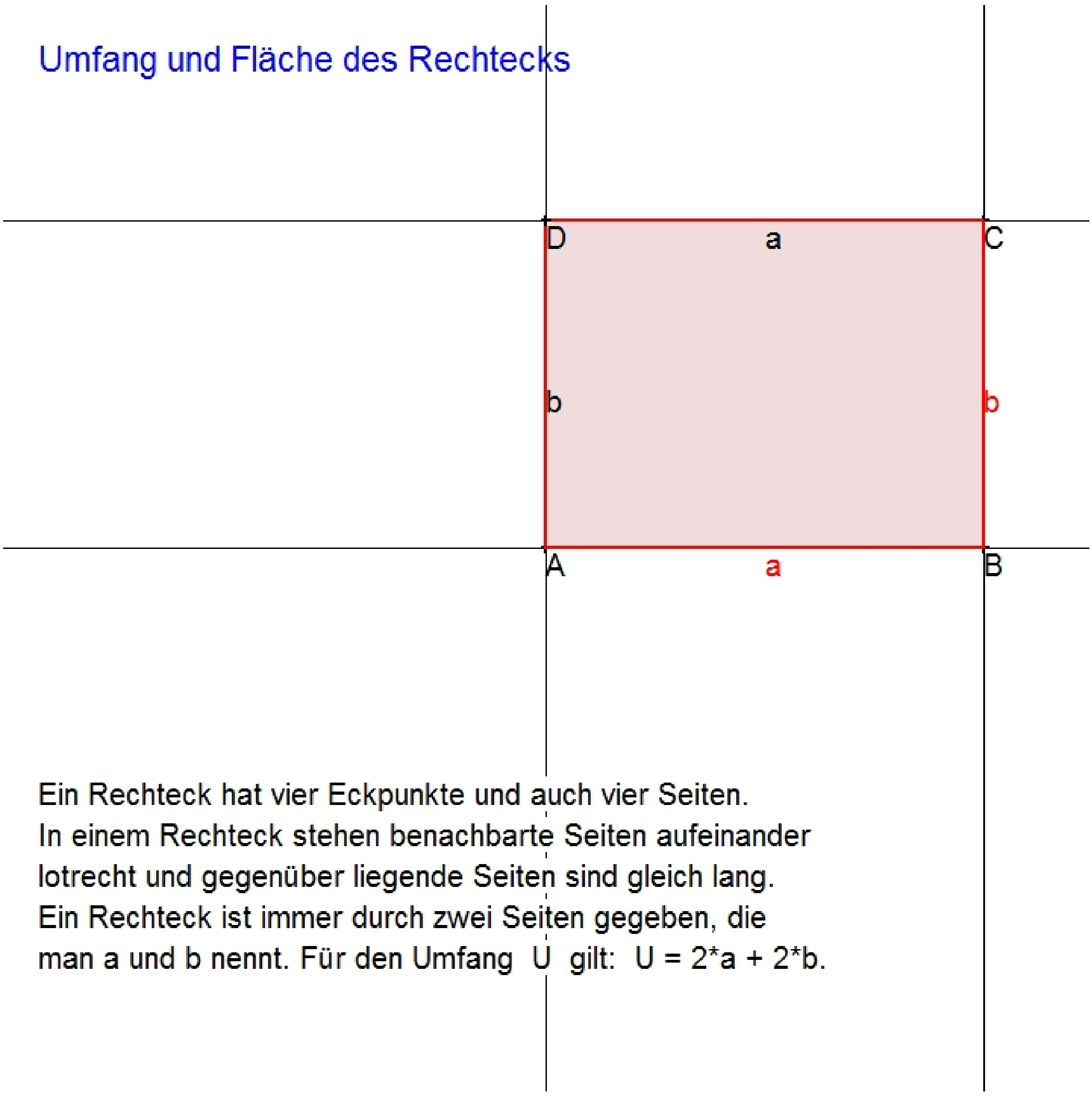
2. Fläche = 12 m² + 95 dm² + 37 cm² = 129537 cm²

```
 829966
+129537
 ----------
 959503
```

Summe = 95 m² + 95 dm² + 03 cm²

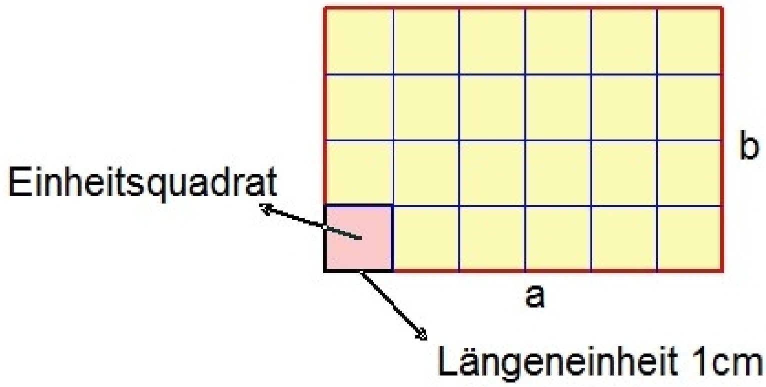
RECHTECK und DREIECK

Der Umfang des Rechtecks



Die Fläche des Rechtecks

Fläche A (area) eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.
(In unserem Beispiel ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm).
Zuerst muss eine gemeinsame Maßeinheit (… dm, cm, mm …) für die beiden Seitenlängen bestimmt werden. Bei uns ist das 1 cm.
Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm ist die Maßeinheit für die Fläche. Dafür schreibt man dann 1 cm² (ein Quadrat-Zentimeter).

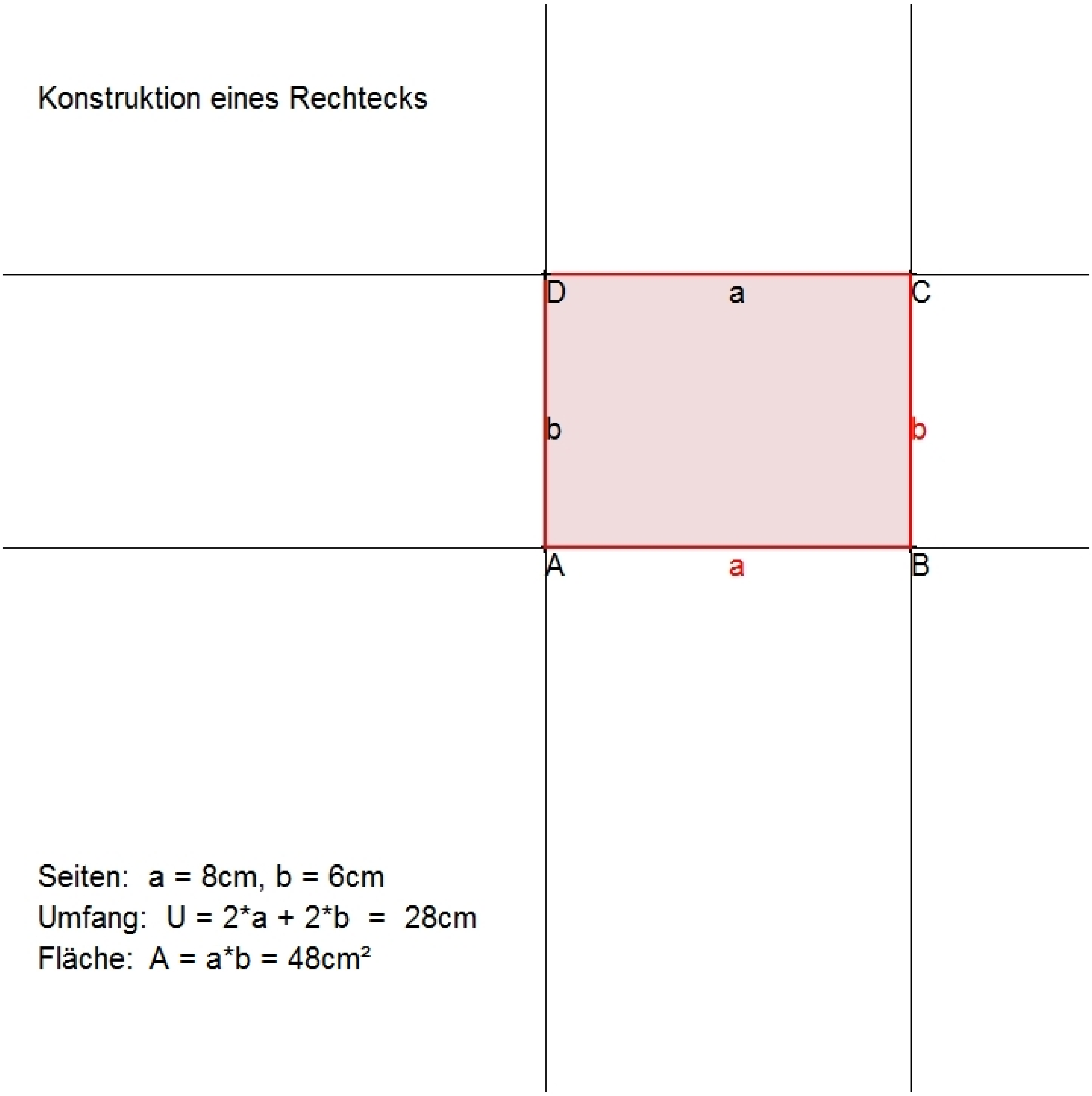


Frage: Wie oft ist das Einheitsquadrat im Rechteck enthalten ?

Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm wird im linken unteren Eck des Rechtecks gezeichnet. In der untersten Reihe liegen genau 6 Einheitsquadrate. Das ganze Rechteck besteht aus 4 Reihen. Daher sind in dem Rechteck $6 * 4$ Einheitsquadrate enthalten.
In unserem Beispiel hat das Rechteck somit eine Fläche von 24 cm².

Für die Fläche des Rechtecks gilt allgemein die Formel: $A = a * b$

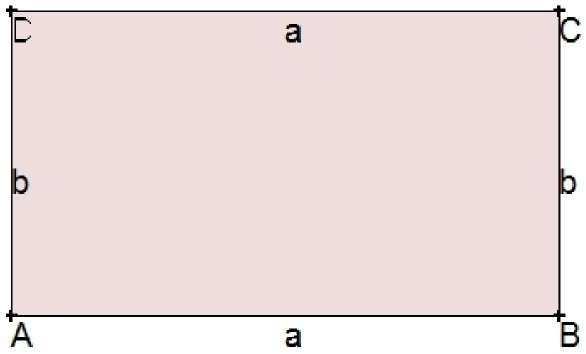
Hinweis: Die Fläche wird mit A oder auch mit F bezeichnet.



(1) Seite AB = a zeichnen
(2) Ein Lot im Punkt A auf Seite a auftragen und Seite AD zeichnen
(3) Ein Lot im Punkt B auf Seite a auftragen und Seite BC zeichnen
(4) Die beiden Punkte C und D verbinden

Der Zufall erzeugt Rechtecke

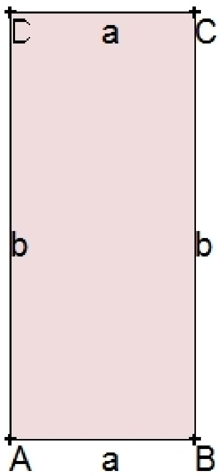
Gegeben: a = 9, b = 5
Gesucht : Umfang U, Fläche A



Umfang U = 2*a + 2*b = 28 cm
Fläche A = a * b = 45 cm²

Der Zufall erzeugt Rechtecke

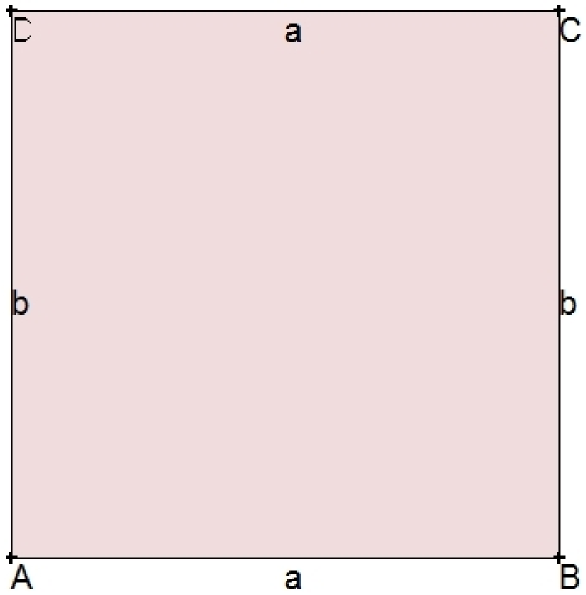
Gegeben: a = 3, b = 7
Gesucht : Umfang U, Fläche A



Umfang U = 2*a + 2*b = 20 cm
Fläche A = a * b = 21 cm²

Der Zufall erzeugt Rechtecke

Gegeben: a = 9, b = 9
Gesucht : Umfang U, Fläche A

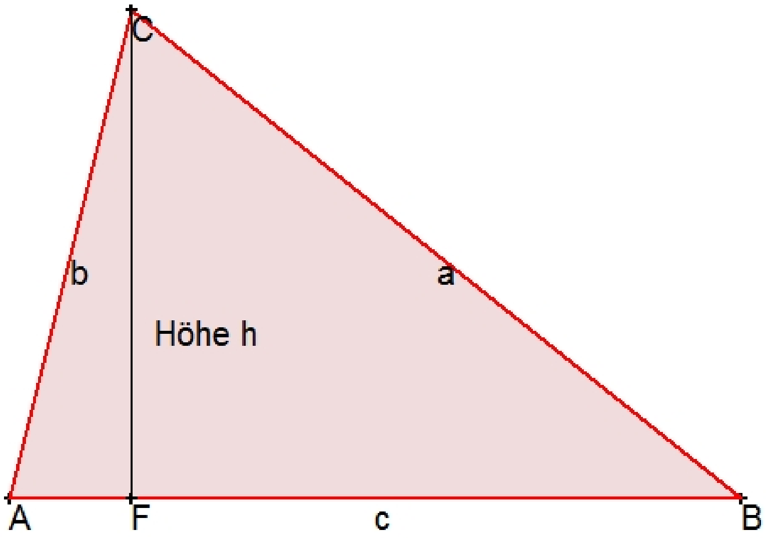


Umfang U = 2*a + 2*b = 36 cm
Fläche A = a * b = 81 cm²

Der Umfang des Dreiecks

Umfang und Fläche des Dreiecks

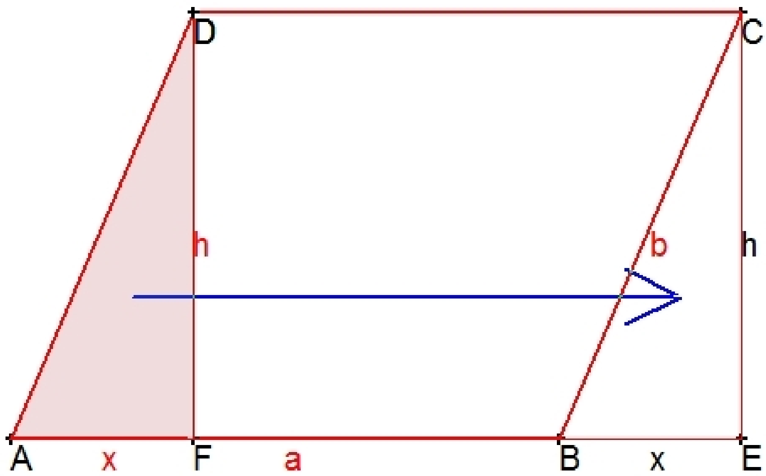
Ein Dreieck besitzt drei verschiedene Eckpunkte A, B und C.
Die Verbindungsstrecken der Ecken heißen Seiten a, b und c.
Eine Seite liegt immer dem gleichnamigen Eckpunkt gegenüber.



Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass die Summe von zwei Dreiecksseiten immer größer als die dritte Seite sein muss.
Zählt man die drei Seiten zusammen, erhält man den Umfang U.
Eine Höhenlinie im Dreieck ist eine Gerade, die durch einen Eckpunkt geht und senkrecht auf die gegenüberliegende Seite steht. (Beispielsweise im Lotfußpunkt F mit h = CF).

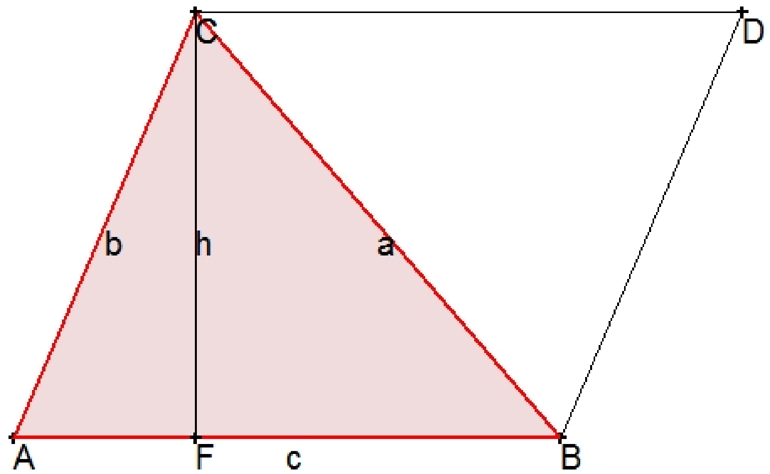
Die Fläche des Dreiecks

Wir wollen nun die Fläche eines Dreiecks berechnen.
Dazu müssen wir zunächst die Fläche eines Parallelogramms ermitteln. Dann erst können wir die Dreiecksfläche bestimmen.

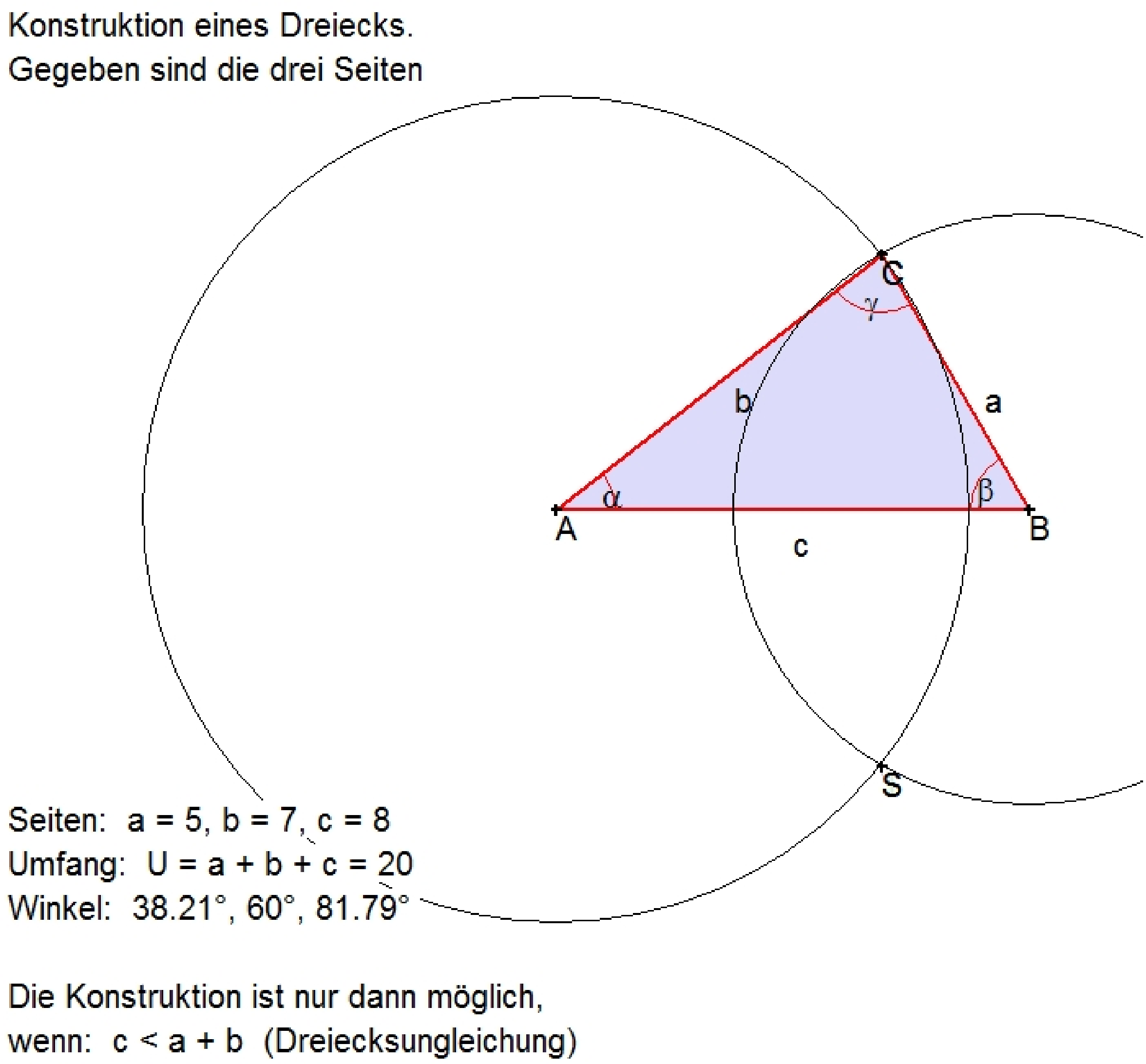


Durch die Höhe h auf die Seite a wird das rechtwinkelige Dreieck AFD gebildet.
Dieses wird nach rechts auf das Dreieck BEC verschoben.
Dadurch entsteht ein Rechteck FECD, das flächengleich zum Parallelogramm ist. Für dessen Fläche gilt daher $A = a * h$.

Die Fläche des Dreiecks

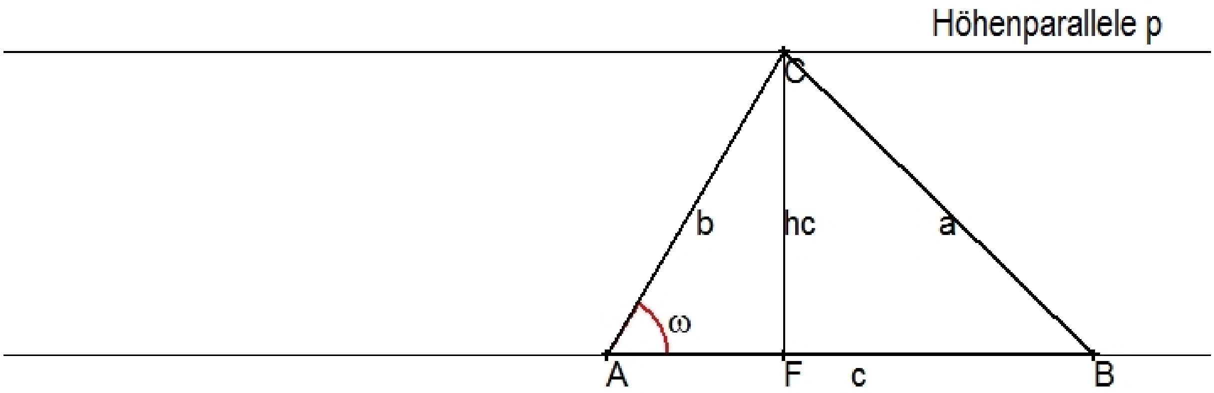


Das Dreieck ABC ist die Hälfte des Parallelogramms ABDC, dessen Diagonale die Dreiecksseite a ist. Daher gilt für die Fläche des Dreiecks die Formel: $A = (c * h) / 2$.



(1) Seite AB = c zeichnen.
(2) Kreis mit Mittelpunkt A und Radius b zeichnen.
(3) Kreis mit Mittelpunkt B und Radius a zeichnen.
(4) Die beiden Kreise schneiden. Ihr Schnittpunkt ist der Eckpunkt C.
(5) Das Dreieck ABC zeichnen.

Konstruktion eines Dreiecks.
Gegeben sind Seite c und
Höhe hc und Winkel w(BAC)

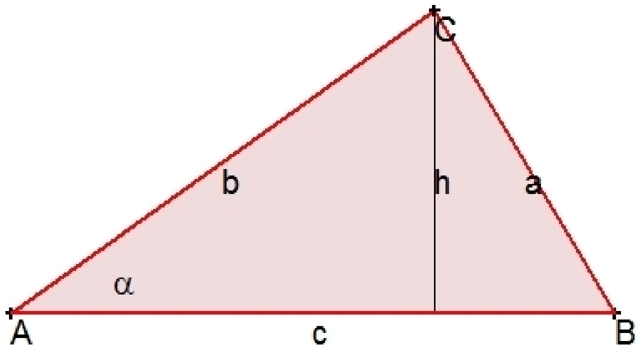


Seite c = 8
Höhe hc = 5
Winkel w = w(BAC) = 60°
Seiten: a = 7.15, b = 5.77

(1) Seite AB = c zeichnen.
(2) Höhenparallele p im Abstand von h_c zur Seite c zeichnen.
(3) Winkel w = w(BAC) im Eckpunkt A zeichnen.
(4) Den Winkelschenkel b mit der Höhenparallele p schneiden.
Das liefert den dritten Eckpunkt C des Dreiecks.
(5) Das Dreieck ABC zeichnen.

Der Zufall erzeugt Dreiecke

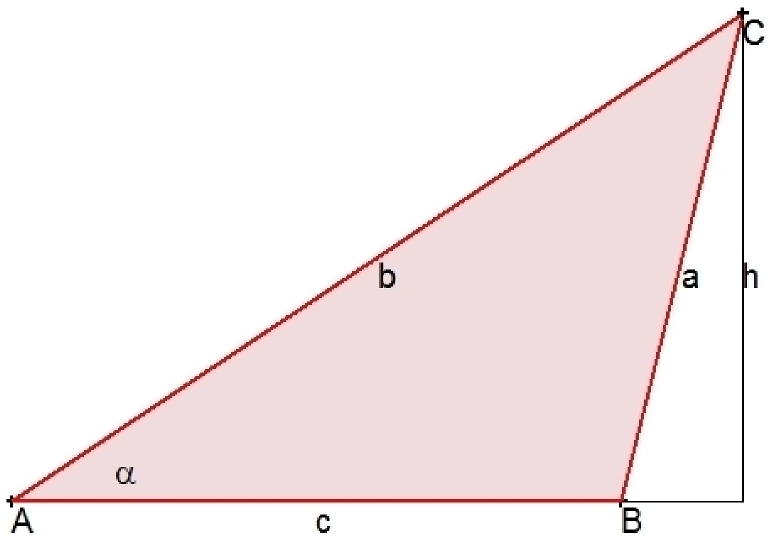
Gegeben: c = 10, h = 5, Winkel α = 36°
Gesucht : Fläche A



Fläche A = c * h / 2 = 25 cm²

Der Zufall erzeugt Dreiecke

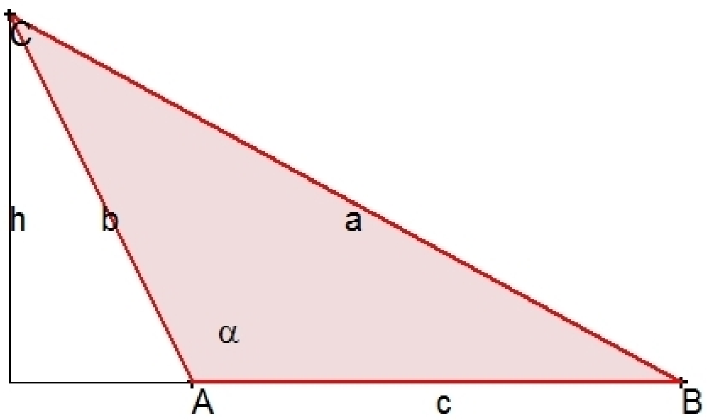
Gegeben: c = 10, h = 8, Winkel $\alpha = 32°$
Gesucht : Fläche A



Fläche A = c * h / 2 = 40 cm²

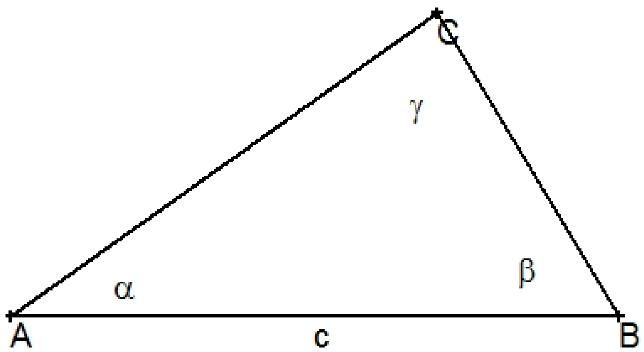
Der Zufall erzeugt Dreiecke

Gegeben: $c = 8$, $h = 6$, Winkel $\alpha = 117°$
Gesucht : Fläche A



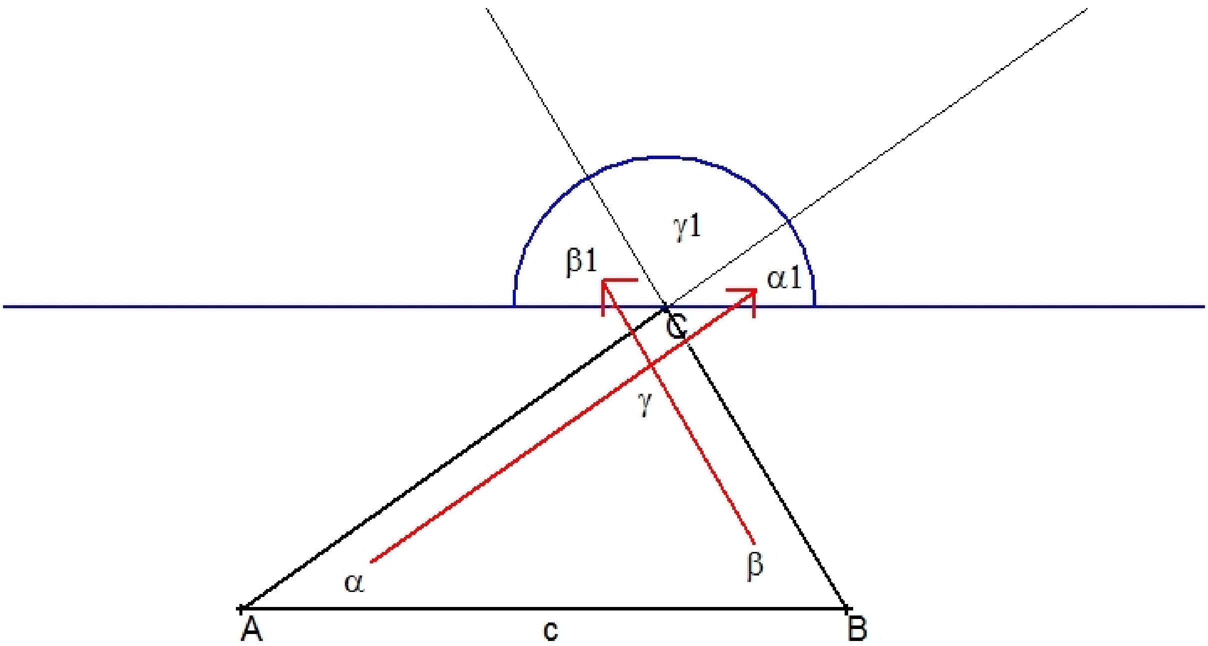
Fläche $A = c * h / 2 = 24$ cm²

Die Winkelsumme im Dreieck



Im Folgenden wird bewiesen, dass in jedem Dreieck ABC die Summe der drei Winkel immer genau 180° ergibt.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



(1) Eine parallele Gerade zur Seite c im Eckpunkt C zeichnen.
(2) Den Winkel bei A entlang der Seite AC verschieben.
(3) Den Winkel bei B entlang der Seite BC verschieben.

$\alpha 1 + \beta 1 + \gamma 1 = 180°$.
$\alpha = \alpha 1,\ \beta = \beta 1,\ \gamma = \gamma 1$.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

(4) Die drei Winkel zusammen ergeben daher genau 180°.

GRUNDLAGEN des MESSENS

Der Messvorgang

Die Objekte unserer Welt haben Merkmale. Beispielsweise haben die Strecken eine "Länge", die Winkel eine "Größe", ebene Bereiche eine "Fläche" und räumliche Körper haben ein "Volumen". Diesen Merkmalen wird beim Messen nach folgendem Verfahren eine Zahl zugeordnet:

Schritt [1] Beschreibung des zu messenden Merkmals.

Schritt [2] Festlegen einer Maßeinheit.

Schritt [3] Erkennen, wie oft diese Maßeinheit in dem gegebenem Merkmal enthalten ist. Das liefert eine bestimmte Maßzahl. Meistens wird dazu ein Messgerät verwendet.

Schritt [4] Bleibt kein Rest, so ist die Messung beendet. Bleibt ein Rest, dann wird die Maßeinheit verfeinert (z.B. auf ein Zehntel verkleinert). Liegt diese neue Maßeinheit unter einer bestimmten Genauigkeit, wird die Messung beendet.

Schritt [5] Messung weiterführen. Zurück zu Schritt [3].

Invarianz und Additivität

Grundsätzlich erhalten kongruente Objekte beim Abmessen immer die gleiche Maßzahl (Invarianz). Lässt sich ein Objekt in Teile zerlegen, dann ist seine Maßzahl die Summe der Maßzahlen seiner Teile (Additivität).

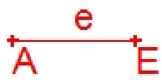
Das Gesetz von Archimedes

Am Anfang von Messungen wird der Maßeinheit immer die natürliche Zahl Eins zugeordnet. Am Ende der Messungen sind die Ergebnisse aber meistens reelle Zahlen x, welche zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen liegen.
Damit diese Eingrenzung möglich ist, muss es zu jeder reellen Zahl x stets eine größere natürliche Zahl n geben.

MESSEN von LÄNGEN

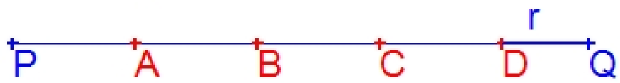
Die Längenmessung

Als Maßeinheit dient die Einheitsstrecke AE, welcher die Länge e mit e = 1 cm zugeordnet wird.



Gegeben ist eine bestimmte Strecke PQ mit unbekannter Länge s.

Wir zählen ab, wie oft die Einheit e in der Strecke PQ enthalten ist.



Die Einheitsstrecke wird 4 Mal auf der Strecke PQ abgetragen.
Es bleibt ein Rest r übrig, der kleiner als die Einheitsstrecke ist.

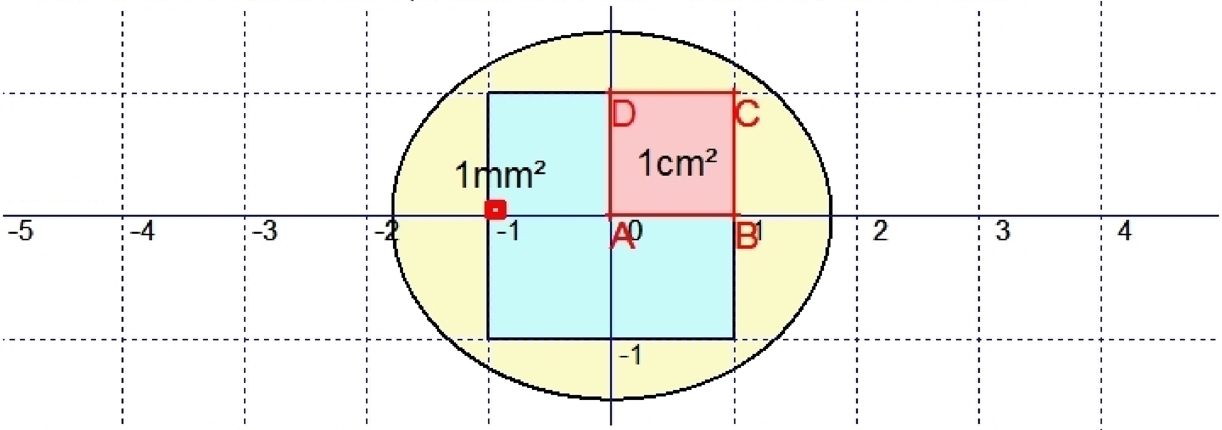
Es gilt daher: $s = 4*e + r$ mit $r < e$, d.h. $s = 4$ cm $+ r$.

Um den Rest zu messen, wird die Maßeinheit e in 10 gleich lange Teile zerlegt. Ein solcher Teil wird als neue Einheit mit Länge z = 1 mm festgesetzt. Mit dieser Einheit wird der Rest r gemessen. Bleibt dabei wieder ein Rest übrig, dann wird die Maßeinheit noch einmal verfeinert. Dieser Messvorgang wird so lange wiederholt bis der letzte Rest unter einer vorbestimmten Genauigkeit liegt.

MESSEN von FLÄCHEN

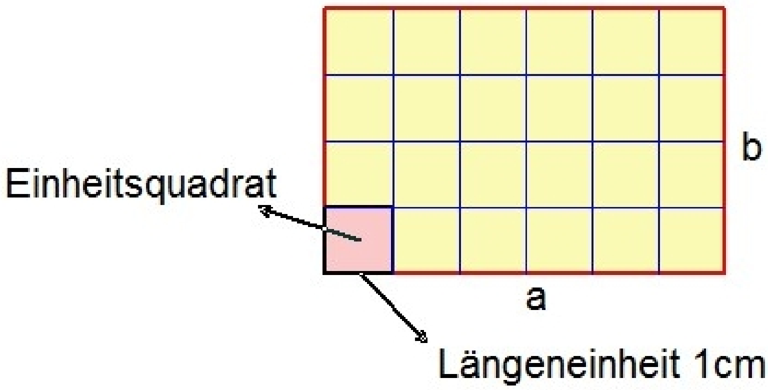
Die Flächenmessung

Als Maßeinheit dient das Einheitsquadrat ABCD mit der Seitenlänge s = 1 cm. Die Fläche e ist mit 1 cm² (Quadratzentimeter) festgelegt. Gegeben ist ein geschlossener Bereich. In unserem Beispiel ist es eine Ellipse mit einer schwarzen Randkurve. Das Einheitsquadrat ist in dem Bereich 4 Mal enthalten, wobei eine Restfläche übrig bleibt. Um diese zu messen, wird die Flächeneinheit e in 100 Teile zerlegt. Die neue Einheit ist ein Quadrat mit Seite 1 mm und Fläche 1 mm².



Es wird nun abgezählt, wie oft die neue kleinere Flächeneinheit in der Restfläche ohne Zwischenraum und Überlappung enthalten ist. Das ergibt eine verfeinerte Maßzahl für die Fläche des Bereichs. Bleibt abermals eine Restfläche übrig, dann wird das Verfahren solange wiederholt bis die Restfläche unter einer vorbestimmten Genauigkeit liegt. Die auf solche Weise gewonnene Maßzahl für die Fläche des Bereichs ist ein Näherungwert. Sie ist nur dann ein ganz genauer Wert, wenn die Restfläche Null wird.

Fläche A (area) eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.
(In unserem Beispiel ist a = 6 cm und b = 4 cm).
Zuerst muss eine gemeinsame Maßeinheit (... dm, cm, mm ...) für die beiden Seitenlängen bestimmt werden. Bei uns ist das 1 cm.
Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm ist die Maßeinheit für die Fläche. Dafür schreibt man dann 1 cm² (ein Quadrat-Zentimeter).



Frage: Wie oft ist das Einheitsquadrat im Rechteck enthalten ?

Das Einheitsquadrat mit der Seite 1 cm wird im linken unteren Eck des Rechtecks gezeichnet. In der untersten Reihe liegen genau 6 Einheitsquadrate. Das ganze Rechteck besteht aus 4 Reihen. Daher sind in dem Rechteck 6 * 4 Einheitsquadrate enthalten.
In unserem Beispiel hat das Rechteck somit eine Fläche von 24 cm².

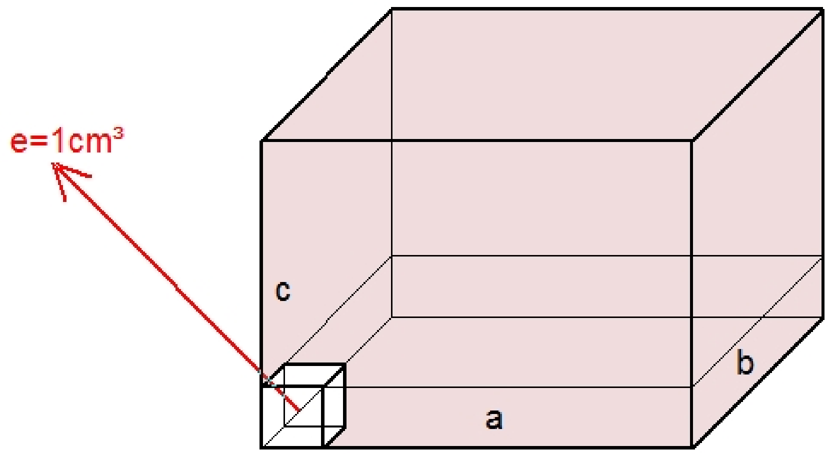
Für die Fläche des Rechtecks gilt allgemein die Formel: A = a * b

Hinweis: Oft wird die Fläche statt mit A auch mit F bezeichnet.

MESSEN von VOLUMEN

Volumen des Quaders

Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c. Um sein Volumen (d.h. den Inhalt des eingeschlossenen Raumes) zu messen, wird ein Einheitswürfel mit der Kantenlänge 1 cm und dem Volumen $e = 1\ cm^3$ (Kubikzentimeter) bei der linken unteren Ecke festgelegt.



Ist der Einheitswürfel nicht ohne Restraum im Quader enthalten, wird er in 1000 kleinere Einheitswürfel mit Kantenlänge 1 mm und dem Volumen $1\ mm^3$ zerlegt. Diese Verfeinerung wird bis zu einer vorbestimmten Genauigkeit fortgesetzt. Dann kann das Volumen berechnet werden: In die untere vordere Reihe passen a Einheitswürfel. Der Boden des Quaders ist eine Schicht aus b Reihen. Also wird der Boden von a * b Einheitswürfeln bedeckt. Der ganze Quader enthält c Schichten und somit a * b * c Einheitswürfel.

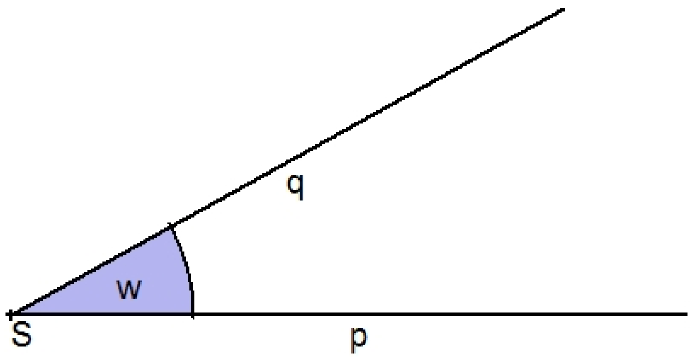
Für das Volumen V des Quaders gilt die Formel $V = a*b*c$.

Hinweis: Wenn der Körper kein Quader ist, dann erfolgt die Messung seines Volumens in der gleichen Weise wie beim Quader, nur erhält man dann entweder eine andere Formel oder auch keine Formel für das Körpervolumen.

MESSEN von WINKELN

Definition eines Winkels

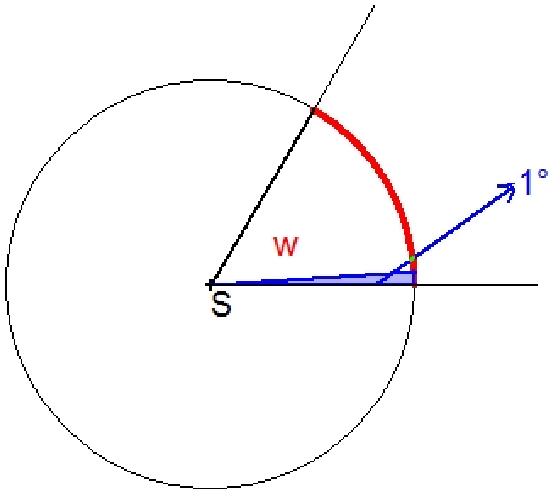
Neben Punkten und Geraden zählen die Winkel zu den Grundelementen der Geometrie.



Ein Winkel w wird in der Ebene festgelegt durch einen Scheitelpunkt S und zwei Halbgerade p und q, welche durch den Scheitel gehen. Die zwei Halbgeraden heißen auch Winkelschenkel.

Messen eines Winkels

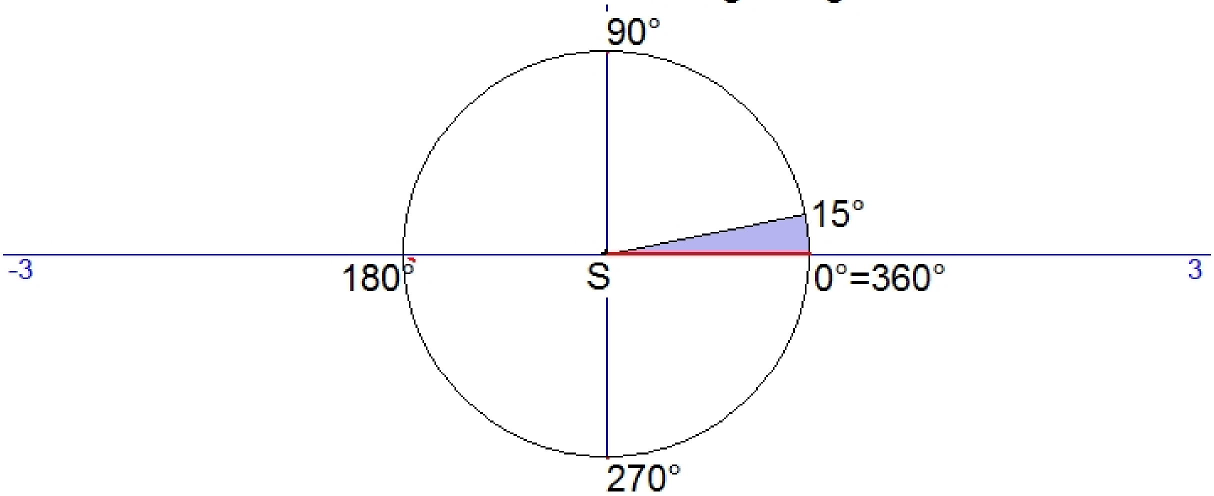
Wir zeichnen einen Winkel w in der Ebene. Der Scheitel des Winkels sei S, und die beiden Schenkel des Winkels schneiden einen Kreis mit dem Mittelpunkt S.



Der volle Kreis entspricht einem Winkel von 360 Grad (°). Ein Grad (1°) entspricht dann dem 360-ten Teil davon. Der Winkel w wird in dieser Maßeinheit gemessen, d.h. es wird abgezählt, wie oft 1° im Winkel w enthalten ist. Bleibt dabei ein Restwinkel übrig, dann wird als feinere Maßeinheit ein entsprechender Teil von 1° genommen und damit die Messung weitergeführt.

Das Winkelmaß und die Zeit

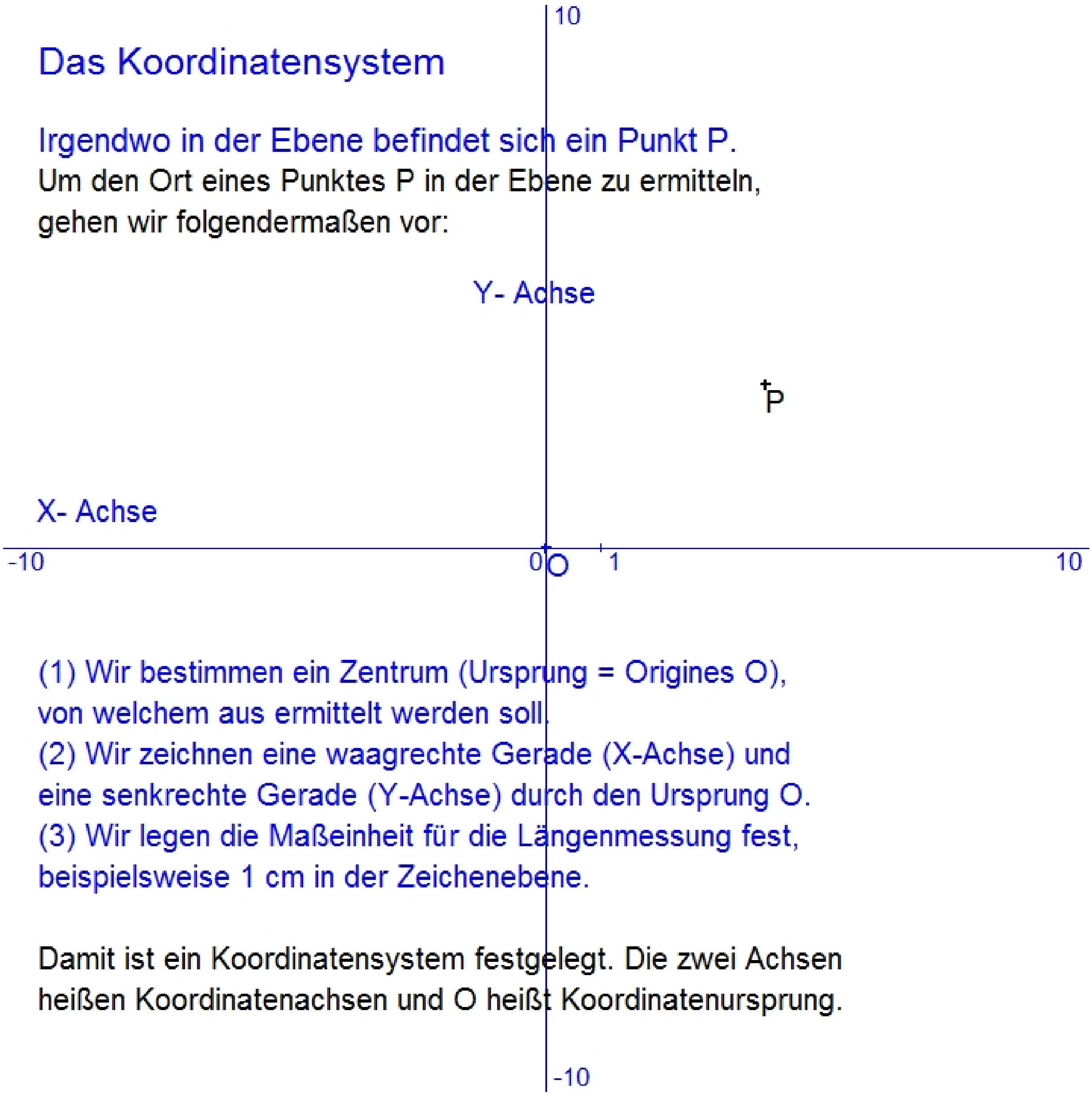
Ein Uhrzeiger wandert in einem Kreis von 0° bis 360°.
Die mathematisch positive Drehrichtung verläuft gegen den herkömmlichen Uhrzeigersinn. Nach jeder Stunde wird der überstrichene Winkel w im Gradmaß ausgegeben.
Nach 24 Stunden ist eine volle Umdrehung erfolgt.



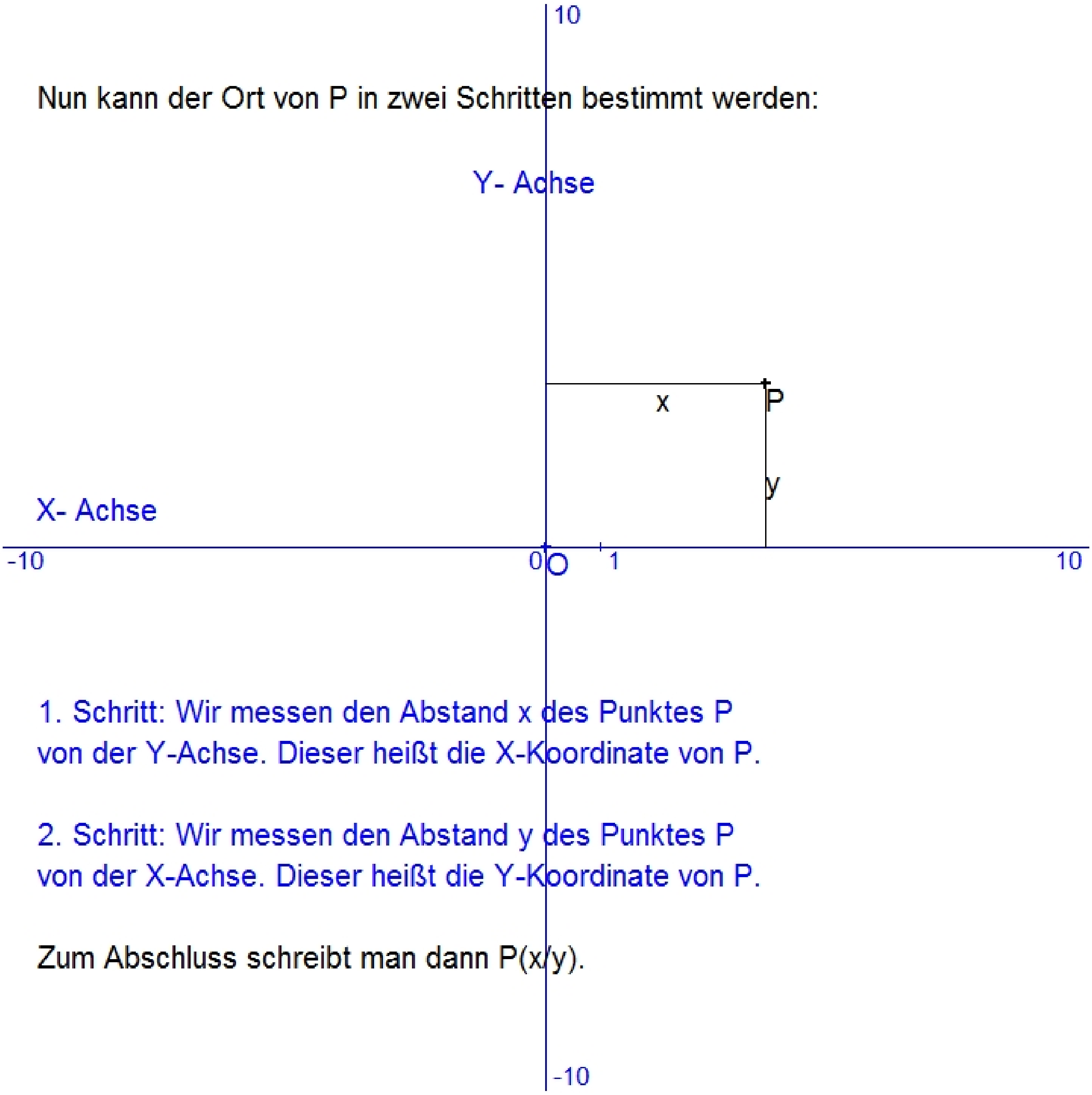
Stunden = 24, Winkel w = 360°
Einer Stunde entsprechen 360° / 24 = 15°.

Nach der Winkelgröße w unterscheidet man spitze (0° <= w < 90°), rechte (w = 90°), stumpfe (90° < w < 180°), gestreckte (w = 180°), erhabene (180° < w < 360°) und volle Winkel (w = 360°).

Das KOORDINATENSYSTEM



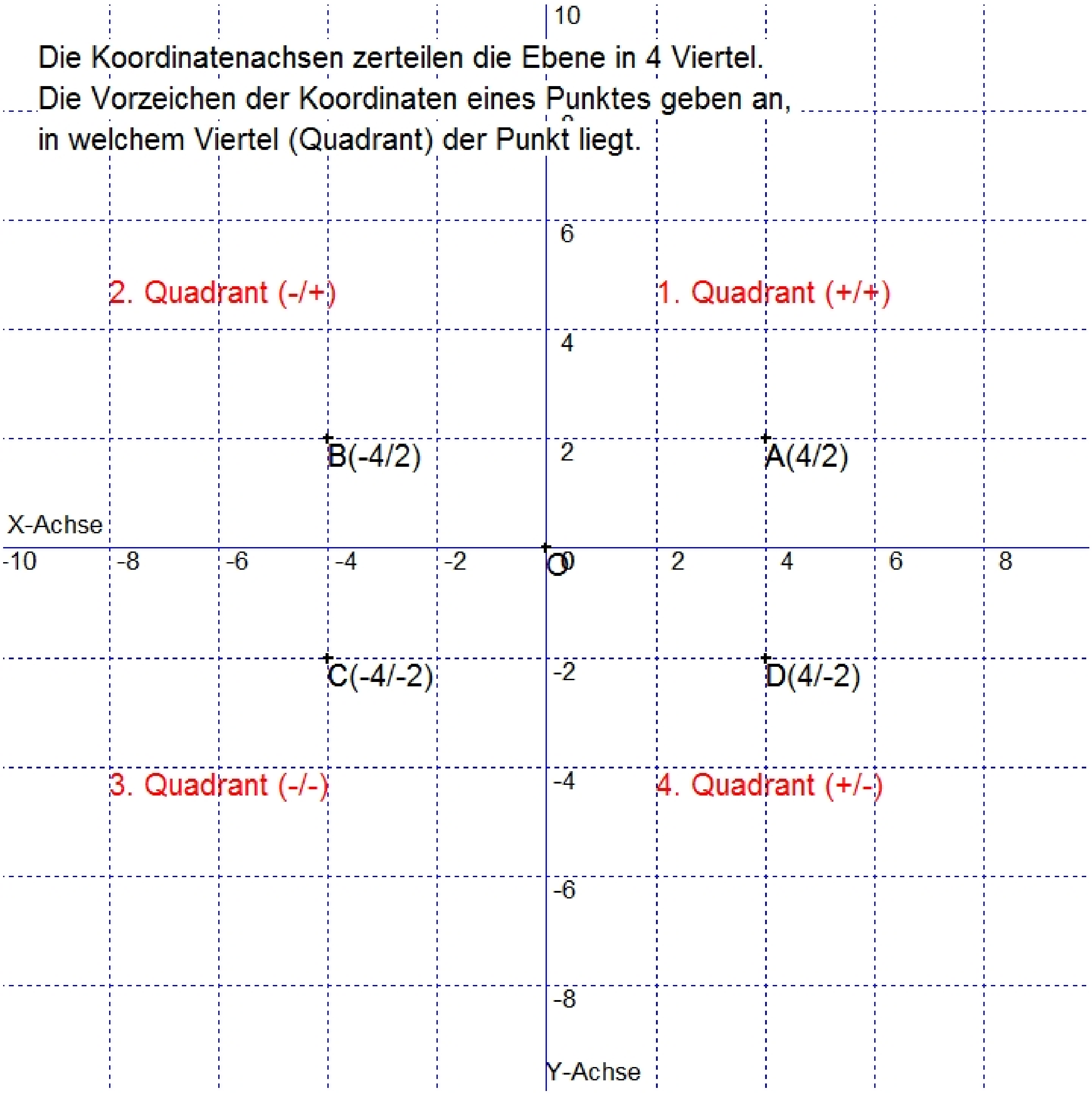
Nun kann der Ort von P in zwei Schritten bestimmt werden:

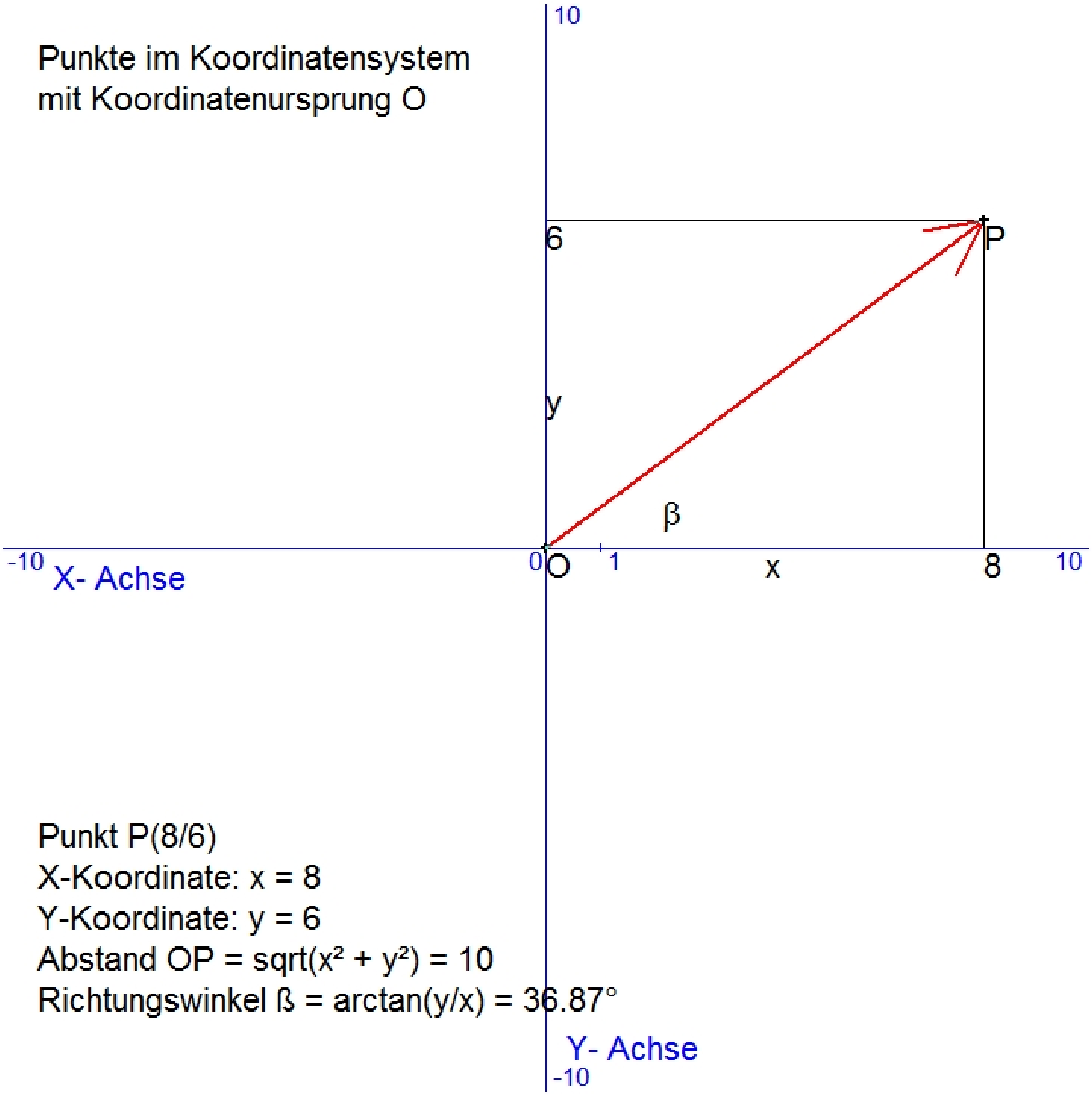


1. Schritt: Wir messen den Abstand x des Punktes P von der Y-Achse. Dieser heißt die X-Koordinate von P.

2. Schritt: Wir messen den Abstand y des Punktes P von der X-Achse. Dieser heißt die Y-Koordinate von P.

Zum Abschluss schreibt man dann P(x/y).


Die Koordinatenachsen zerteilen die Ebene in 4 Viertel.
Die Vorzeichen der Koordinaten eines Punktes geben an,
in welchem Viertel (Quadrant) der Punkt liegt.
2. Quadrant (-/+)
1. Quadrant (+/+)
B(-4/2)
A(4/2)
X-Achse
O
C(-4/-2)
D(4/-2)
3. Quadrant (-/-)
4. Quadrant (+/-)
Y-Achse
10
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

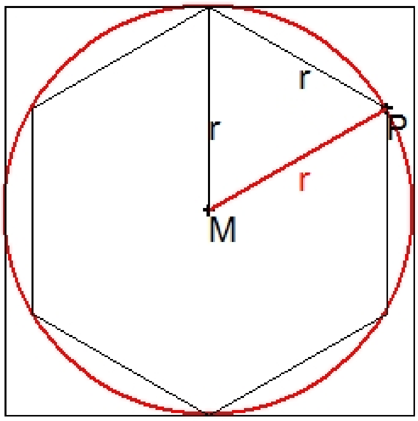

10
Punkte im Koordinatensystem
mit Koordinatenursprung O
6
P
y
β
-10
X- Achse
0
O
1
x
8
10
Punkt P(8/6)
X-Koordinate: x = 8
Y-Koordinate: y = 6
Abstand OP = sqrt(x² + y²) = 10
Richtungswinkel ß = arctan(y/x) = 36.87°
Y- Achse
-10

DER KREIS

Der Umfang des Kreises

Der Kreis ist die Menge aller Punkte P, welche von einem Mittelpunkt M gleichweit entfernt sind.

Der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt wird Radius r genannt. Der doppelte Radius heißt Durchmesser d.



Weil alle Kreise zueinander ähnlich sind, muss das Verhältnis von Umfang U und Durchmesser d konstant (k) sein, d.h U = k * d.
Ein dem Kreis eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck hat die Seite r und daher den Umfang U1 = 3 * d. Ein umgeschriebenes Quadrat hat die Seite d und daher den Umfang U2 = 4 * d. Daraus folgt: 3*d < k*d < 4*d. Also liegt k zwischen 3 und 4. Die wichtige Konstante k wird auch Kreiszahl "pi" genannt.

Näherungsweise Berechnung der Zahl "pi"

Ein dem Kreis eingeschriebenes regelmäßiges N-Eck hat eine Seitenlänge a. Mit dem Lehrsatz von Pythagoras wird die Länge b des regelmäßigen 2N-Ecks berechnet:

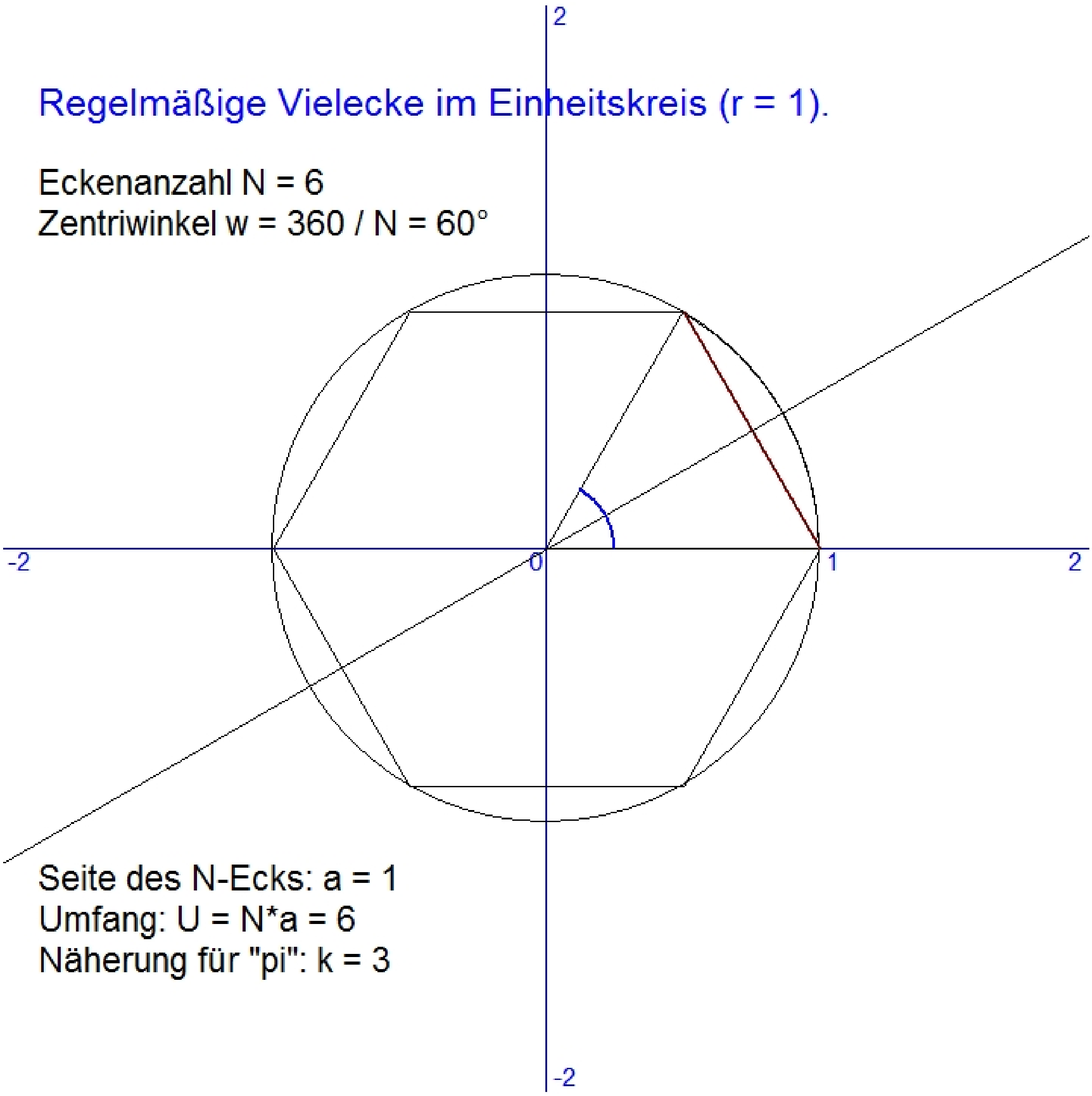
b = sqrt(2r² - r*sqrt(4r² - a²))   mit r als Kreisradius
b = sqrt(2 - sqrt(4 - a²))   mit r = 1 im Einheitskreis

Je größer N ist, umso ähnlicher wird das N-Eck dem Kreis. Nimmt man den Umfang des N-Ecks U = N*a angenähert als Kreisumfang, dann erhält man für die Zahl "pi" folgenden Näherungswert k: Aus U = N*a = k*d folgt k = N*a / d.

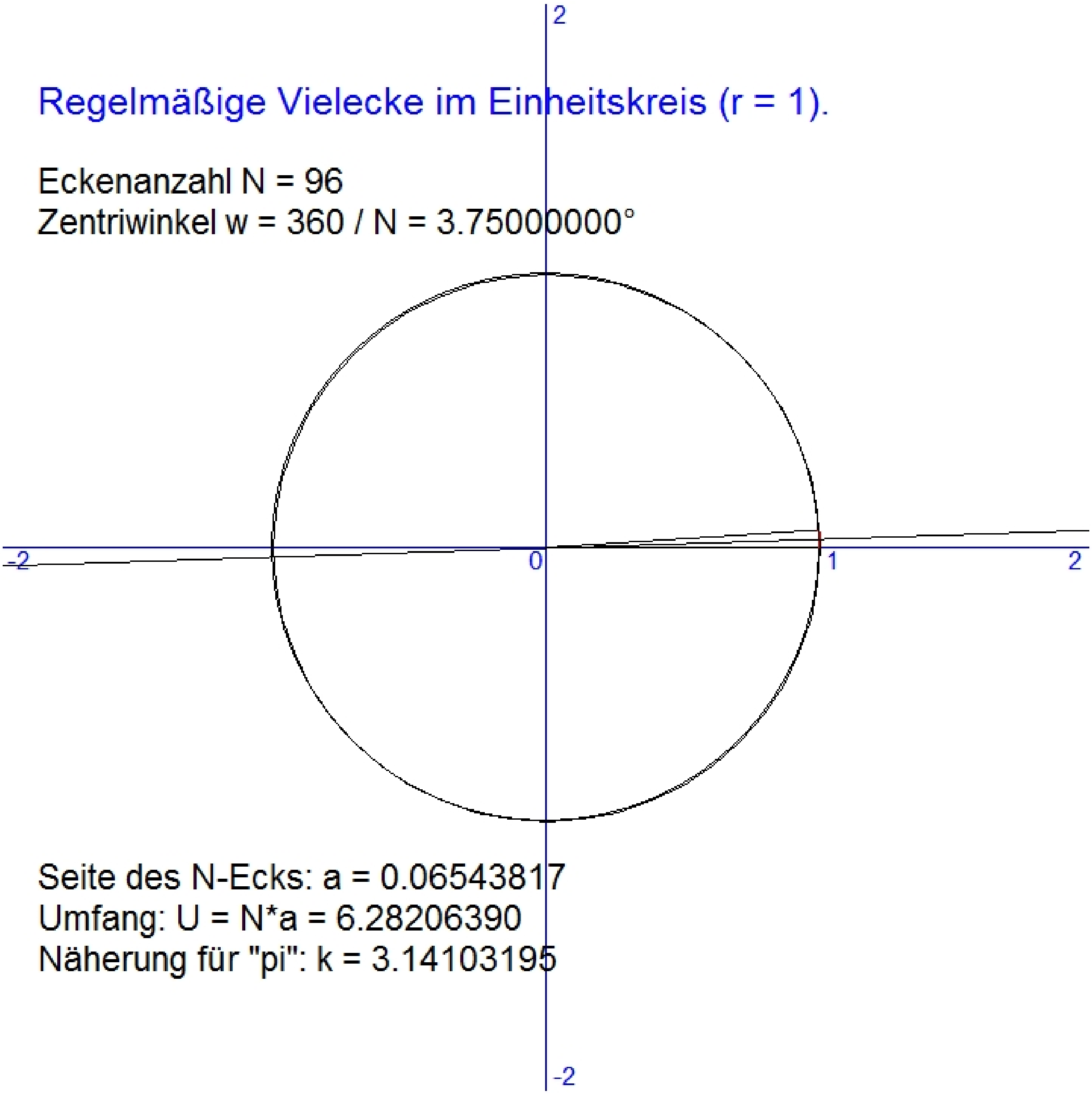
Beginnen wir die Annäherung im Einheitskreis (r = 1) mit dem Sechseck, d.h. N = 6 und a = 1 und k = 6/2 = 3. Sodann verdoppeln wir N und berechnen die Seite des 2N-Ecks mit der obigen Formel und die Näherungswerte für Umfang und "pi".

Dieses Verfahren wird solange wiederholt bis ein vorgegebener Grenzwert erreicht ist.

In der folgenden Grafik wird diese Annäherung demonstriert.



Regelmäßige Vielecke im Einheitskreis (r = 1).
Eckenanzahl N = 6
Zentriwinkel w = 360 / N = 60°
2
-2
0
1
2
-2
Seite des N-Ecks: a = 1
Umfang: U = N*a = 6
Näherung für "pi": k = 3


2
Regelmäßige Vielecke im Einheitskreis (r = 1).
Eckenanzahl N = 96
Zentriwinkel w = 360 / N = 3.75000000°
-2
0
1
2
Seite des N-Ecks: a = 0.06543817
Umfang: U = N*a = 6.28206390
Näherung für "pi": k = 3.14103195
-2

Näherungsweise Berechnung der Zahl "pi".
(auf 8 Dezimalstellen gerundet)

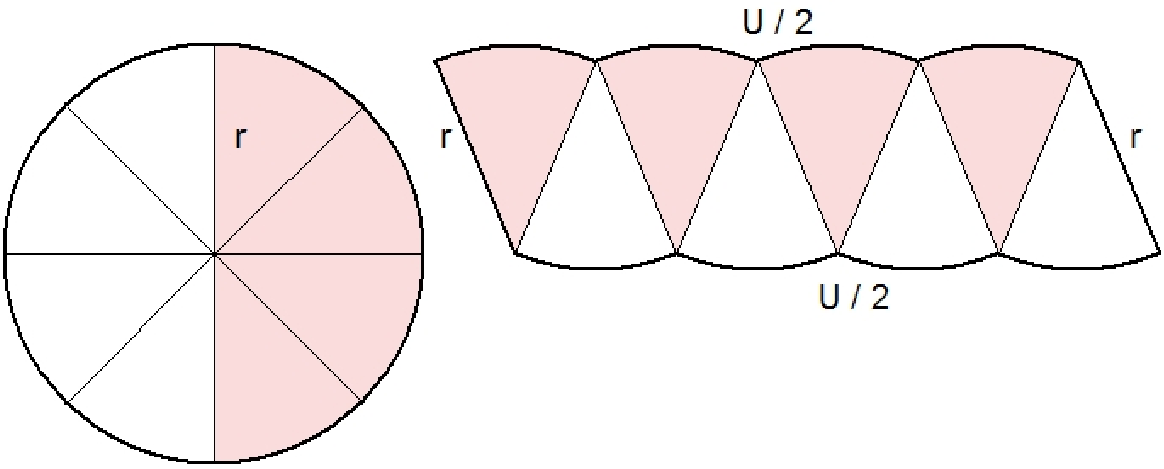
6-Eck: "pi" = 3.00000000
12-Eck: "pi" = 3.10582854
24-Eck: "pi" = 3.13262861
48-Eck: "pi" = 3.13935020
96-Eck: "pi" = 3.14103195
192-Eck: "pi" = 3.14145247
384-Eck: "pi" = 3.14155761
768-Eck: "pi" = 3.14158389
1536-Eck: "pi" = 3.14159046
3072-Eck: "pi" = 3.14159211
6144-Eck: "pi" = 3.14159252
12288-Eck: "pi" = 3.14159262
24576-Eck: "pi" = 3.14159265
49152-Eck: "pi" = 3.14159265

Zahlenwert von "pi" = 3.141592653590.....
(auf 12 Dezimalstellen gerundet)

Es ist üblich für "pi" den griechischen Buchstaben ¶ zu schreiben.
Dann gilt für den Umfang des Kreises die Formel: U = ¶*d = 2*r*¶.

Die Fläche des Kreises

Zur Flächenberechnung wird dem Kreis ein regelmäßiges N-Eck eingeschrieben und der Kreis somit in N Ausschnitte zerlegt. Diese Ausschnitte werden wie in der rechten Figur aufgelegt. Der Kreis und die rechte Figur sind daher flächengleich.

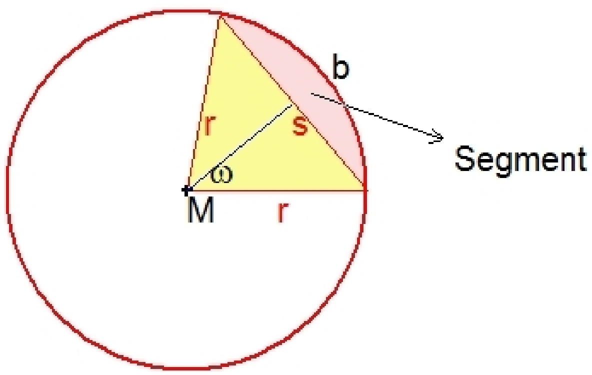


Wird die Zerlegung des Kreises in seine Ausschnitte verfeinert, d.h. strebt N gegen Unendlich, dann nähert sich die rechte Figur einem Rechteck mit U/2 als einer Seite und r als anderer Seite. Die Fläche ist dann $F = r*(U/2)$ und weil ja $U = 2*r*\P$ ist, folgt daher $F = r^2*\P$.

Also gilt für die Fläche des Kreises die Formel: $F = r^2 * \P$.

Die Teile des Kreises (Theorie)

Zieht man vom Mittelpunkt M zwei Radien zur Kreislinie, dann wird ein Ausschnitt (Sektor) gebildet. Der Öffnungswinkel w, welchen die beiden Radien einschließen, heißt Zentriwinkel. Der Teil der Kreislinie, der zwischen den beiden Radien liegt, heißt Kreisbogen b. Jener Teil der Kreisfläche, der zwischen Kreissehne s und Kreisbogen liegt, heißt Abschnitt (Segment).



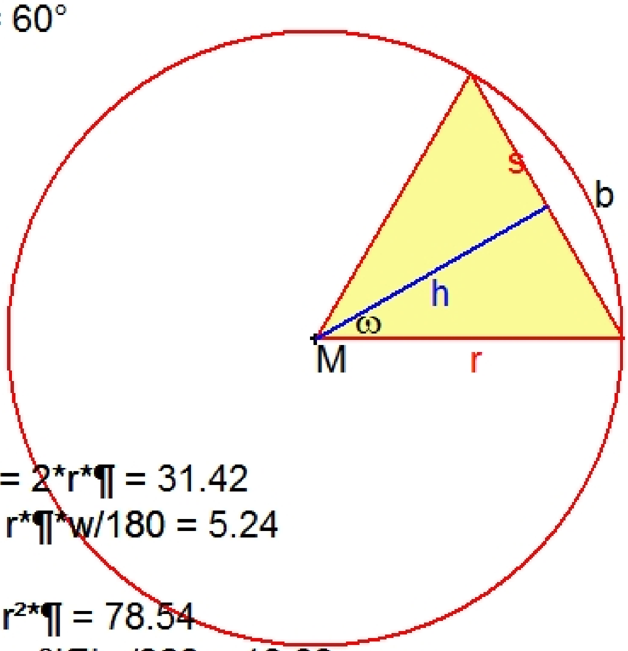
Der Bogen b verhält sich zum Umfang U sowie der Zentriwinkel w zum vollen Winkel von 360°, d.h. b / U = w / 360, b = U * w / 360.
Also gilt für den Kreisbogen b = r * ¶ * w / 180.

Die Sektorfläche E verhält sich zur Kreisfläche F sowie der Zentriwinkel w zum vollen Winkel, d.h. E / F = w / 360, E = F * w / 360.
Also gilt für die Sektorfläche E = r^2 * ¶ * w / 360 = r * b / 2.
Weiters gilt: Segmentfläche G = Sektorfläche E - Dreiecksfläche D.

Die Teile des Kreises (Praxis)

Gegeben:

Kreisradius r = 5
Zentriwinkel w = 60°



Gesucht:

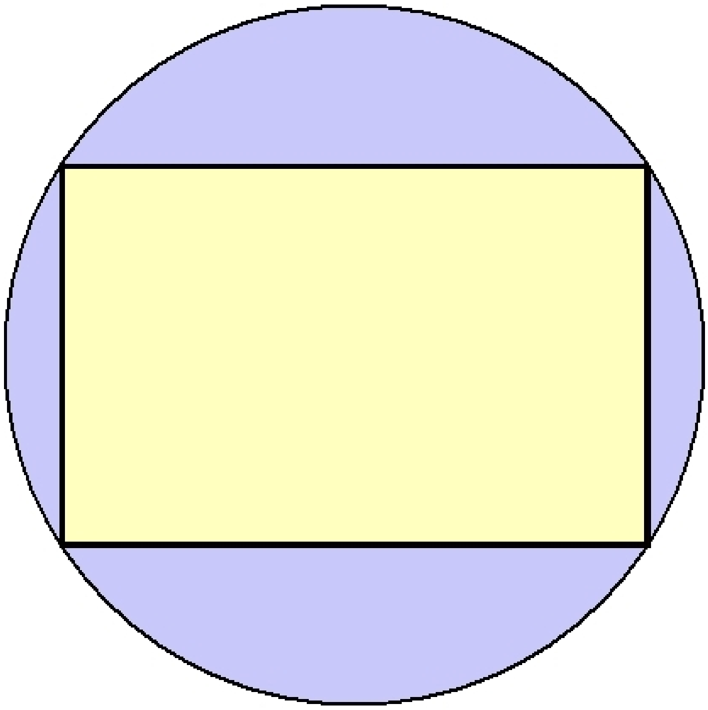
Kreisumfang U = 2*r*¶ = 31.42
Kreisbogen b = r*¶*w/180 = 5.24

Kreisfläche F = r²*¶ = 78.54
Sektorfläche E = r²*¶*w/360 = 13.09

Höhe h = r*cos(w/2) = 4.33
Halbsehne s = sqrt(r²-h²) = 2.50
Dreiecksfläche D = s*h = 10.81
Segmentfläche G = E - D = 2.28

Rechteck und Umkreis

Gegeben: Seiten a = 9.61 cm, b = 6.26 cm
Gesucht : Rechtecksfläche F, Umkreisfläche K



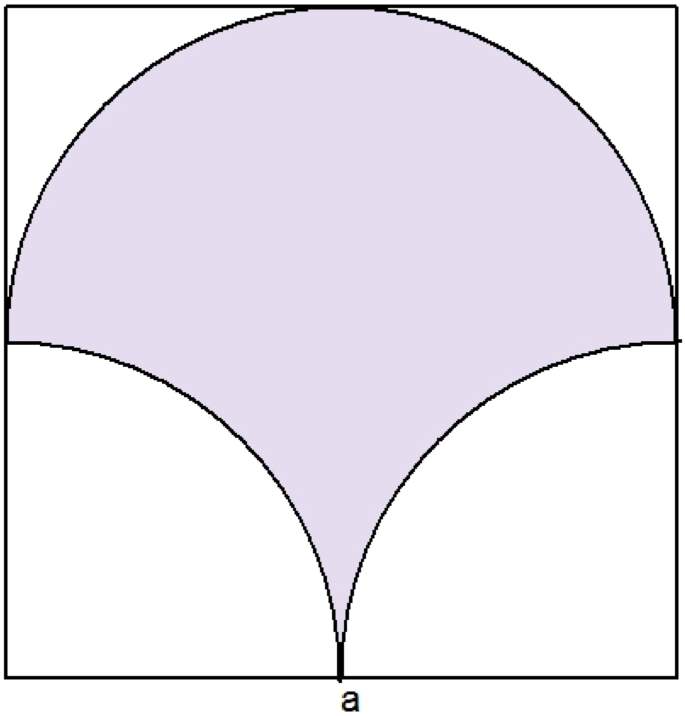
Wieviel Prozent vom Kreis beträgt das Rechteck ?

Lösung:

Diagonale d = 11.47 cm
Rechteck F = 60.16 cm²
Kreis K = 103.31 cm²
Prozent p = 58.23%

Zusammengesetzte Flächen, 1. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 10.94 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs

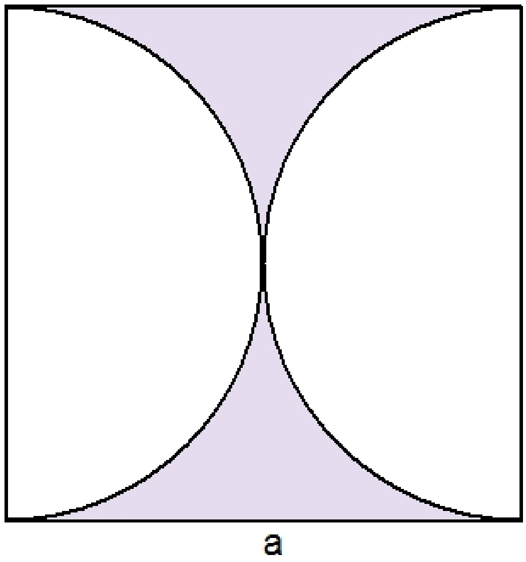


Lösung:

Umfang U = 34.37 cm
Fläche F = 59.84 cm²

Zusammengesetzte Flächen, 2. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 8.41 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs

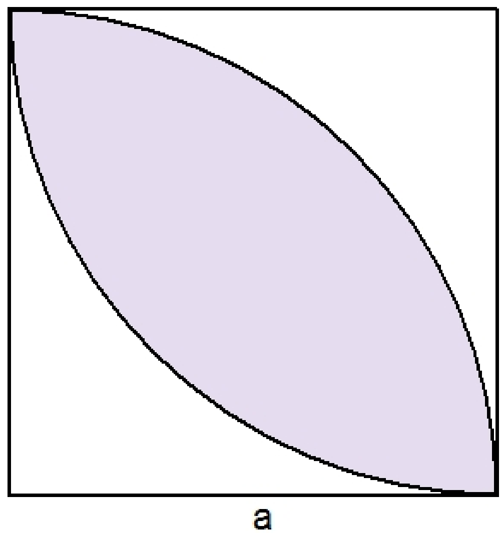


Lösung:

Umfang U = 43.24 cm
Fläche F = 15.18 cm²

Zusammengesetzte Flächen, 3. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 7.92 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs

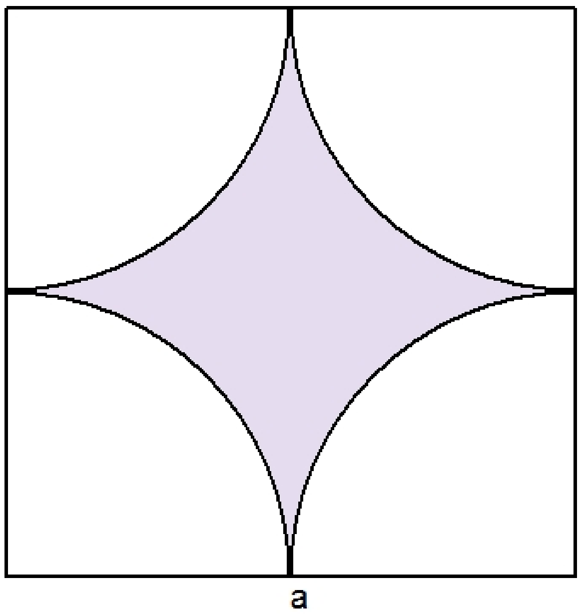


Lösung:

Umfang U = 24.88 cm
Fläche F = 35.80 cm²

Zusammengesetzte Flächen, 4. Beispiel

Gegeben: Quadratseite a = 9.30 cm
Gesucht : Fläche F und Umfang U des gefärbten Bereichs



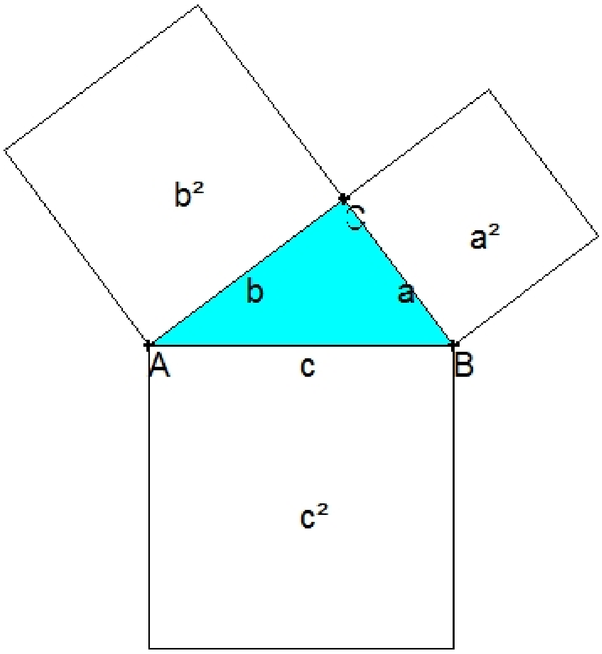
Lösung:

Umfang U = 29.22 cm
Fläche F = 18.56 cm²

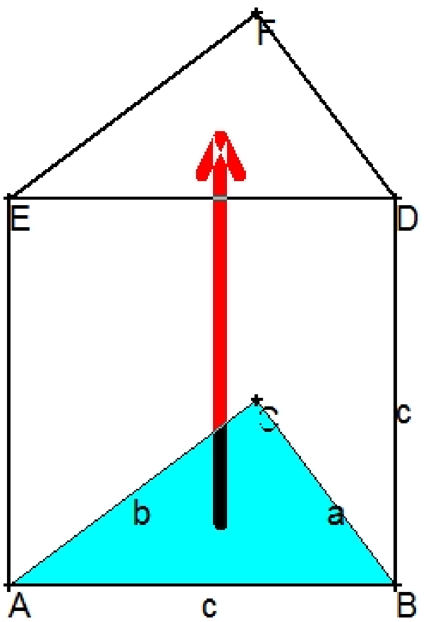
Der LEHRSATZ von PYTHAGORAS und seine ANWENDUNGEN

Der Lehrsatz von Pythagoras:

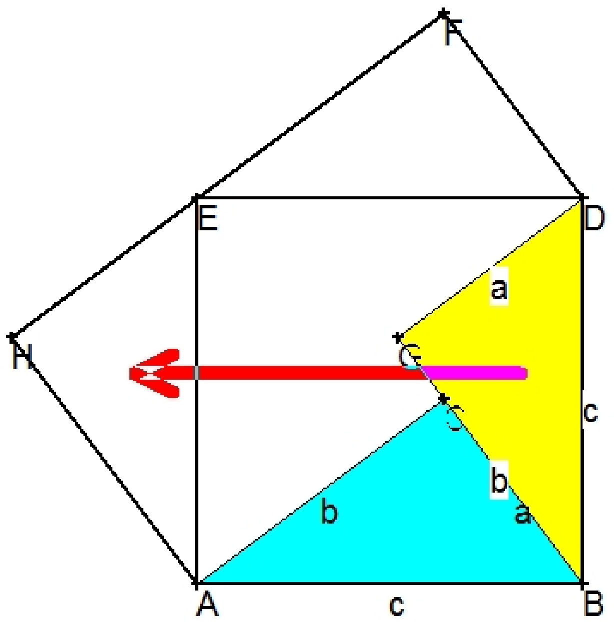
In allen rechtwinkeligen Dreiecken ABC gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.



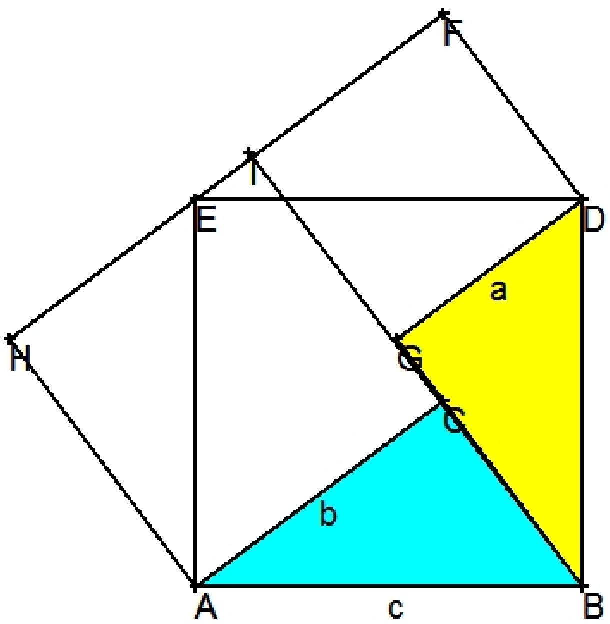
Ein Beweis des Lehrsatzes



(1) Rechtwinkeliges Dreieck ABC zeichnen.
(2) Quadrat ABDE mit Seitenlänge c zeichnen.
(3) Verschieben von Dreieck ABC auf Dreieck EDF.



(1) Rechtwinkeliges Dreieck ABC zeichnen.
(2) Quadrat ABDE mit Seitenlänge c zeichnen.
(3) Verschieben von Dreieck ABC auf Dreieck EDF.
(4) Dreieck BDG (kongruent zu ABC) zeichnen.
(5) Verschieben von Dreieck BDG auf Dreieck AEH.



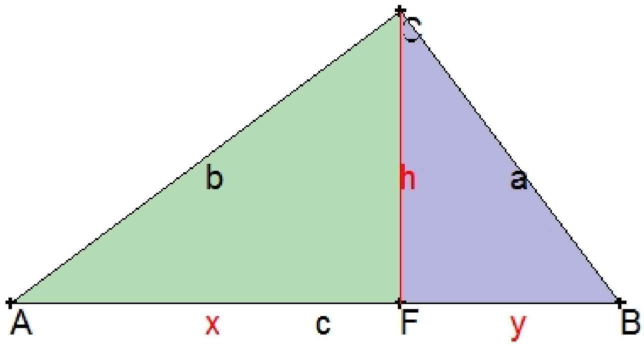
Durch die zwei verschobenen Dreiecke ABC
und BDG entsteht aus dem Quadrat ABDE (c^2)
die flächengleiche Figur ACGDFH, die aus den
Quadraten ACIH (b^2) und GDFI (a^2) besteht.

Also gilt der Hauptsatz: $c^2 = a^2 + b^2$.

Kathetensatz und Höhensatz

Haupsatz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Neben dem Hauptsatz gibt es noch zwei andere Lehrsätze, den "Kathetensatz" und den "Höhensatz".



Einfache Vorbemerkung zum Beweis der zwei Lehrsätze:

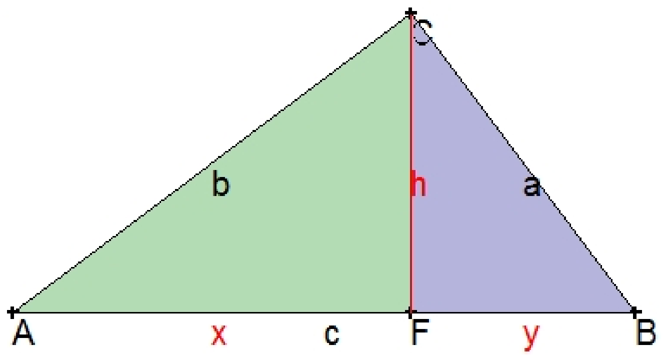
Das rechtwinkelige Dreieck ABC wird durch die Höhe h in zwei Teildreiecke ACF und CBF zerlegt. Die zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, weil die entsprechenden Winkel gleich groß sind.
Der Seite c im großen Dreieck ABC entspricht die Seite b im kleinen Dreieck ACF, bzw. der Seite a im anderen kleinen Dreieck CBF.

Die Beweise der zwei Lehrsätze

Der Kathetensatz

$a^2 = c * y$

$b^2 = c * x$

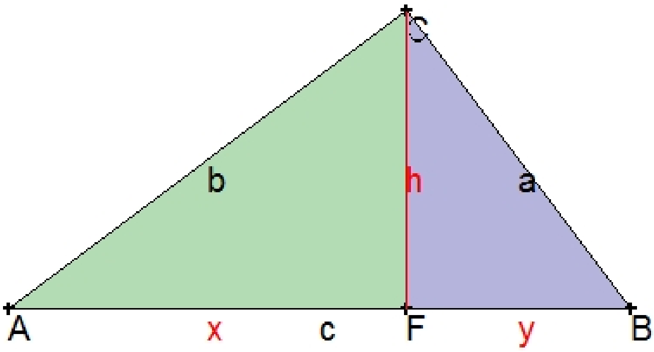


Weil das Dreieck ABC ähnlich zum Dreieck CBF ist, müssen in beiden Dreiecken die entsprechenden Seitenverhältnisse gleich groß sein, d.h. AB : BC = BC : FB, also $c : a = a : y$. Durch eine einfache Umformung erhält man: $a^2 = c * y$ (Erster Kathetensatz).

Führt man den selben Beweis mit den Dreiecken ABC und ACF durch, erhält man die Formel $b^2 = c * x$ (Zweiter Kathetensatz).

Der Höhensatz

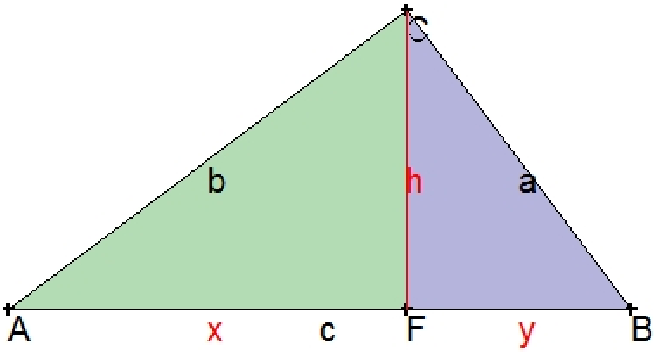
$h^2 = x * y$



Wenn man die beiden Teildreiecke ACF und CBF genauer betrachtet, wird man erkennen, dass auch diese Dreiecke ähnlich sind, weil die entsprechenden Winkel gleich groß sind. Also müssen auch die entsprechenden Seitenverhältnisse in beiden Dreiecken gleich groß sein: FC : AF = BF : FC oder h : x = y : h. Durch einfache Umformung erhält man daraus

die Formel $h^2 = x * y$ (Höhensatz).

Die drei Lehrsätze des Pythagoras
(Zusammenfassung)



Der Hauptsatz

Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten: $c^2 = a^2 + b^2$

Der Kathetensatz

Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkt aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt: $a^2 = c * y$ und $b^2 = c * x$

Der Höhensatz

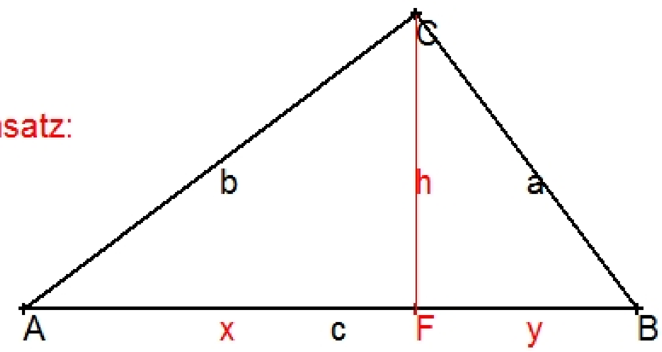
Das Quadrat der Höhe ist gleich dem Produkt aus den beiden Hypotenusenabschnitten: $h^2 = x * y$, mit $c = x + y$.

Das rechtwinkelige Dreieck

Haupsatz von Pythagoras:
$c^2 = a^2 + b^2$

Die Kathetensätze:
$a^2 = c * y$
$b^2 = c * x$

Der Höhensatz:
$h^2 = x * y$



Von einem rechtwinkeligen Dreieck kennt man die Katheten $a = 6$ cm und $b = 8$ cm.

Berechne:

(1) die Hypotenuse c
(2) die zwei Abschnitte x und y
(3) die Höhe h

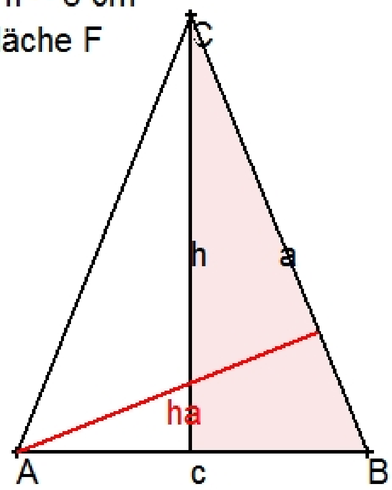
<u>Lösung:</u>

Seite c = 10 cm
Abschnitt x = 6.4 cm
Abschnitt y = 3.6 cm
Höhe h = 4.8 cm

Das gleichschenkelige Dreieck

Das gleichschenkelige Dreieck

Gegeben: c = 4 cm, hc = h = 5 cm
Gesucht : Höhe ha = x, Fläche F



(1) Aus dem gefärbten rechtwinkeligen Dreieck a ausrechnen
(2) Die Fläche ausrechnen: F = c * h / 2
(3) Zuletzt aus der Fläche F die Höhe ha = x ausrechnen

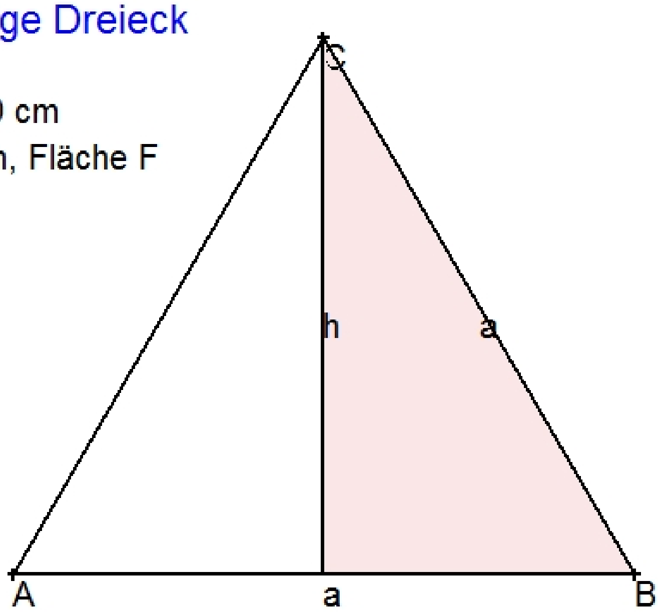
<u>Lösung:</u>

Seite a = 5.39 cm
Fläche F = 10 cm²
Höhe ha = 3.71 cm

Das gleichseitige Dreieck

Das gleichseitige Dreieck

Gegeben: a = 10 cm
Gesucht : Höhe h, Fläche F



Zuerst die Höhe h und dann die Fläche F ausrechnen.
Dabei gilt: h = a/2*sqrt(3) und F = a²/4*sqrt(3).

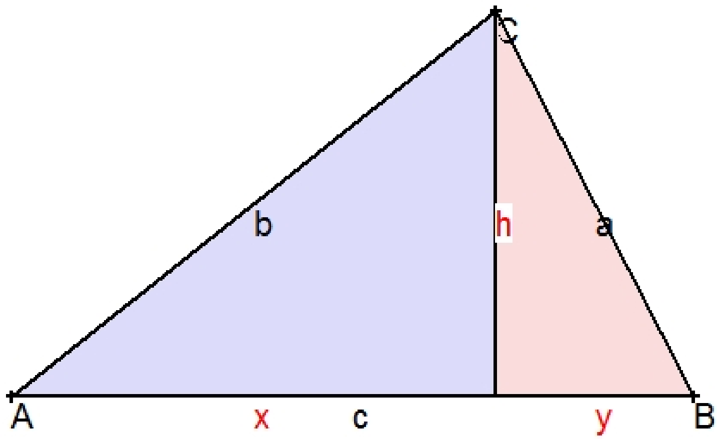
<u>Lösung:</u>

Höhe h = 8.66 cm
Fläche F = 43.30 cm²

Das ungleichseitige Dreieck

Das ungleichseitige Dreieck

Gegeben: $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 11$ cm
Gesucht : Höhe h und Fläche F



Seite c wird in die Teile x und y zerlegt und mithilfe der Gleichungen (1),(2),(3) die Höhe h schrittweise berechnet.

(1): $h^2 = b^2 - x^2$
(2): $h^2 = a^2 - y^2$
(3): $x + y = c$

Daraus folgt: $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$

Daraus folgt nach Umformung:

$x = (c^2 + b^2 - a^2) / (2*c)$

Damit kann aus (1) die Höhe h berechnet werden.

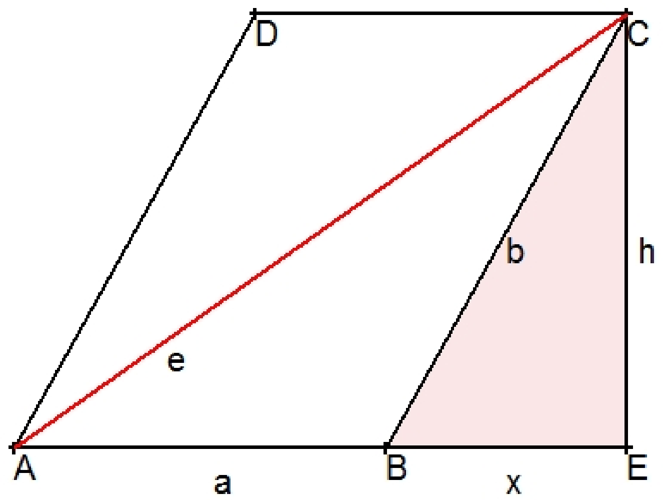
$h = \text{sqrt}(b^2 - x^2)$ und $F = c*h/2$.

<u>Lösung:</u>

Strecke $x = 7.82$ cm
Höhe $h = 6.24$ cm
Fläche $F = 34.29$ cm²

Das Parallelogramm

Parallelogramme



Gegeben: a = 6 cm, b = 8 cm, h = 7 cm
Gesucht : Diagonale e und Fläche F

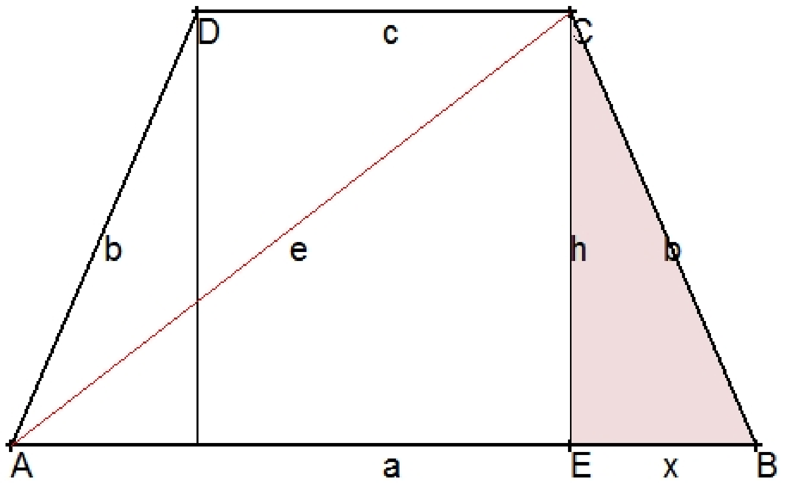
(1) Strecke x ausrechnen
(2) Aus Dreieck AEC die Diagonale e ausrechnen
(3) Die Fläche F = a * h ausrechnen

<u>Lösung:</u>

Strecke x = 3.87 cm
Diagonale e = 12.10 cm
Fläche F = 42.00 cm²

Das gleichschenkelige Trapez

Das gleichschenkelige Trapez



Gegeben: a = 12 cm, c = 6 cm, h = 7 cm
Gesucht : Seite b, Diagonale e, Fläche F

(1) Strecke x ausrechnen
(2) Aus Dreieck EBC die Seite b ausrechnen
(3) Aus Dreieck AEC die Diagonale e ausrechnen
(4) Die Fläche F = h * (a + c)/2 ausrechnen

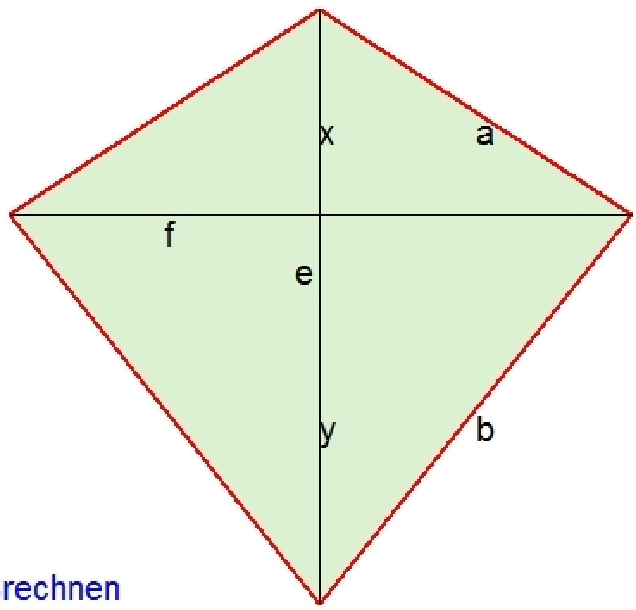
<u>Lösung:</u>

Strecke x = 3.00 cm
Seite b = 7.62 cm
Diagonale e = 11.40 cm
Fläche F = 63.00 cm²

Das Deltoid

Drachenvierecke

Gegeben: Seiten a = 6 cm, b = 8 cm
und Diagonale f = 10 cm
Gesucht : Diagonale e und Fläche F

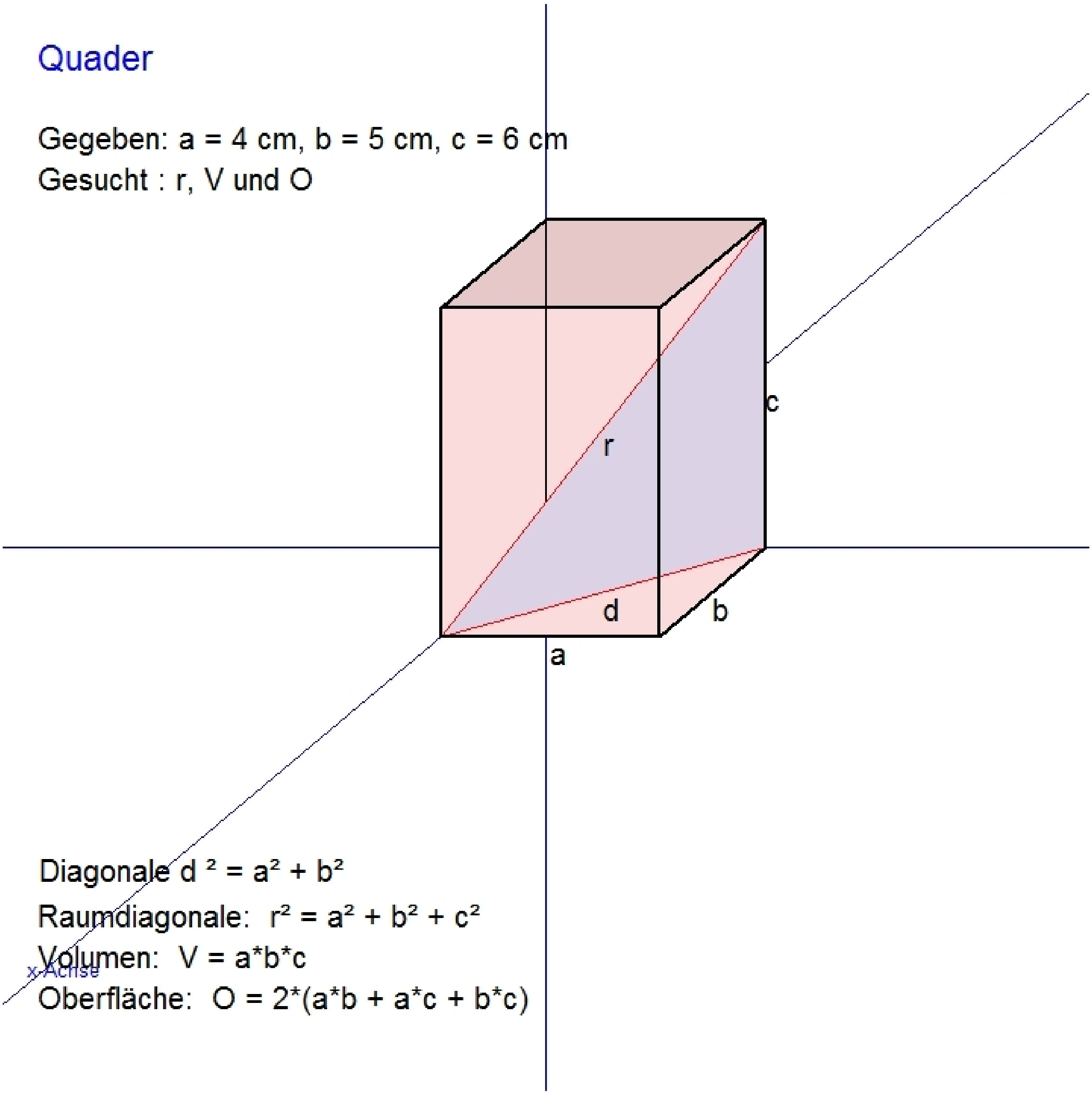


(1) Strecke x ausrechnen
(2) Strecke y ausrechnen
(3) Diagonale e ausrechnen
(4) Fläche F ausrechnen

<u>Lösung:</u>

Diagonale e = 9.56 cm
Fläche F = 47.81 cm²

Der Quader



<u>Lösung:</u>

Volumen V = 120.00 cm^3
Oberfläche O = 148.00 cm^2
Raumdiagonale r = 8.77 cm

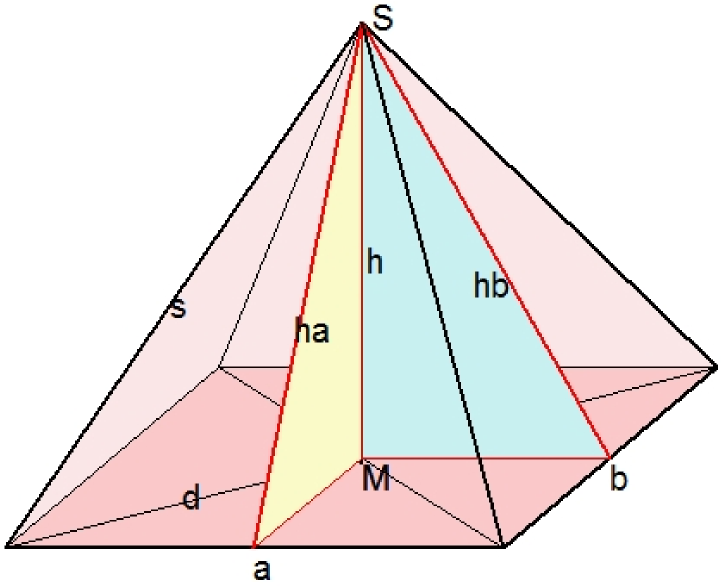
Die Pyramide

Rechteckige Pyramide

Gegeben: $a = 8$ cm, $b = 9$ cm, $h = 7$ cm

$d^2 = a^2 + b^2$
$s^2 = (d/2)^2 + h^2$
$ha^2 = x^2 = (b/2)^2 + h^2$
$hb^2 = y^2 = (a/2)^2 + h^2$

$G = a*b$
$V = G*h/3$
$O = G + a*ha + b*hb$



Gesucht: V, O und s.

<u>Lösung:</u>

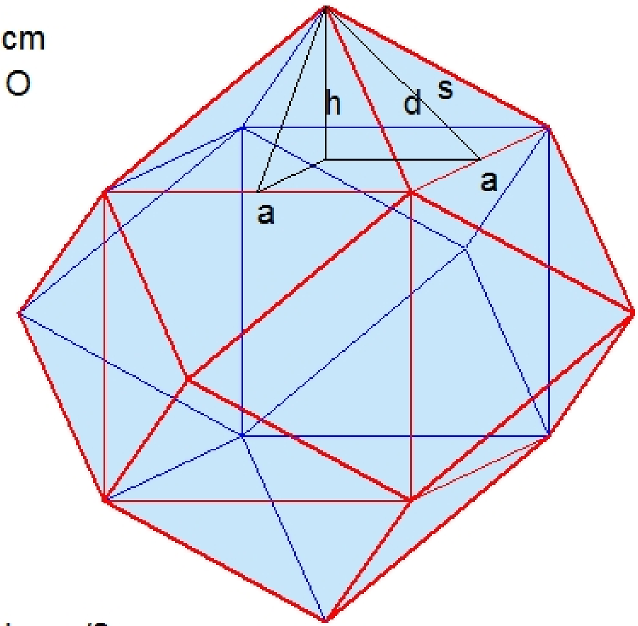
Volumen V = 168.00 cm³
Oberfläche O = 211.13 cm²
Seitenkante s = 9.23 cm

Der Rhombendodekaeder

Rhomben-Dodekaeder

Ein Würfel mit sechs aufgesetzten quadratischen Pyramiden,
deren Höhen h gleichlang wie die halbe Würfelkante a sind.
Der Körper wird dadurch von zwölf Rhombenflächen begrenzt.

Gegeben: $a = 6$ cm
Gesucht : V und O



Pyramidenhöhe $h = a/2$
Seitenkante $s = a*sqrt(3)/2$
Seitenhöhe $d = a*sqrt(2)/2$
Volumen $V = 2*a^3$
Oberfläche $O = 6*a^2*sqrt(2)$

<u>Lösung:</u>

Volumen V = 432 cm^3
Oberfläche O = 305.47 cm^2

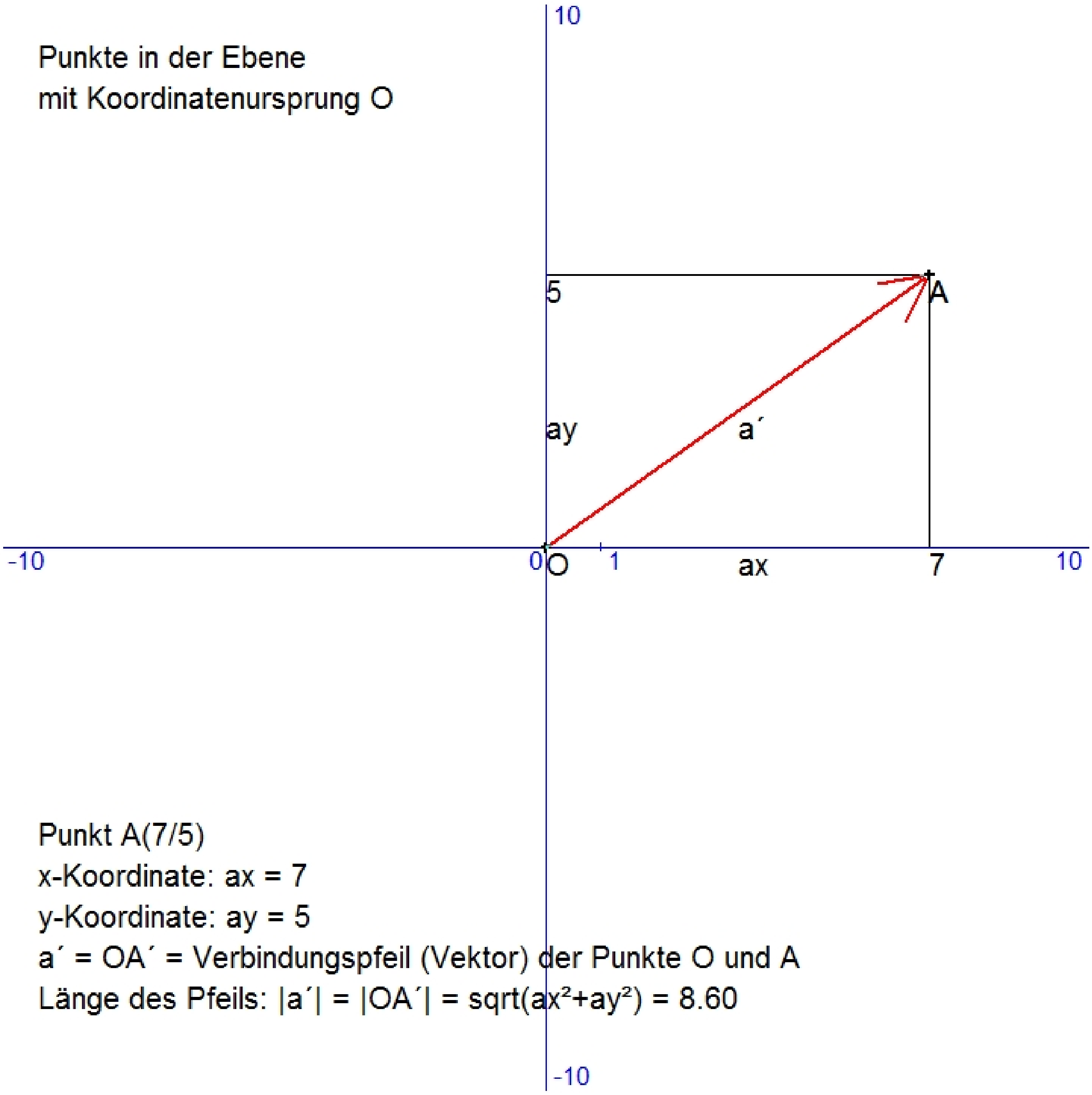
GEOMETRISCHE KÖRPER

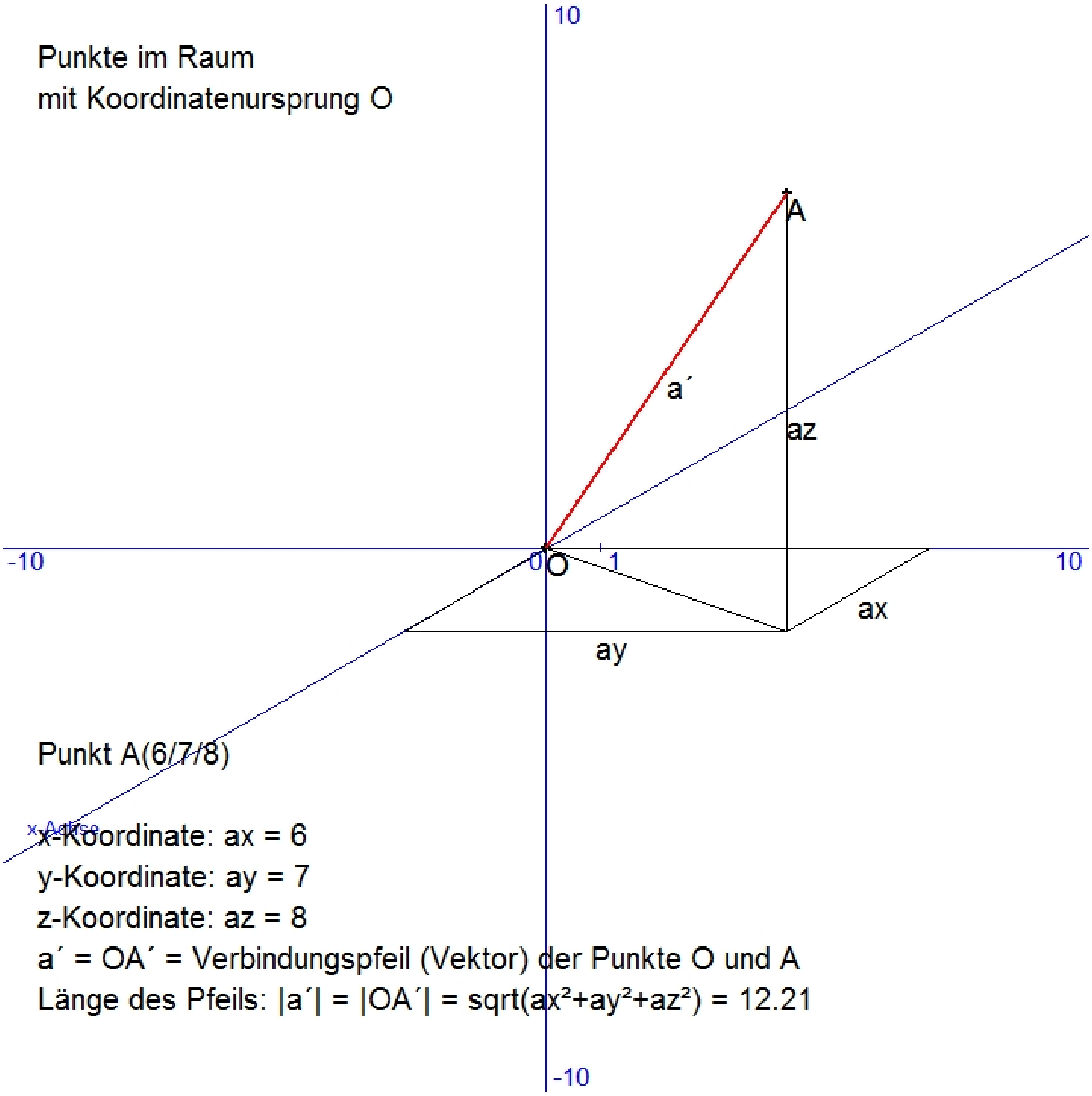
Teil 1, Volumen und Oberfläche (Theorie)

Teil 2, Volumen und Oberfläche (Praxis)

Teil 1, Volumen und Oberfläche (Theorie)

Koordinatensysteme in Ebene und Raum



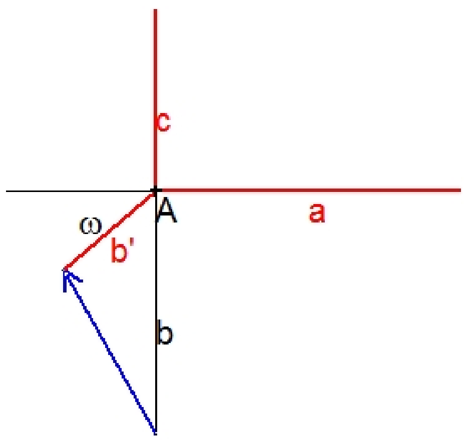

10
Punkte im Raum
mit Koordinatenursprung O
A
a´
az
-10
0
O
1
10
ax
ay
Punkt A(6/7/8)
x-Achse
x-Koordinate: ax = 6
y-Koordinate: ay = 7
z-Koordinate: az = 8
a´ = OA´ = Verbindungspfeil (Vektor) der Punkte O und A
Länge des Pfeils: |a´| = |OA´| = sqrt(ax²+ay²+az²) = 12.21
-10

Der Schrägriss

Der Schrägriss

Der Schrägriss ist ein Verfahren mit dem räumliche Körper in der Zeichenebene abgebildet werden.

Betrachten wir die linke untere Ecke eines Quaders, dann stehen die drei Kanten a, b, c aufeinander paarweise senkrecht. Es sind beispielsweise a = 5 cm, b = 4 cm und c = 3 cm.



Schrägriss-Konstruktion:

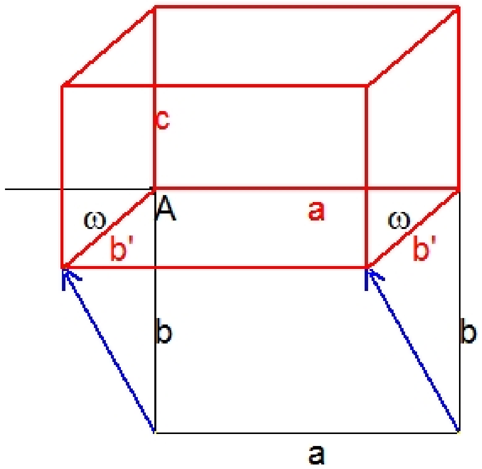
[1] Kanten parallel zu a oder c werden in wahrer Größe abgebildet.
[2] Kanten parallel zu b sind verkürzt und um einen Winkel geneigt.
Ihre Bildstrecken b' in der Zeichenebene schließen mit der Kante a den Winkel w ein und werden mit einem Faktor v (v < 1) multipliziert.
Der Pfeil symbolisiert, wie die wahre Kante b auf die verkürzte und geneigte Kante b' in der Zeichnung abgebildet wird.

Wir wollen nun den Quader mit Kanten a = 5 cm, b = 4 cm, c = 3 cm schrittweise im Schrägriss zeichnen:

(1) Das Basisrechteck mit a und b wird in wahrer Größe gezeichnet.

(2) Die Bildkanten b' der Kanten b schließen mit Kante a einen Verzerrungswinkel w = 45° ein und werden halbiert. Verkürzungsfaktor ist somit v = 1 / 2 und es gilt daher b' = b / 2.

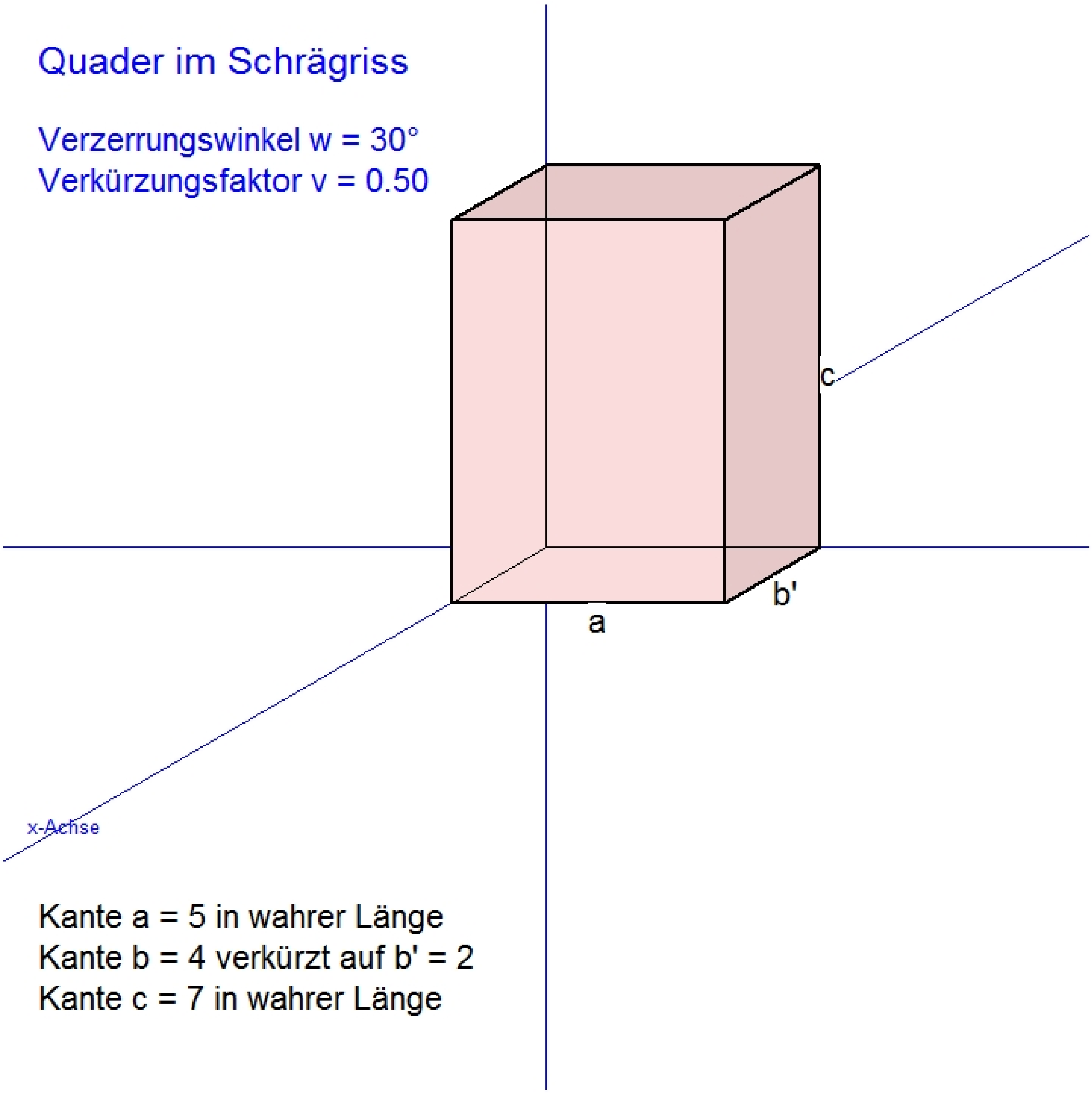
(3) Das Basisrechteck wird im Schrägriss fertig gezeichnet. Dabei entsteht ein Parallelogramm.



(4) Nun werden die vier Höhenkanten c in wahrer Länge gezeichnet.

(5) Zuletzt wird die Deckfläche gezeichnet und der Quader ist fertig.

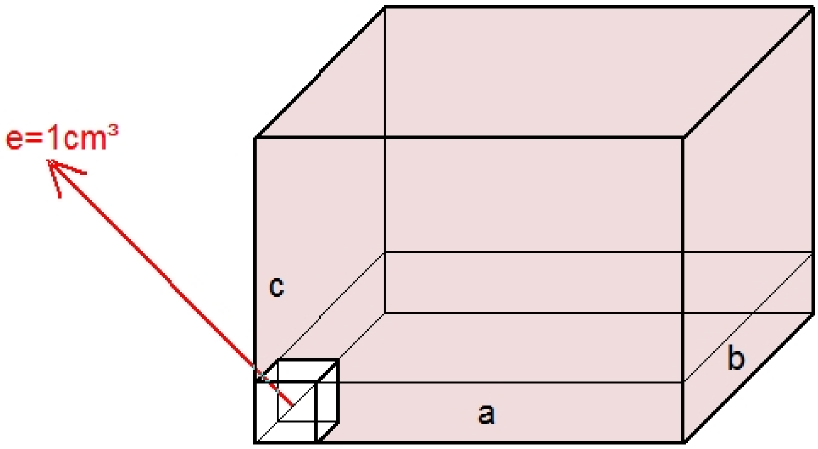
Auf der nächsten Seite können beliebige Quader im Schrägriss dargestellt werden.


Quader im Schrägriss
Verzerrungswinkel w = 30°
Verkürzungsfaktor v = 0.50
c
b'
a
x-Achse
Kante a = 5 in wahrer Länge
Kante b = 4 verkürzt auf b' = 2
Kante c = 7 in wahrer Länge

Der Quader

Volumen des Quaders

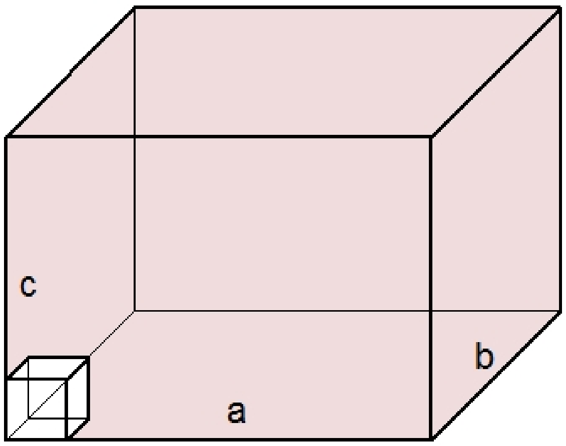
Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c. Um sein Volumen (d.h. den Inhalt des eingeschlossenen Raumes) zu messen, wird ein Einheitswürfel mit der Kantenlänge 1 cm und dem Volumen e = 1 cm³ (Kubikzentimeter) bei der linken unteren Ecke festgelegt.



Ist der Einheitswürfel nicht ohne Restraum im Quader enthalten, wird er in 1000 kleinere Einheitswürfel mit Kantenlänge 1 mm und dem Volumen 1 mm³ zerlegt. Diese Verfeinerung wird bis zu einer vorbestimmten Genauigkeit fortgesetzt. Dann kann das Volumen berechnet werden: In die untere vordere Reihe passen a Einheitswürfel. Der Boden des Quaders ist eine Schicht aus b Reihen. Also wird der Boden von a * b Einheitswürfeln bedeckt. Der ganze Quader enthält c Schichten und somit a * b * c Einheitswürfel.

Für das Volumen V des Quaders gilt die Formel V = a*b*c.

Oberfläche des Quaders

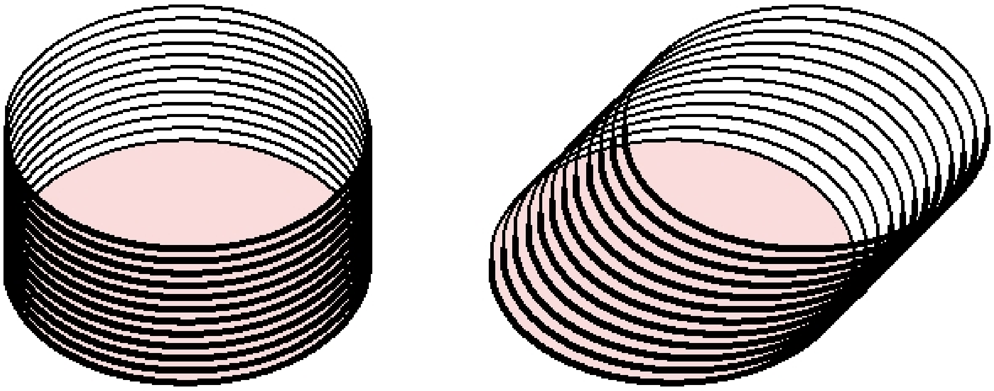


Die Oberfläche des Quaders besteht aus sechs Rechtecken, wobei einander gegenüberliegende Rechtecke kongruent sind.
Daher gilt die Formel O = 2*a*b + 2*a*c + 2*b*c.

Das Prinzip von Cavalieri

Stehen zwei Körper auf der gleichen Grundebene und werden sie von jeder zur Grundebene parallelen Ebene so geschnitten, dass flächengleiche Schnittfiguren entstehen, dann haben die beiden Körper gleiche Volumina.

Beweis:



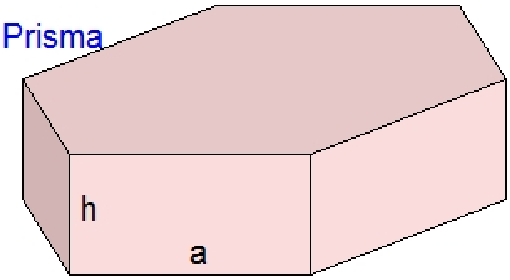
In einem Körper wird über jeder Schnittfläche eine Scheibe mit der Dicke d errichtet. Auf diese Art entsteht ein stufenförmiger Körper. Das Volumen von diesem Stufenkörper ist gleich der Summe der Scheiben-Volumina. Wird die Dicke der Scheiben unendlich klein, dann wird der Stufenkörpers zum ursprünglichen Körper. Das Volumen wird zur Summe der unendlich dünnen Scheibenflächen. Sind diese Scheibenflächen bei zwei Körpern in jeder Höhe gleich groß, dann müssen die Körper somit auch gleiche Volumina haben.

Das Prisma

Volumen und Oberfläche des Prismas

Ein Prisma besteht aus einem Vieleck als Grundfläche G und einer dazu parallelen und kongruenten Deckfläche. Deren Abstand ist die Körperhöhe h. Die Schnitte eines Prismas mit Ebenen parallel zur Grundfläche sind alle kongruent zur Grundfläche. Nach dem Prinzip von Cavalieri ist das Volumen des Prismas gleich dem eines Quaders mit der selben Höhe h und einem Basisrechteck, welches denselben Flächeninhalt wie die Grundfläche des Prismas hat.

Beispiel: Sechseckiges Prisma



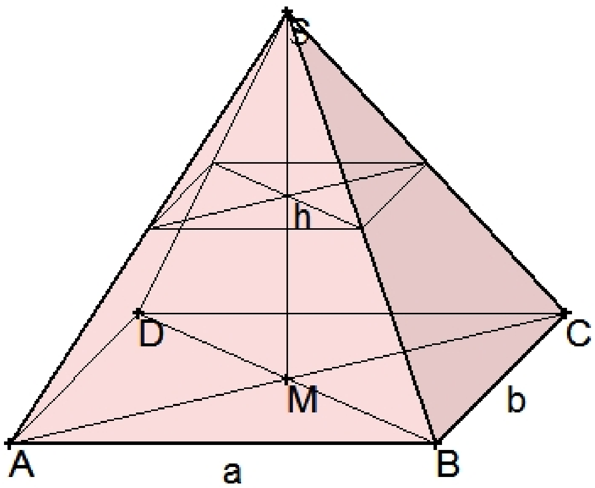
Auf Grund dieser Überlegungen gilt für das Volumen V des Prismas die gleiche Berechnungsformel wie für den Quader: $V = G * h$.

Die Oberfläche des Prismas besteht aus zweimal der Grundfläche und Mantel: $O = 2*G + M$. Der ausgebreitete Mantel des Prismas ist ein Rechteck mit dem Basisumfang U als einer Seite und der Höhe h als anderer Seite. Also gilt $M = U*h$ und $O = 2*G + U*h$.

Die Pyramide

Das Volumen der Pyramide

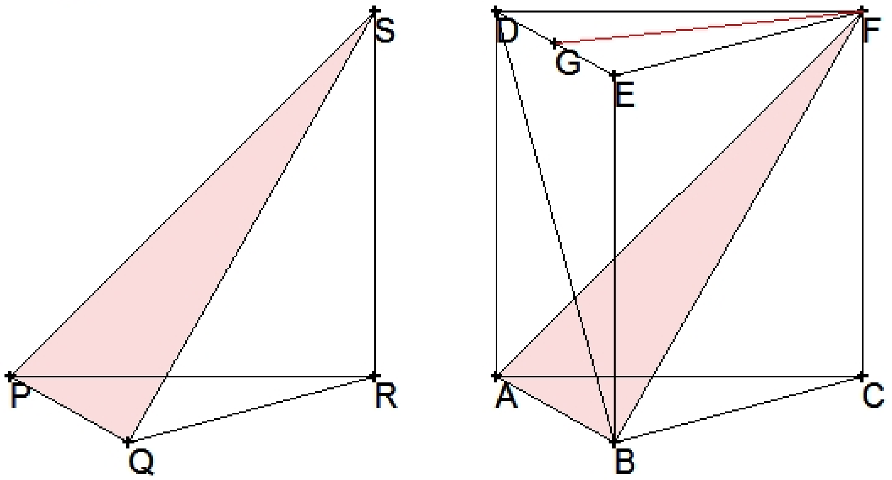
[1] Jede Pyramide kann vollständig in Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen zerlegt werden. Dazu muss nur die Grundfläche durch Diagonalen von einem Eckpunkt aus in Dreiecke zerlegt werden.
z.B.: Pyramide(ABCDS) = Pyramide(ABDS) + Pyramide(BCDS).



[2] Zwei Pyramiden mit kongruenten Grundflächen und gleich langen Höhen haben gleiche Volumina.
Dieser Lehrsatz wird mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri bewiesen:
Zur Grundfläche G parallele Schnittfiguren sind zu G ähnlich, weil sie durch zentrische Streckungen mit der Pyramidenspitze als Zentrum auf G abgebildet werden können. In den gleichen Höhen sind daher die Schnittfiguren in den beiden Pyramiden kongruent. Damit ist das Prinzip von Cavalieri erfüllt und alles bewiesen.

Das Volumen der Pyramide

Gegeben ist die Pyramide PQRS mit einer dreieckigen Grundfläche. Dieser Pyramide wird ein Prisma mit kongruenter Grundfläche und gleich langer Höhe umschrieben.



Das Prisma wird in drei volumsgleiche Pyramiden zerlegt:

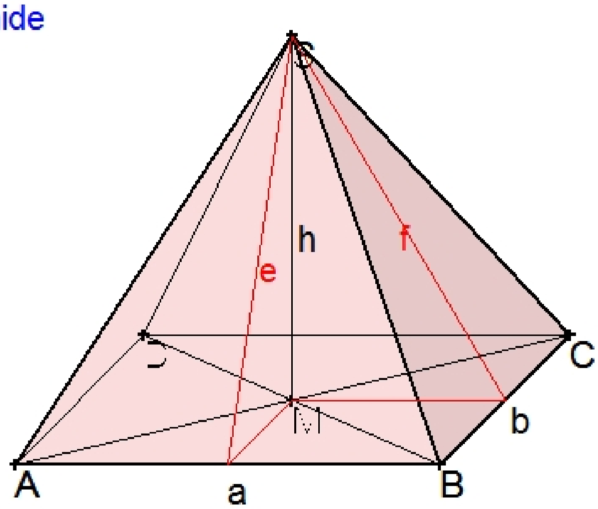
1. Pyramide ABCF mit der Grundfläche ABC und der Höhe CF.
   (die Pyramide entspricht der gegebenen Pyramide PQRS).
2. Pyramide DEFB mit der Grundfläche DEF und der Höhe EB.
   DEF kongruent ABC und EB = CF, d.h. V(DEFB) = V(ABCF).
   Andere Ansicht mit Grundfläche DEB und mit Höhe GF !
3. Pyramide ABDF mit der Grundfläche ABD und der Höhe GF.
   ABD kongruent DEB und GF = GF, d.h. V(ABDF) = V(DEFB).

Die drei Pyramiden haben somit gleiche Volumina V und daher gilt
die wichtige Formel: V(Prisma) = 3 * V(Pyramide).

Die Oberfläche der Pyramide

Die Oberfläche O einer Pyramide besteht aus ihrer Grundfläche G und ihrem Mantel M. Es gilt daher: O = G + M.

Beispiel: Rechteckige Pyramide

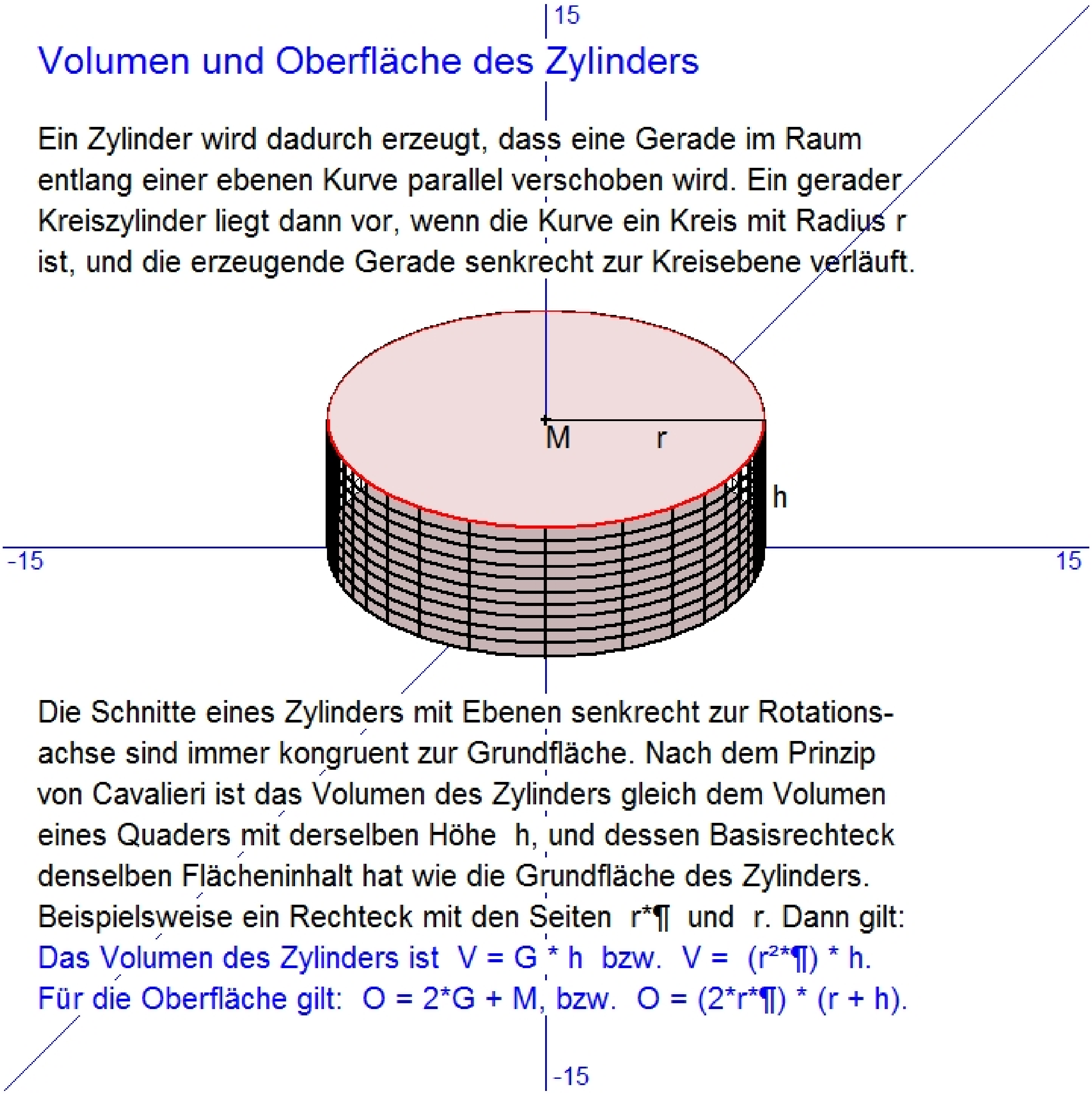


Im vorliegenden Fall ist die Grundfläche ein Rechteck und G = a*b.
Der Mantel besteht hier aus vier gleichschenkeligen Dreiecken.
Um diese zu berechnen, müssen zuerst die Seitenhöhen e und f ermittelt werden: $e^2 = (b/2)^2 + h^2$ und $f^2 = (a/2)^2 + h^2$. Damit gilt dann
M = 2*(a*e)/2 + 2*(b*f)/2 = a*e + b*f und O = a*b + a*e + b*f.

Der Zylinder

Volumen und Oberfläche des Zylinders

Ein Zylinder wird dadurch erzeugt, dass eine Gerade im Raum entlang einer ebenen Kurve parallel verschoben wird. Ein gerader Kreiszylinder liegt dann vor, wenn die Kurve ein Kreis mit Radius r ist, und die erzeugende Gerade senkrecht zur Kreisebene verläuft.



Die Schnitte eines Zylinders mit Ebenen senkrecht zur Rotationsachse sind immer kongruent zur Grundfläche. Nach dem Prinzip von Cavalieri ist das Volumen des Zylinders gleich dem Volumen eines Quaders mit derselben Höhe h, und dessen Basisrechteck denselben Flächeninhalt hat wie die Grundfläche des Zylinders. Beispielsweise ein Rechteck mit den Seiten r*¶ und r. Dann gilt:

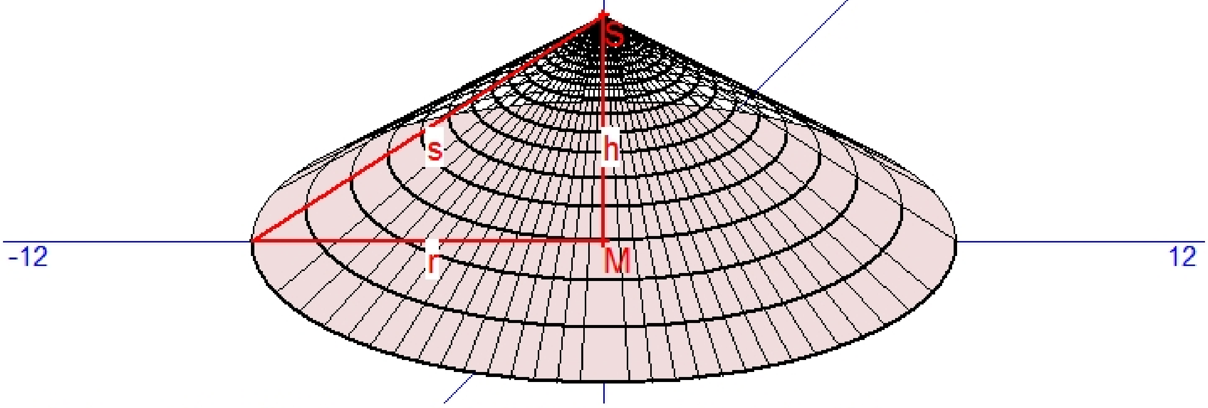
Das Volumen des Zylinders ist V = G * h bzw. V = (r^2*¶) * h.

Für die Oberfläche gilt: O = 2*G + M, bzw. O = (2*r*¶) * (r + h).

Der Kegel

Volumen und Oberfläche des Kegels

Ein Kegel wird dadurch erzeugt, dass eine Gerade im Raum durch einen festen Punkt S geht und entlang einer ebenen Kurve gleitet. Ein gerader Kreiskegel liegt dann vor, wenn die Kurve ein Kreis mit dem Radius r ist und der Punkt S senkrecht über dem Kreismittelpunkt M liegt (Höhe MS = h).

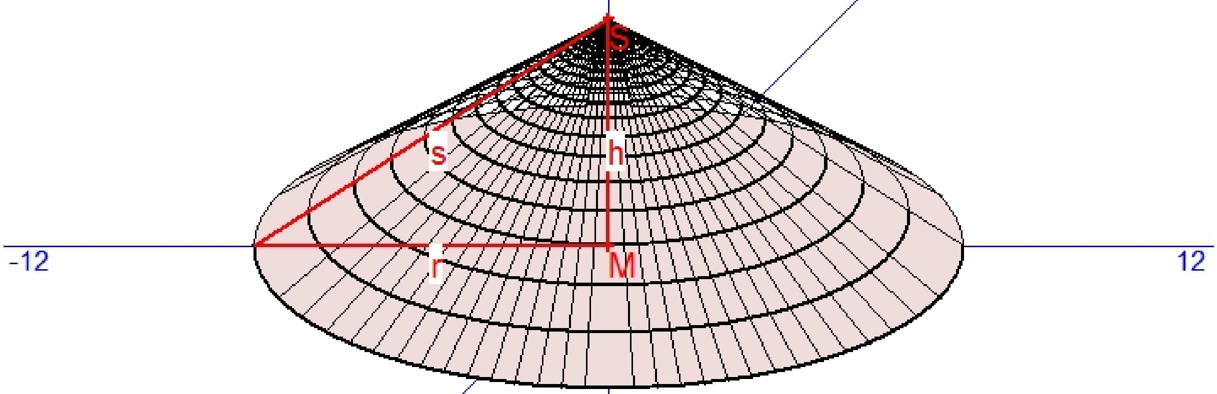


Jede zur Grundfläche parallele Schnittfigur ist in jeder Höhe zur Grundfläche ähnlich, weil sie durch eine zentrische Streckung mit der Kegelspitze als Zentrum auf die Grundfläche abgebildet wird. Derselbe Sachverhalt liegt auch bei Pyramiden vor. Vergleicht man den Kegel mit einer Pyramide, welche eine flächengleiche Grundfläche G und eine gleich lange Höhe h besitzt, dann haben nach dem Prinzip von Cavalieri der Kegel und die Pyramide das gleiche Volumen. Daher gilt auch für den Kegel folgende Formel:

Das Volumen eines Kegel ist $V = G * h / 3$, bzw. $V = (r^{2} * \P) * h / 3$.

Volumen und Oberfläche des Kegels

Schneidet man den Mantel des Kegels entlang der Mantellinie s auf und breitet ihn in der Ebene aus, dann entsteht ein Kreissektor mit dem Mittelpunkt S und der Mantellinie als Radius. Die Bogenlänge dieses Sektors ist gleich dem Umfang der Grundfläche des Kegels.



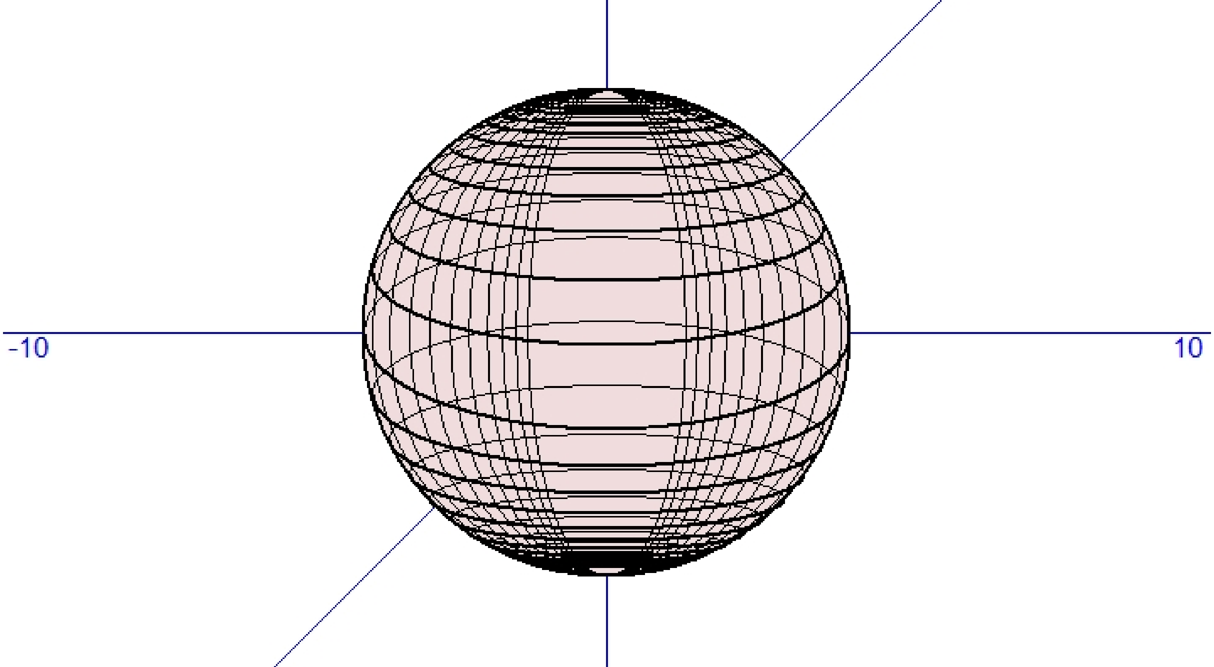
Für den Mantel (Sektorfläche) gilt daher: M = b * s / 2 = U * s / 2.
Die Oberfläche des Kegels ist O = G + M.

Bei geraden Kreiskegeln ist O = (r²*¶) + (2*r*¶)*s/2 = (r*¶) *(r + s).
Die Mantellinie s wird berechnet mit s² = r² + h².

Die Kugel

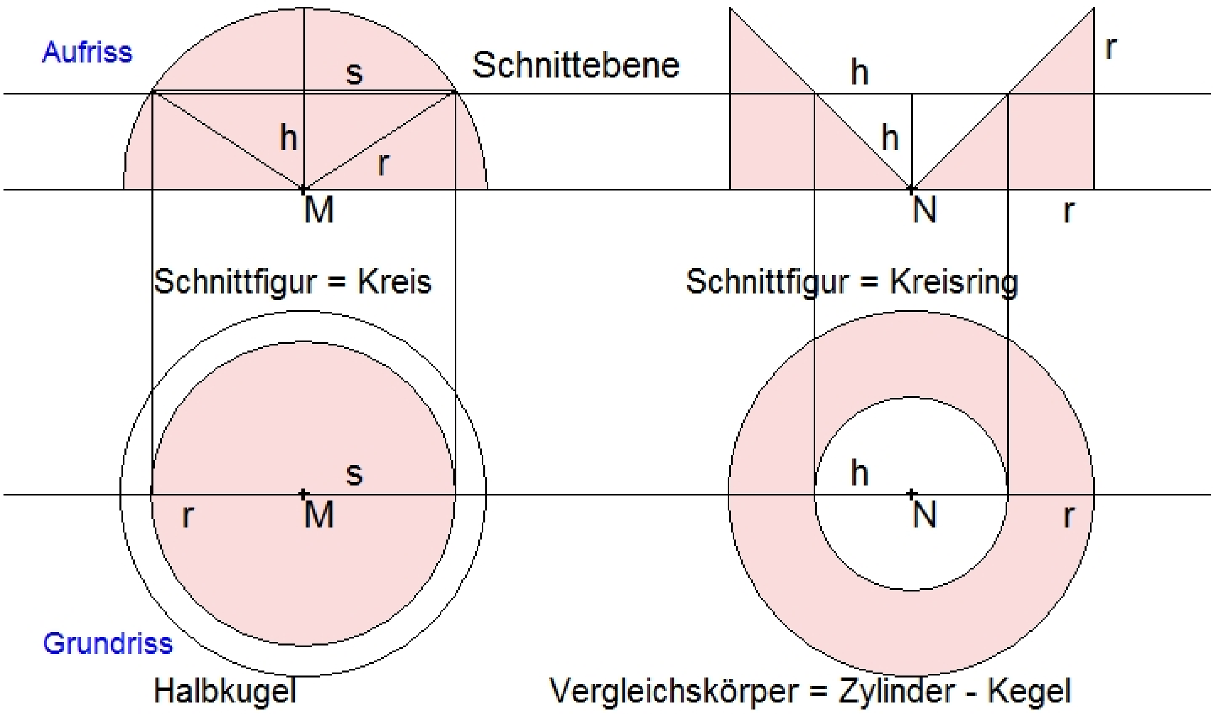
Volumen und Oberfläche der Kugel

Die Kugel ist ein räumlicher Körper, der bei Rotation eines Kreises um einen Kreisdurchmesser entsteht.

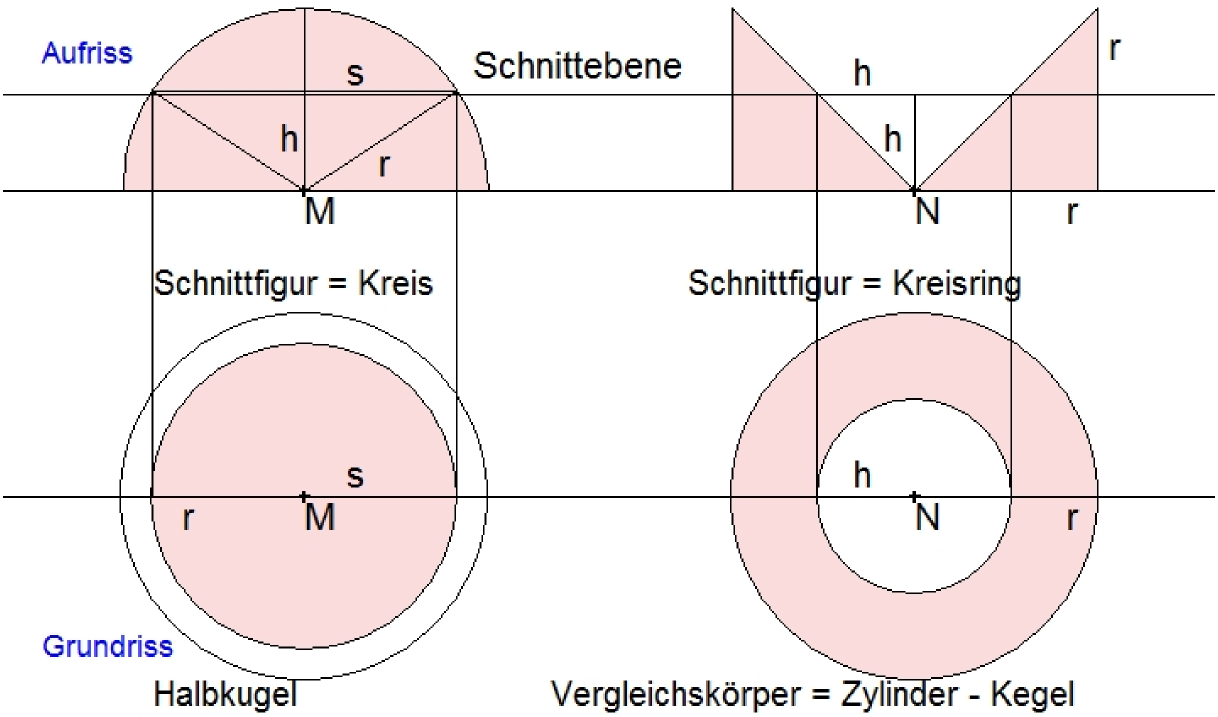


Es sollen Formeln für das Volumen V und für die Oberfläche O einer Kugel mit dem Radius r hergeleitet werden.

Eine Halbkugel wird mit einem Zylinder mit herausgebohrtem Kegel verglichen. Dabei haben Zylinder und Halbkugel kongruente Grundflächen (r^2 ¶) und die Zylinderhöhe ist gleich dem Kugelradius r . Die Körper sind von Ebenen parallel zur Grundfläche geschnitten. Wir wollen zuerst zeigen, dass in jeder Höhe (h) die Halbkugel und der Vergleichskörper jeweils ebene Schnittfiguren mit der gleichen Fläche aufweisen. Wenn das der Fall ist, dann gilt das Prinzip von Cavalieri, und die beiden Körper haben gleich große Volumina (V).

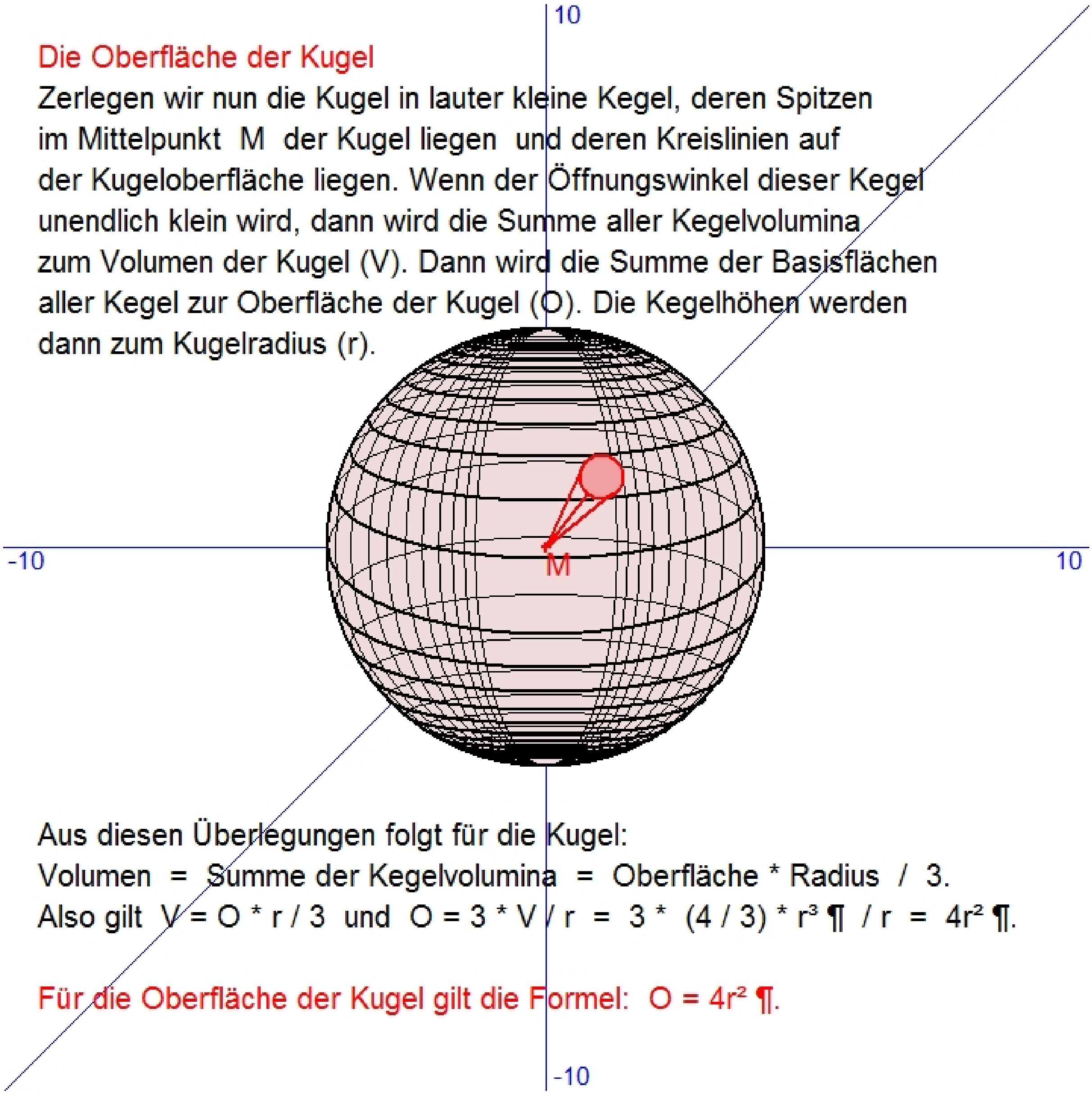


Der Schnitt der Ebene mit der Halbkugel ist ein Kreis mit Radius s.
Es gilt $s^2 = r^2 - h^2$ und die Schnittfläche ist $F1 = s^2 \P = (r^2 - h^2) \P$.
Der Schnitt mit dem Vergleichskörper ist ein Kreisring mit den zwei
Radien r und h. Die Schnittfläche ist $F2 = r^2 \P - h^2 \P = (r^2 - h^2) \P$.
Die beiden Schnittfiguren sind flächengleich und damit haben die
zwei Körper gleiches Volumen: V(Halbkugel) = V(Zylinder) - V(Kegel).
V(Halbkugel) = $r^2 \P * r - r^2 \P * r / 3 = (2 / 3) * r^3 \P$. Also folgt daraus:
Für das Volumen der Kugel gilt die Formel: $V = (4 / 3) * r^3 \P$.



Die Oberfläche der Kugel

Zerlegen wir nun die Kugel in lauter kleine Kegel, deren Spitzen im Mittelpunkt M der Kugel liegen und deren Kreislinien auf der Kugeloberfläche liegen. Wenn der Öffnungswinkel dieser Kegel unendlich klein wird, dann wird die Summe aller Kegelvolumina zum Volumen der Kugel (V). Dann wird die Summe der Basisflächen aller Kegel zur Oberfläche der Kugel (O). Die Kegelhöhen werden dann zum Kugelradius (r).

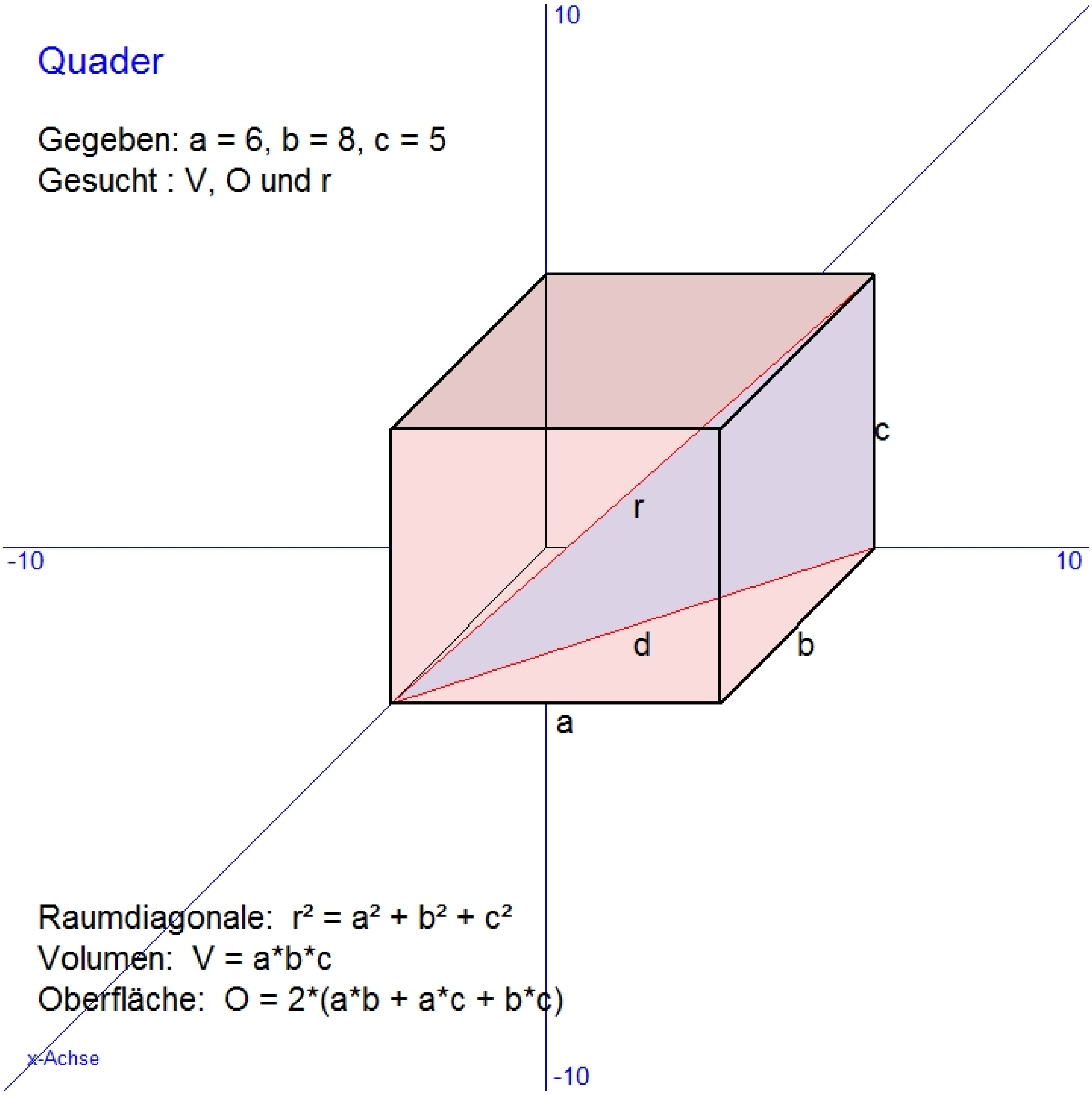


Aus diesen Überlegungen folgt für die Kugel:
Volumen = Summe der Kegelvolumina = Oberfläche * Radius / 3.
Also gilt V = O * r / 3 und O = 3 * V / r = 3 * (4 / 3) * r^3 ¶ / r = $4r^2$ ¶.

Für die Oberfläche der Kugel gilt die Formel: O = $4r^2$ ¶.

Teil 2, Volumen und Oberfläche (Praxis)

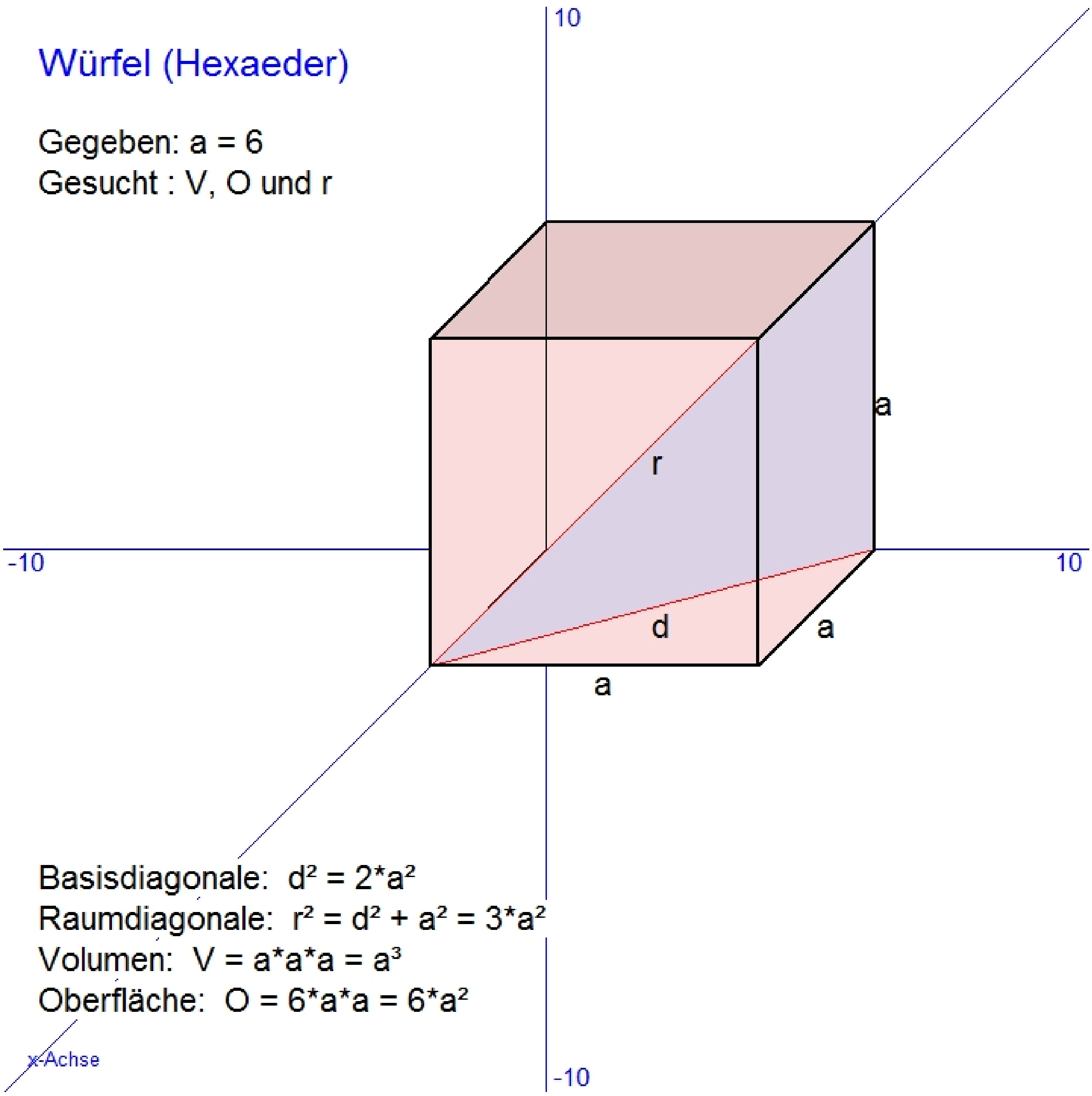
Der Quader



Lösung:

V = 240.00
O = 236.00
d = 10.00
r = 11.18

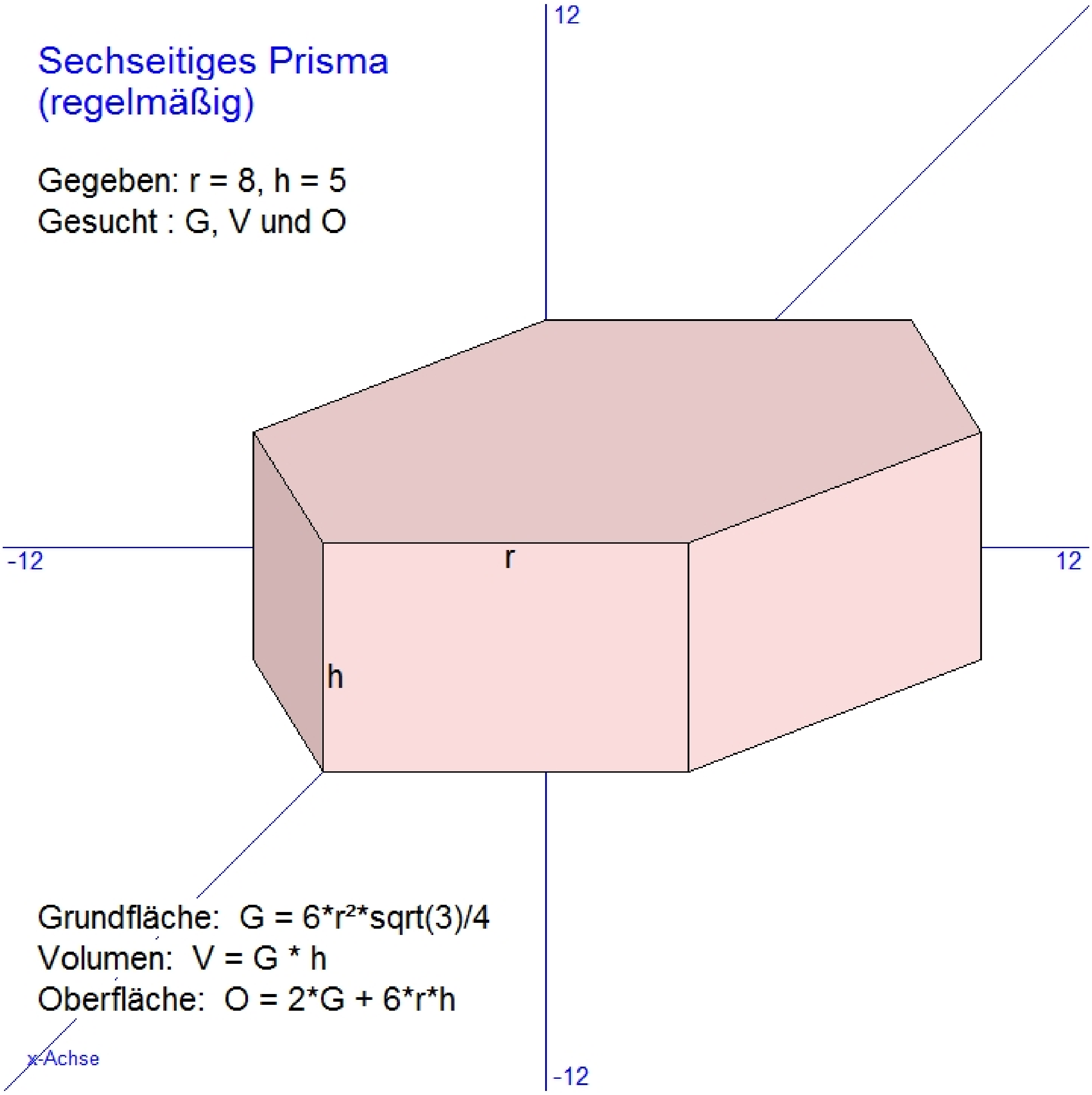
Der Würfel



<u>Lösung:</u>

V = 216.00
O = 216.00
d = 8.49
r = 10.39

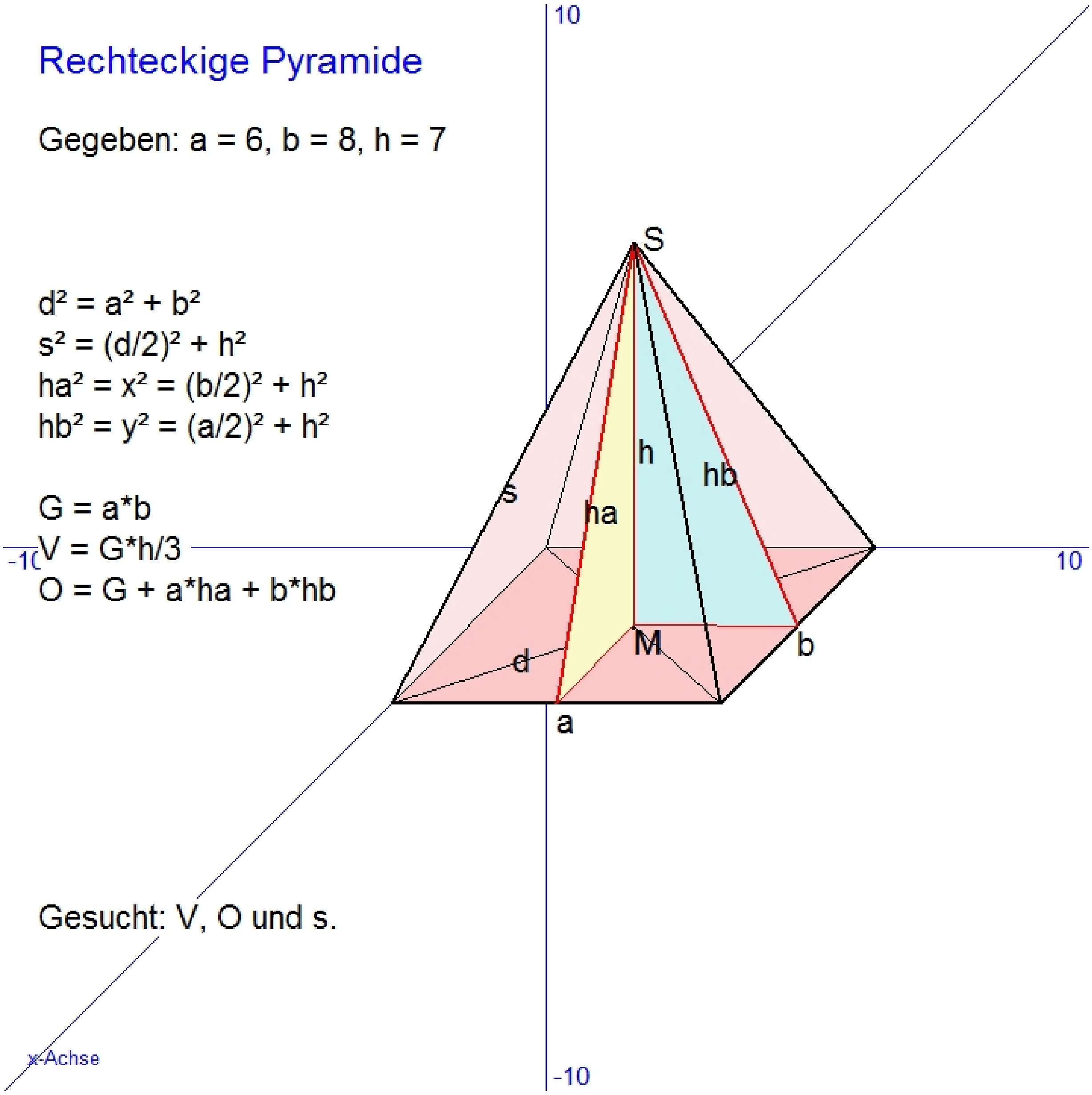
Das Prisma



Lösung:

G = 166.28
V = 831.38
O = 572.55

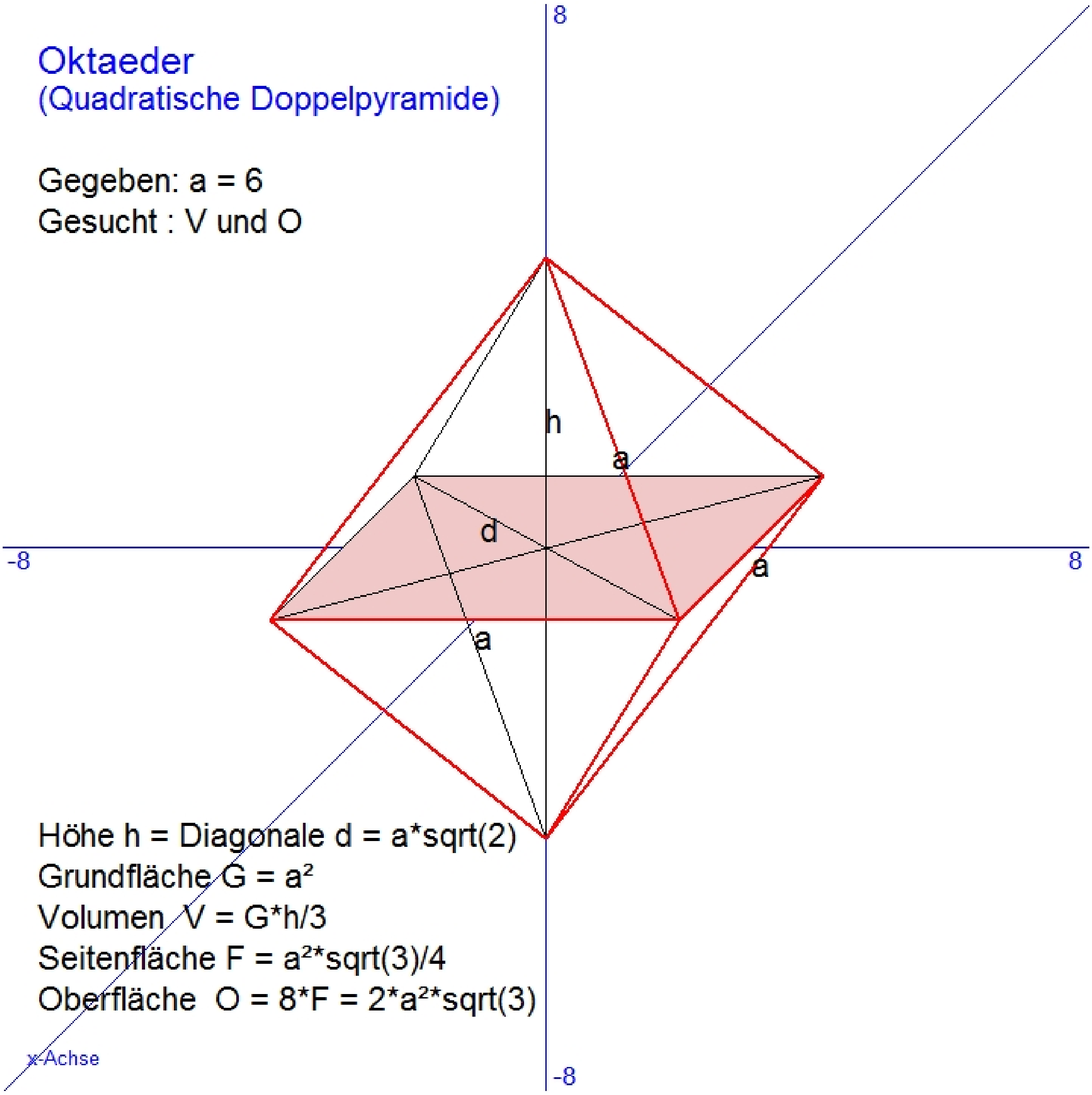
Die Pramide



Lösung:

ha = x = 8.06
hb = y = 7.62
s = 8.60
V = 112.00
O = 157.30

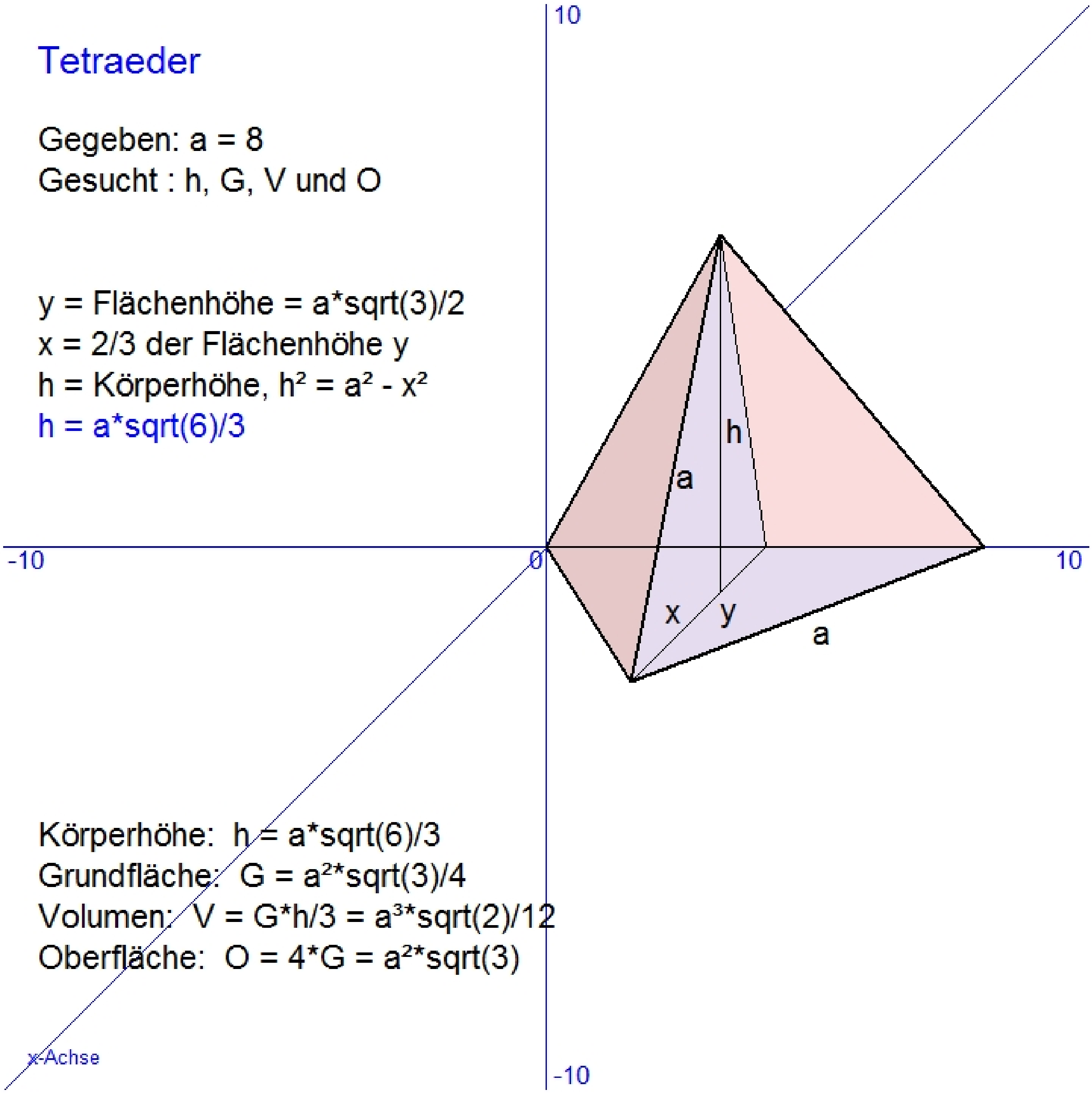
Der Oktaeder



Lösung:

h = d = 8.49
V = 101.82
O = 124.71

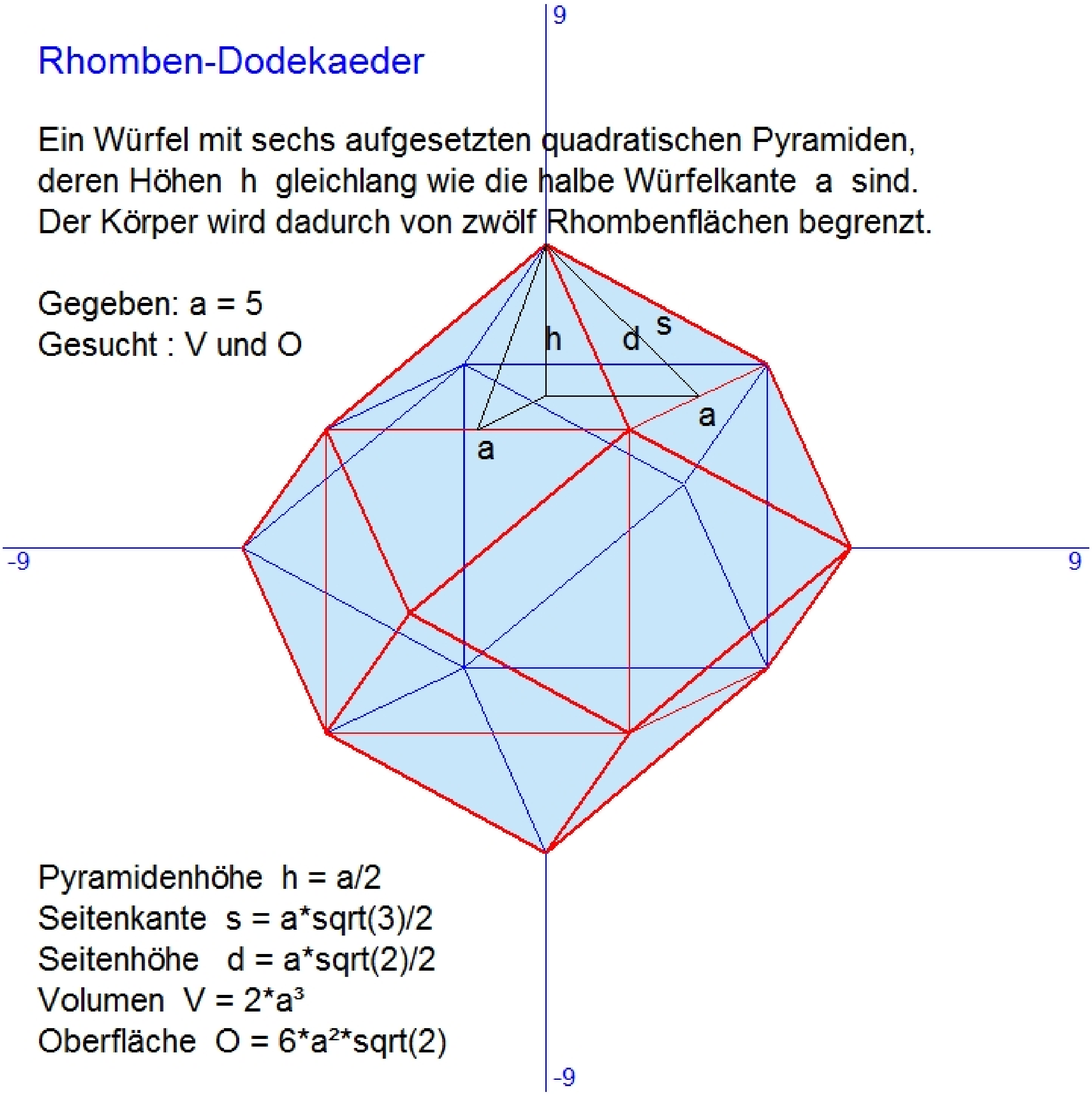
Der Tetraeder



Lösung:

h = 6.53
V = 60.34
O = 110.85

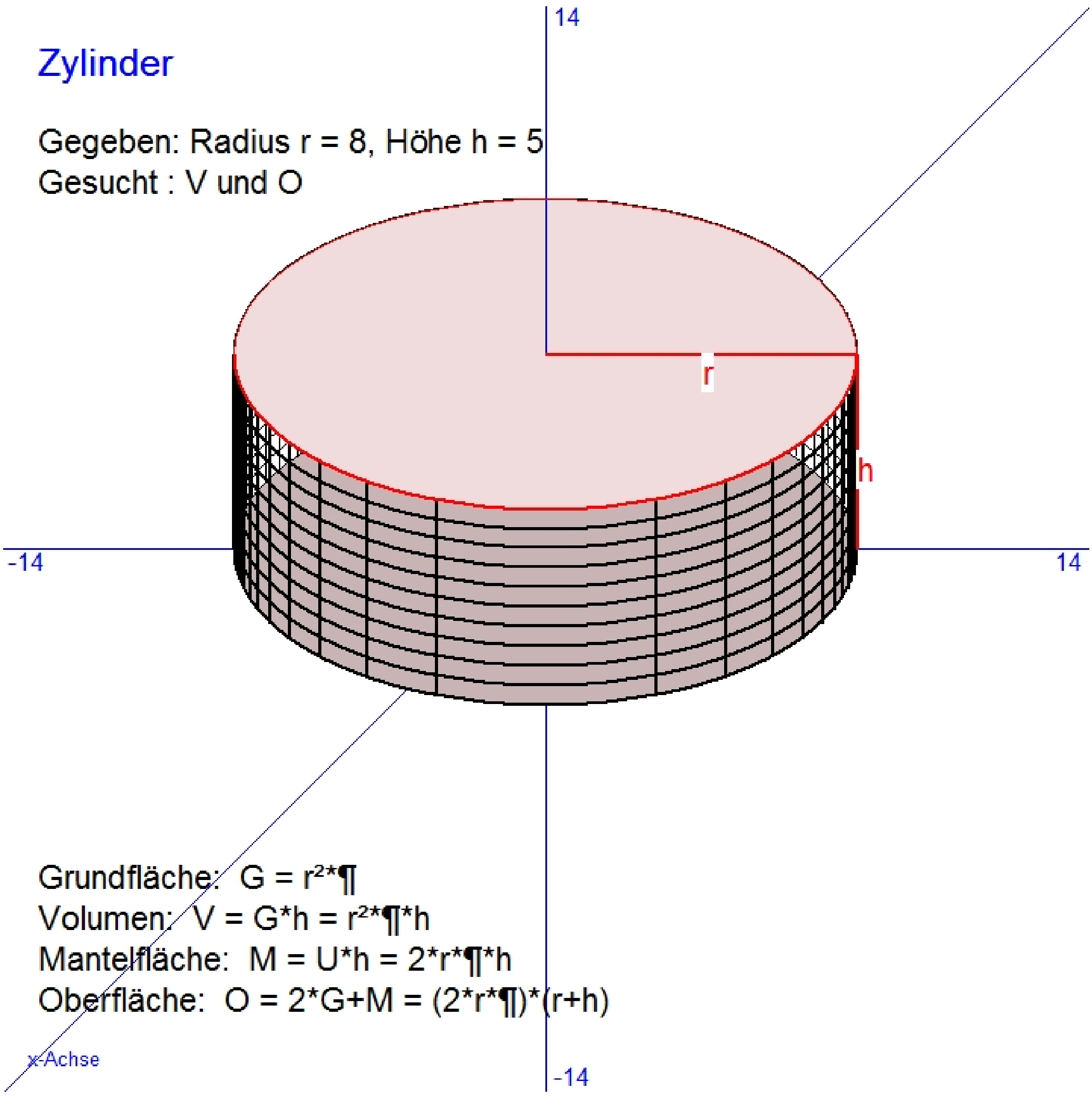
Der Rhomben-Dodekaeder



Lösung:

V = 250.00
O = 212.13

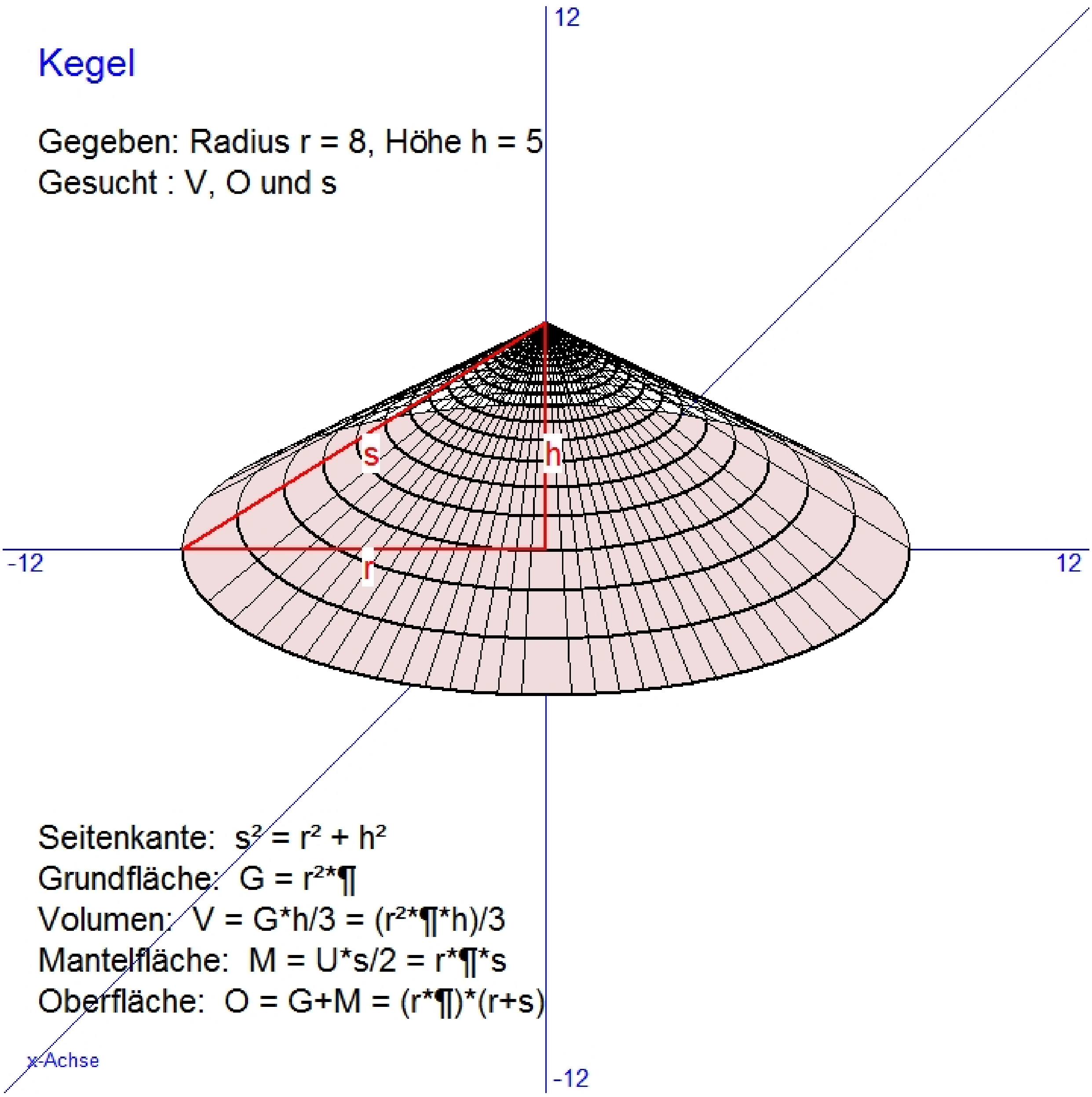
Der Zylinder



<u>Lösung:</u>

G = 201.06
V = 1005.31
M = 251.33
O = 653.45

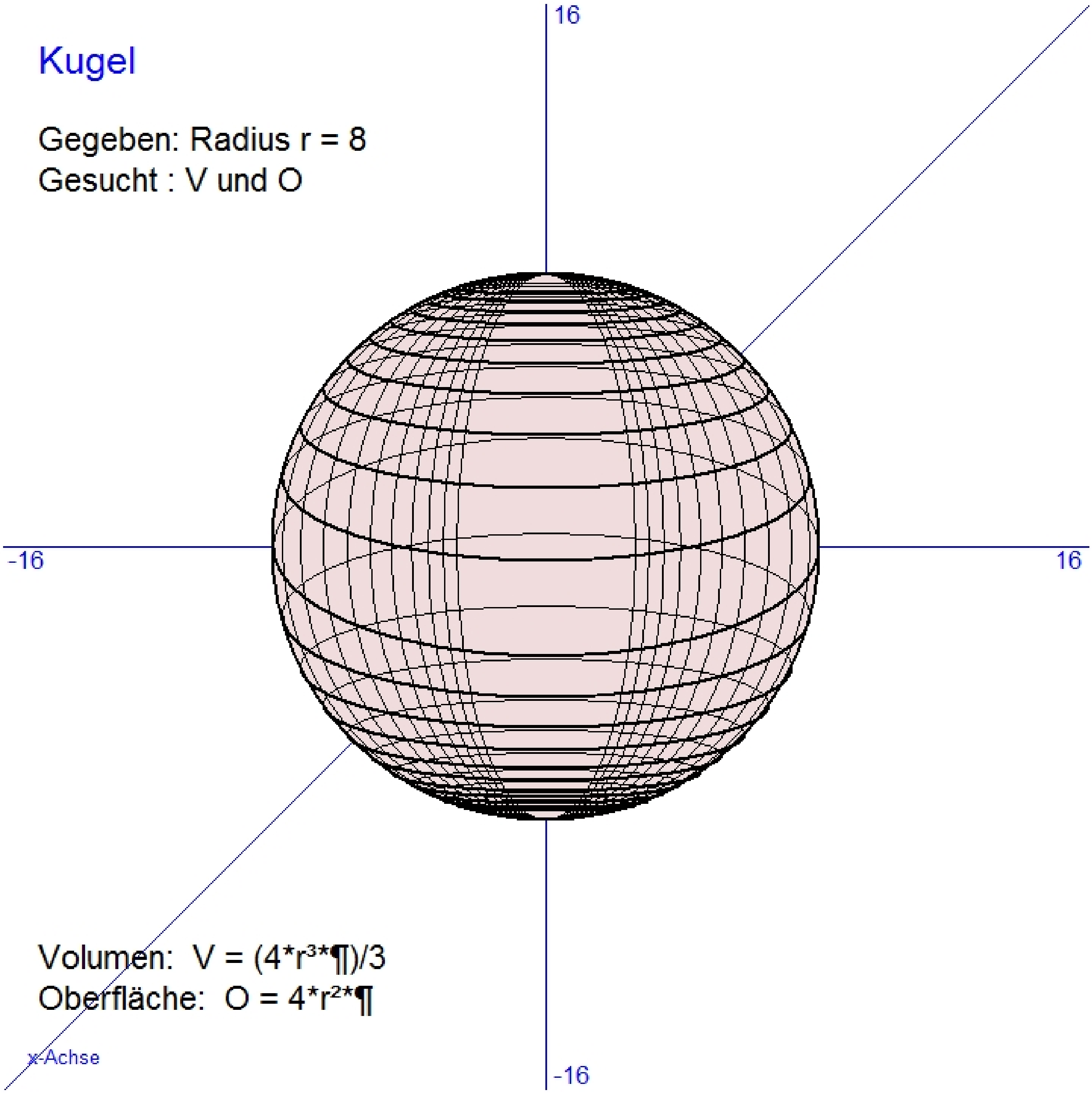
Der Kegel



<u>Lösung:</u>

$G = 201.06$
$V = 335.10$
$s = 9.43$
$M = 237.10$
$O = 438.16$

Die Kugel



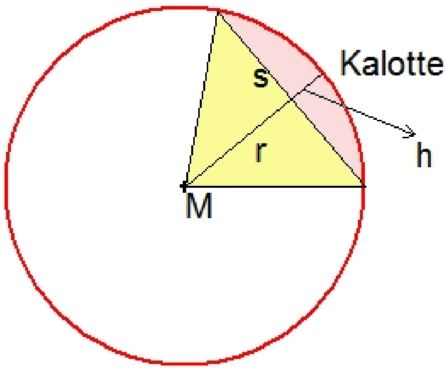
Lösung:

V = 2144.66
O = 804.25

Kugelteile

Die Teile der Kugel

Schneidet man eine Ebene mit einer Kugel, dann nennt man jenen Kugelteil, welcher zwischen dem Schnittkreis und der Kugeloberfläche liegt, einen Kugelabschnitt (Segment). Der gekrümmte Teil dieses Segments heißt Kugelhaube (Kalotte). Addiert man zum Kugelabschnitt jenen Kegel, dessen Basis der Schnittkreis und dessen Spitze der Kugelmittelpunkt ist, dann erhält man einen Kugelausschnitt (Sektor).



Die Kalottenfläche F verhält sich zur Oberfläche der Halbkugel sowie die Höhe h zum Kugelradius r. $F / 2r^2\P = h / r$, $F = 2rh\P$.

Für die Fläche der Kalotte (Kugelhaube) gilt die Formel $F = 2rh\P$.

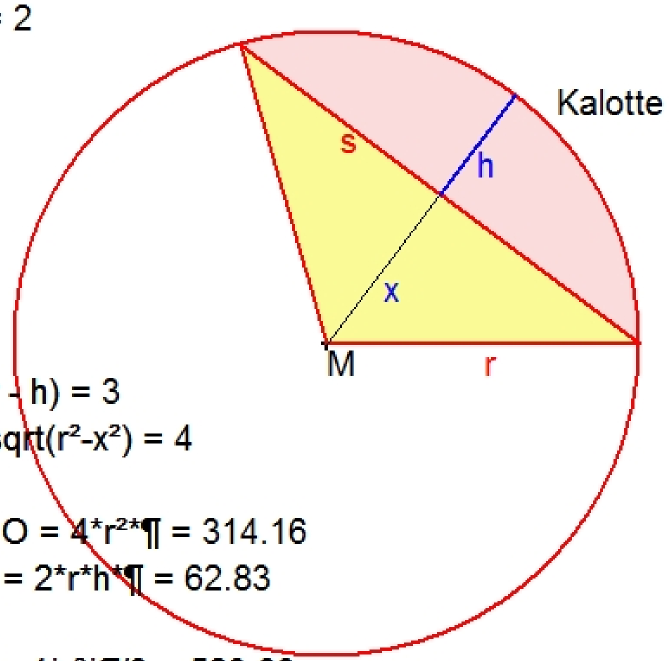
Das Sektorvolumen W verhält sich zum Volumen der Halbkugel sowie die Höhe h zum Kugelradius r. $W / (2r^3\P/3) = h / r$. Zieht man vom Sektorvolumen W das Kegelvolumen $K = s^2\P*(r-h)/3$ ab, so erhält man mittels Satz von Pythagoras ($s^2 = r^2 - (r-h)^2$) eine

Formel für das Volumen des Kugelsegmentes $L = (3r - h)*h^2\P / 3$.

Die Teile der Kugel

Gegeben:

Kugelradius r = 5
Kalottenhöhe h = 2



Gesucht:

Kegelhöhe x = (r - h) = 3
Kreisradius s = sqrt(r²-x²) = 4

Kugeloberfläche O = 4*r²*¶ = 314.16
Kalottenfläche F = 2*r*h*¶ = 62.83

Kugelvolumen V = 4*r³*¶/3 = 523.60
Sektorvolumen W = 2*r²*h*¶/3 = 104.72

Kegelvolumen K = s²*¶*x/3 = 50.27
Segmentvolumen L = W - K = 54.45
Zentriwinkel z = 2*arccos(x/r) = 106.26°

LEHRSÄTZE der elementaren GEOMETRIE

Grundlagen der Abbildungsgeometrie

Die Lehrsätze der elementaren Geometrie bilden ein faszinierendes Gebäude. Ausgehend von einigen wenigen Grundgesetzen (Axiomen) wird dieses Bauwerk schrittweise errichtet. Die einzigen Werkzeuge sind das Anschauungsvermögen und das logische Denken.

Meistens wird zuerst die Geometrie der Abbildungen entwickelt. Dabei wird zwischen Ähnlichkeitsabbildungen und Kongruenzabbildungen unterschieden. Mit Hilfe der gewonnenen elementaren Erkenntnisse der Abbildungsgeometrie werden dann weitere Lehrsätze bewiesen.

Ein Objekt (Figur) in der Ebene besteht aus einer Menge von zusammengehörigen Punkten. Solche Objekte sind Gerade, Strecken, Vielecke, Kreise, usw.

Unter einer Abbildung versteht man die Erzeugung einer Bildfigur aus einer gegebenen Urfigur entsprechend einer festgelegten Vorschrift
Die Zuordnung von Bildfigur zur Urfigur muss eindeutig sein.

Die Form einer geometrischen Figur hängt wesentlich von den Winkeln und von den Streckenverhältnissen ab.

Die Fläche einer geometrischen Figur hängt wesentlich von den Längen entsprechender Strecken ab.

Zwei geometrische Figuren heißen kongruent (deckungsgleich), wenn sie in Form und Fläche übereinstimmen. Dann sind die zugeordneten Winkel gleich groß und die zugeordneten Strecken sind gleich lang.

Abbildungen, bei welchen Bildfigur und Urfigur deckungsgleich sind, heißen Kongruenzabbildungen. Diese werden durch Spiegelungen, Schiebungen und Drehungen realisiert. Die beiden letzteren heißen auch Bewegungen.

Jede Bewegung besteht aus Schiebungen und Drehungen.

Zwei geometrische Figuren heißen ähnlich (formgleich), wenn sie in ihrer Form übereinstimmen, d.h. die zugeordneten Winkel und die zugeordneten Streckenverhältnisse sind gleich groß.

Abbildungen, bei welchen die Bildfigur die gleiche Form hat wie die Urfigur, heißen Ähnlichkeitsabbildungen. Diese werden durch so genannte zentrische Streckungen realisiert.

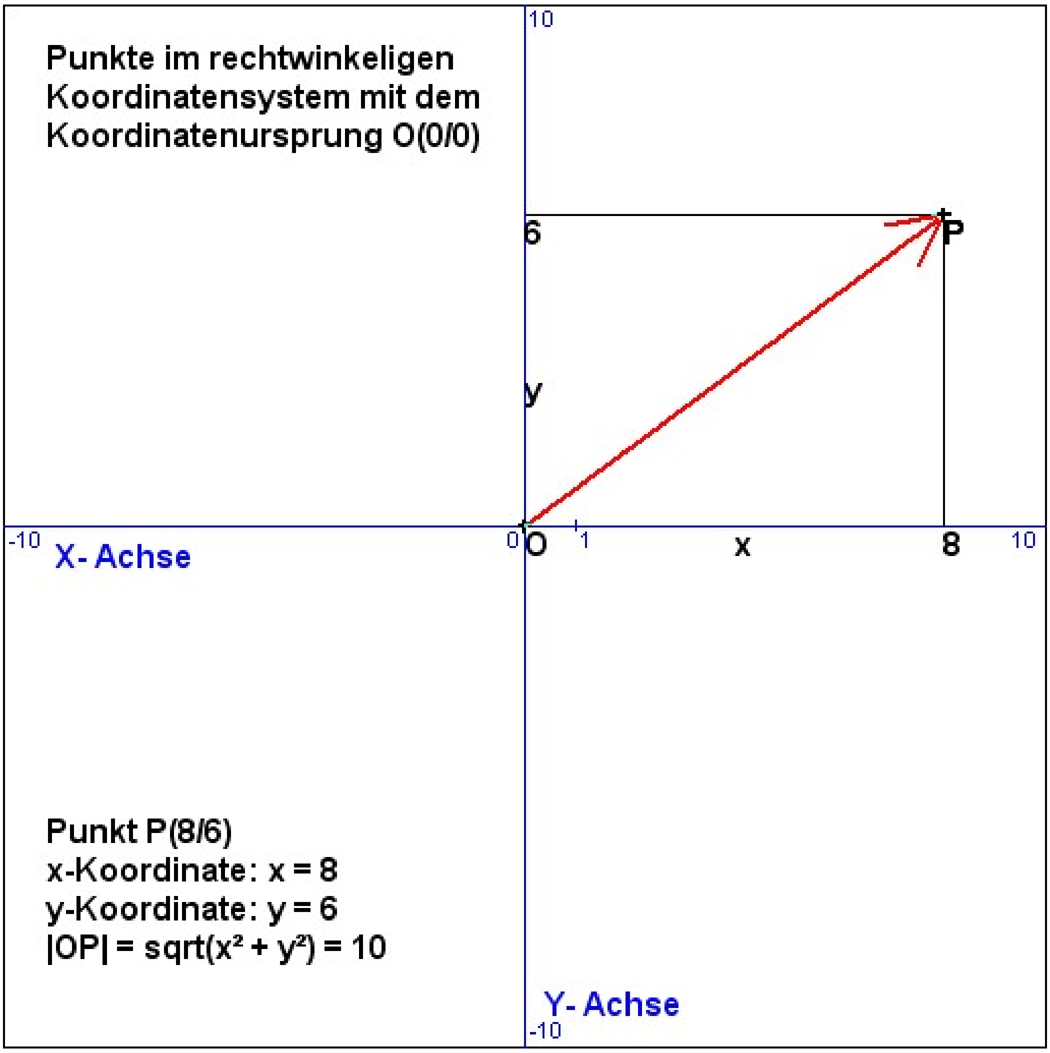
Zwei Abbildungen werden hintereinander ausgeführt (verkettet), indem die Bildfigur der ersten Abbildung zur Urfigur der zweiten Abbildung wird. Das Ergebnis ist dann eine neue Abbildung.

Erstens kann man zeigen, dass jede Kongruenzabbildung durch die Verkettung von endlich vielen Spiegelungen erzeugt wird.

Zweitens kann man zeigen, dass jede Ähnlichkeitsabbildung durch die Verkettung von endlich vielen zentrischen Streckungen erzeugt wird.

In diesem Projekt werden zunächst die Abbildungen erklärt und danach die wichtigsten Lehrsätze der elementaren Geometrie beschrieben und auch bewiesen.

Das Koordinatensystem



Schiebungen und Vektoren

Schiebungen und Vektoren

Wir wollen uns jetzt eingehender mit Schiebungen befassen.
Wir wissen bereits, dass Schiebungen Kongruenzabbildungen sind, d.h. Form und Fläche der verschobenen Objekte sind unverändert.

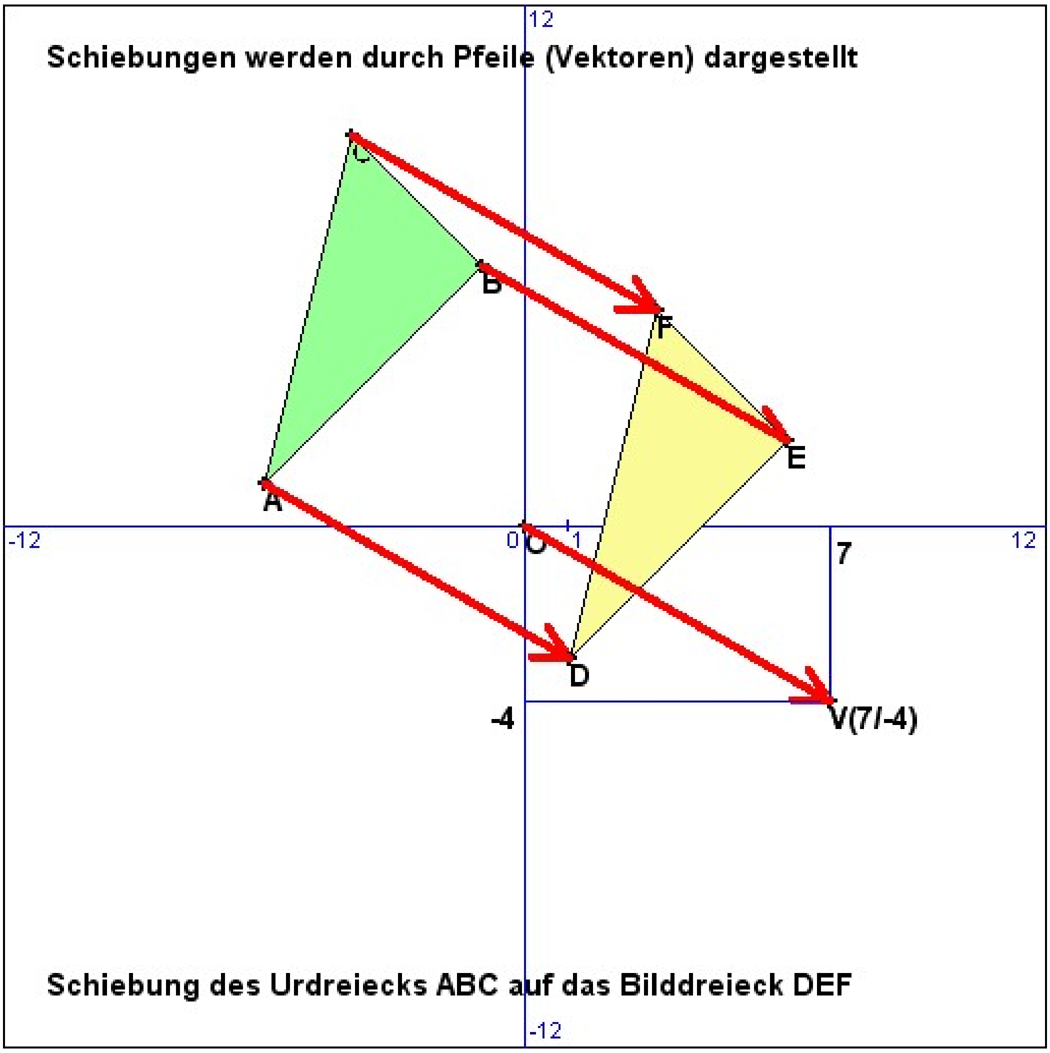
Die Abbildungsvorschrift für die Schiebung lautet: Verschiebe jeden Punkt in die gleiche Richtung und um die gleiche Länge.
Eine solche Schiebung kann durch einen Pfeil festgelegt werden.
Ein Pfeil ist durch seine Richtung und durch seine Länge gegeben.

Die Menge aller gleich gerichteter und gleich langer Schiebepfeile nennt man einen Vektor. Und ein solcher Schiebepfeil heißt dann ein Vertreter des Vektors. Der Urpunkt bei einer Schiebung heißt Fußpunkt und der Bildpunkt heißt Kopfpunkt des entsprechenden Schiebepfeiles.

Einen Vektor kann man im Koordinatensystem durch jenen Vertreter festlegen, dessen Fuß im Koordinatenursprung O(0/0) liegt. Durch die zwei Koordinaten des Kopfpunktes V(x/y) wird die Richtung und die Länge des Vektors bestimmt.

Die folgende Grafik soll diesen Sachverhalt darstellen.

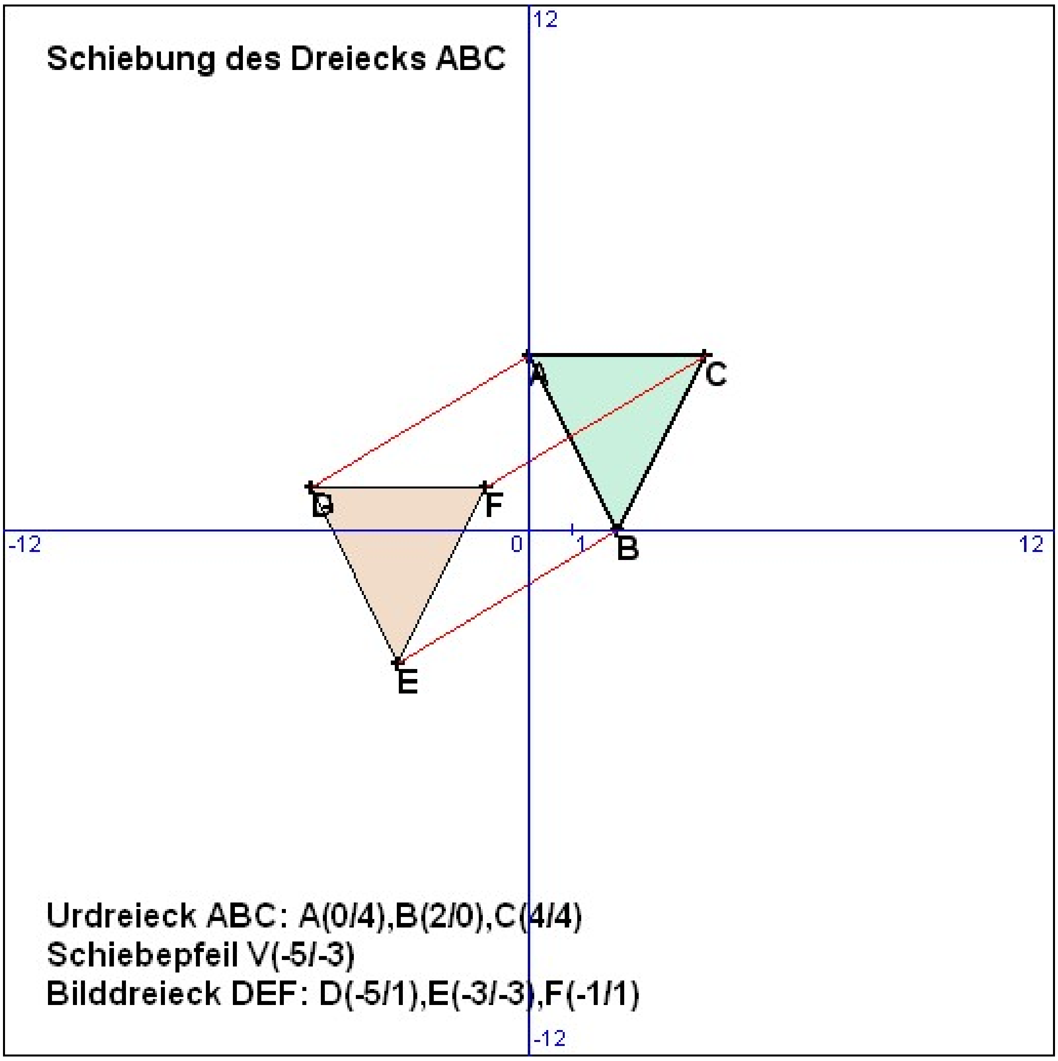
Schiebungen und Vektoren



Bewegungen in der Ebene

Die Schiebung

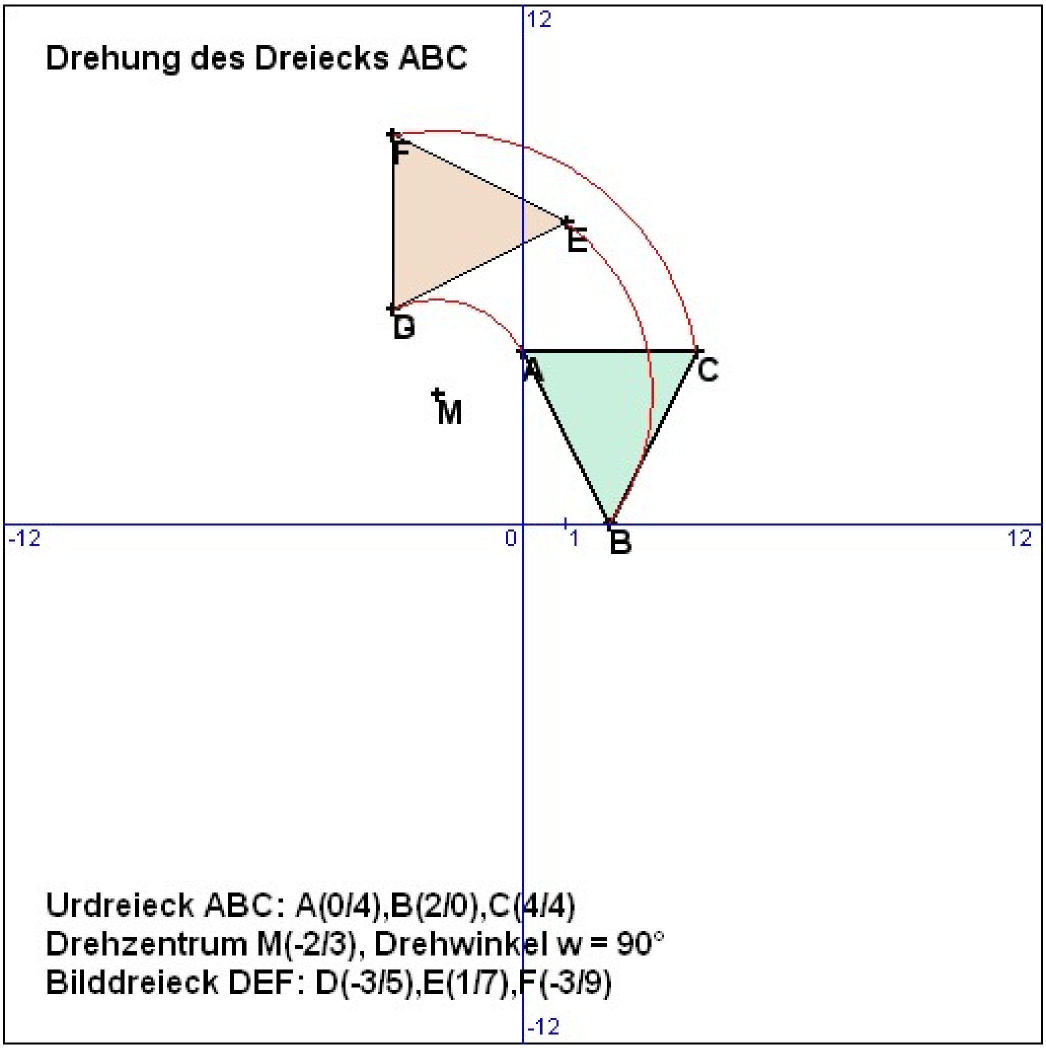
Die Abbildungsvorschrift für die Schiebung lautet: Verschiebe jeden Punkt in die gleiche Richtung und um die gleiche Länge. Eine solche Schiebung wird durch einen Pfeil (Vektor) festgelegt.



Bewegungen in der Ebene

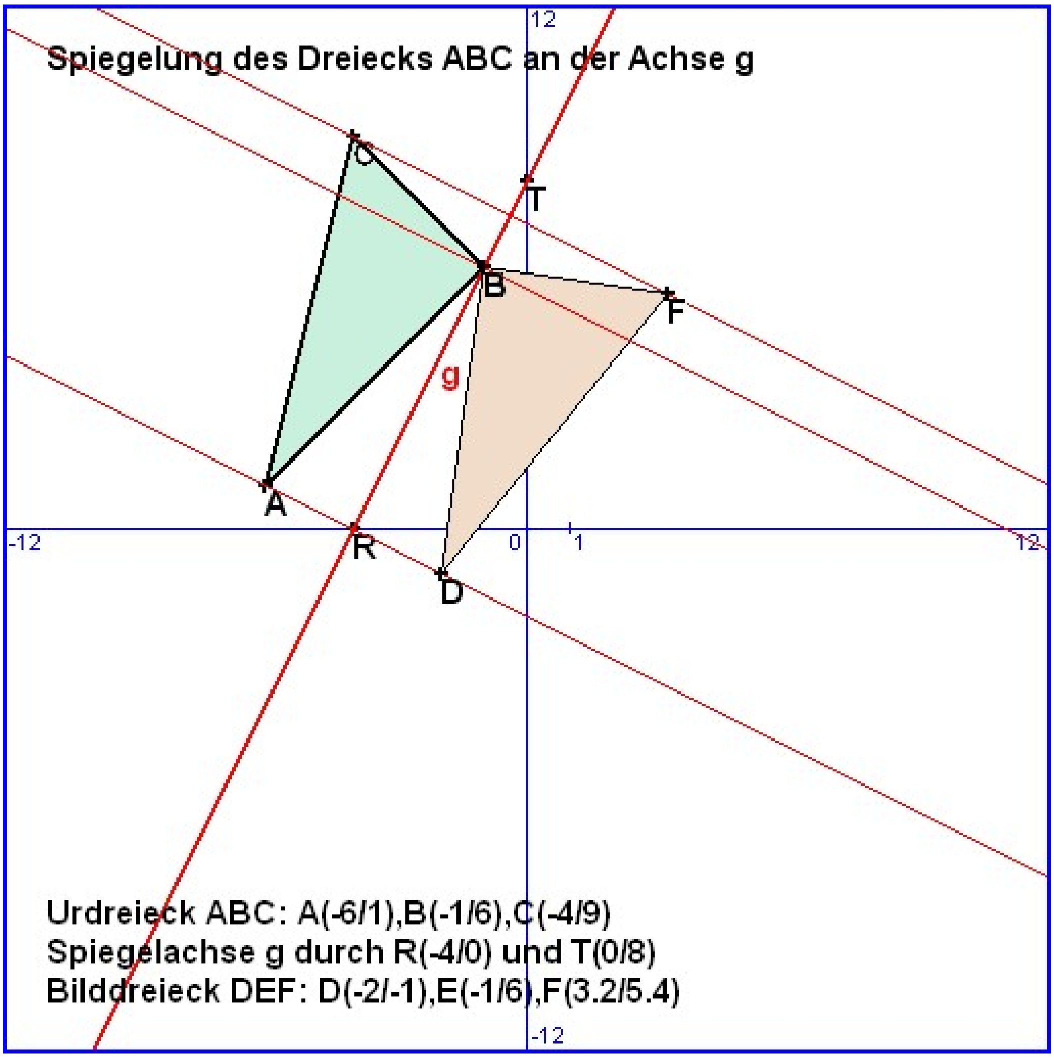
Die Drehung

Die Abbildungsvorschrift für die Drehung lautet: Drehe jeden Punkt in die gleiche Richtung um den gleichen Winkel um einen festen Punkt (Drehzentrum). Eine Drehung ist durch Drehzentrum und Drehwinkel festgelegt.



Der Betrag des Drehwinkels entspricht der Größe des Winkels.
Das Vorzeichen des Drehwinkels bestimmt den Drehsinn. Ist es positiv, dann erfolgt die Drehung gegen die Uhrzeigerbewegung. Ist es negativ, dann erfolgt die Drehung in der Uhrzeigerbewegung.

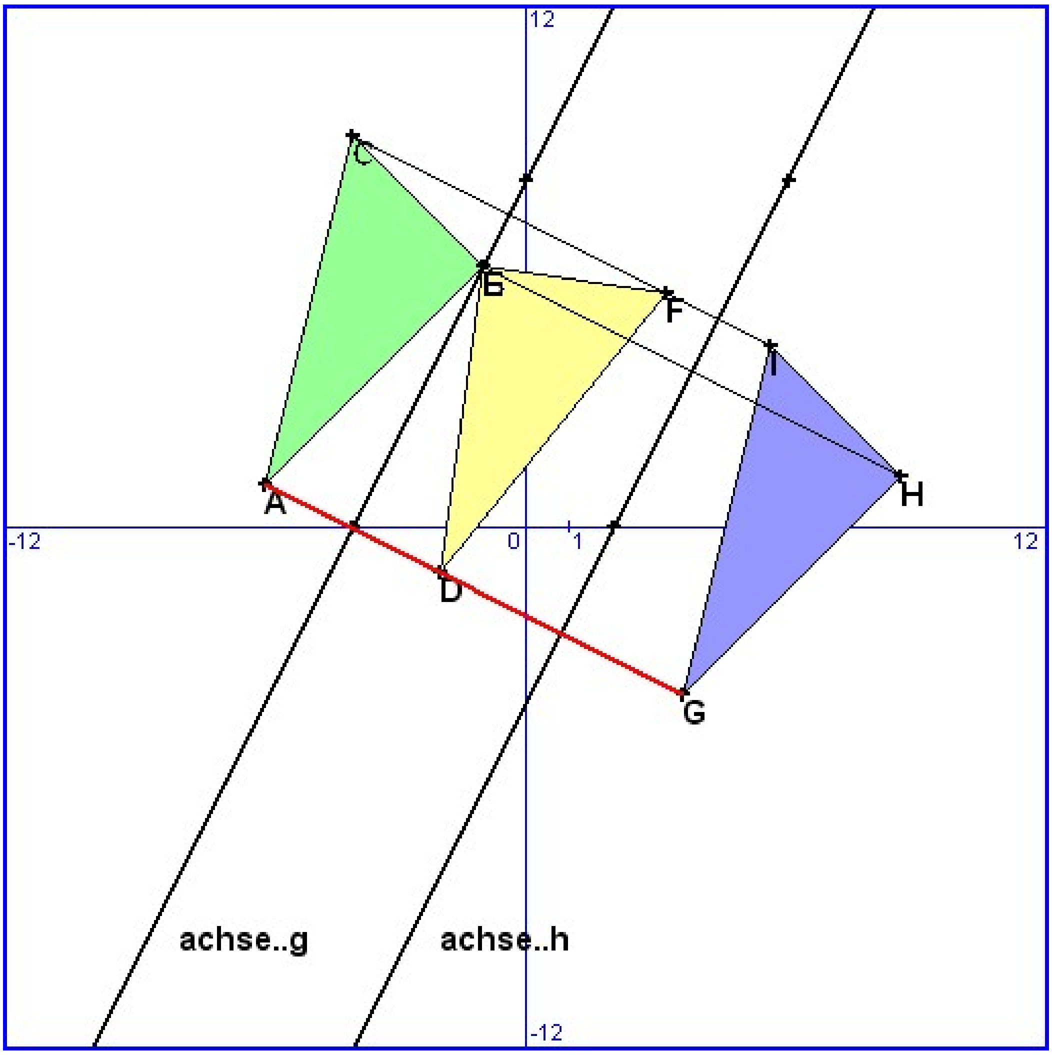
Die Spiegelung. Ein gegebener Punkt A wird um die Spiegelachse g geklappt, d.h. sein Bildpunkt D liegt auf der anderen Seite der Achse und ist von dieser genau so weit entfernt wie der Urpunkt A (Dg = Ag).



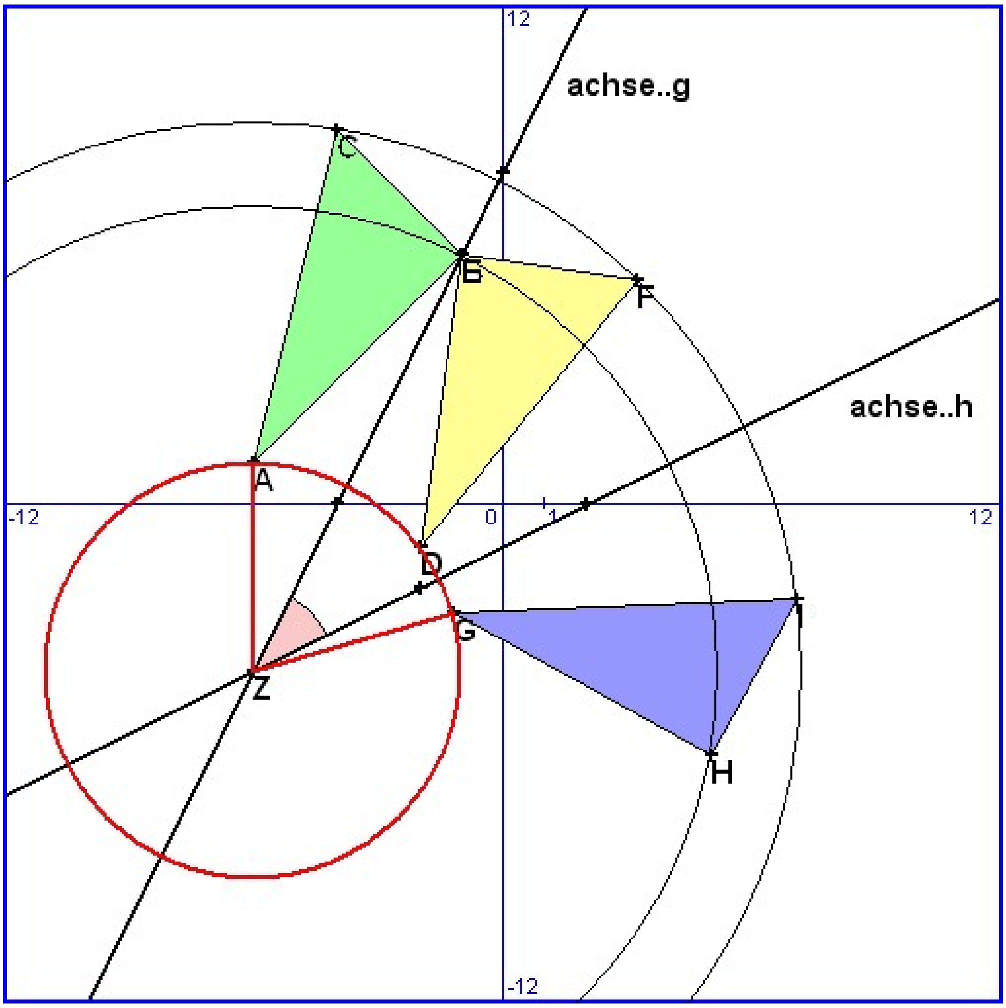
Eine Spiegelung ist gegeben durch die Spiegelachse g. Spiegelt man einen Punkt auf dieser Achse, dann ändert sich seine Lage nicht. Solche Punkte heißen Fixpunkte der Abbildung. Offenkundig sind alle Punkte der Achse Fixpunkte der Spiegelung.

Die Drehung hingegen hat nur einen Fixpunkt, nämlich das Drehzentrum. Die Schiebung hat keinen Fixpunkt.

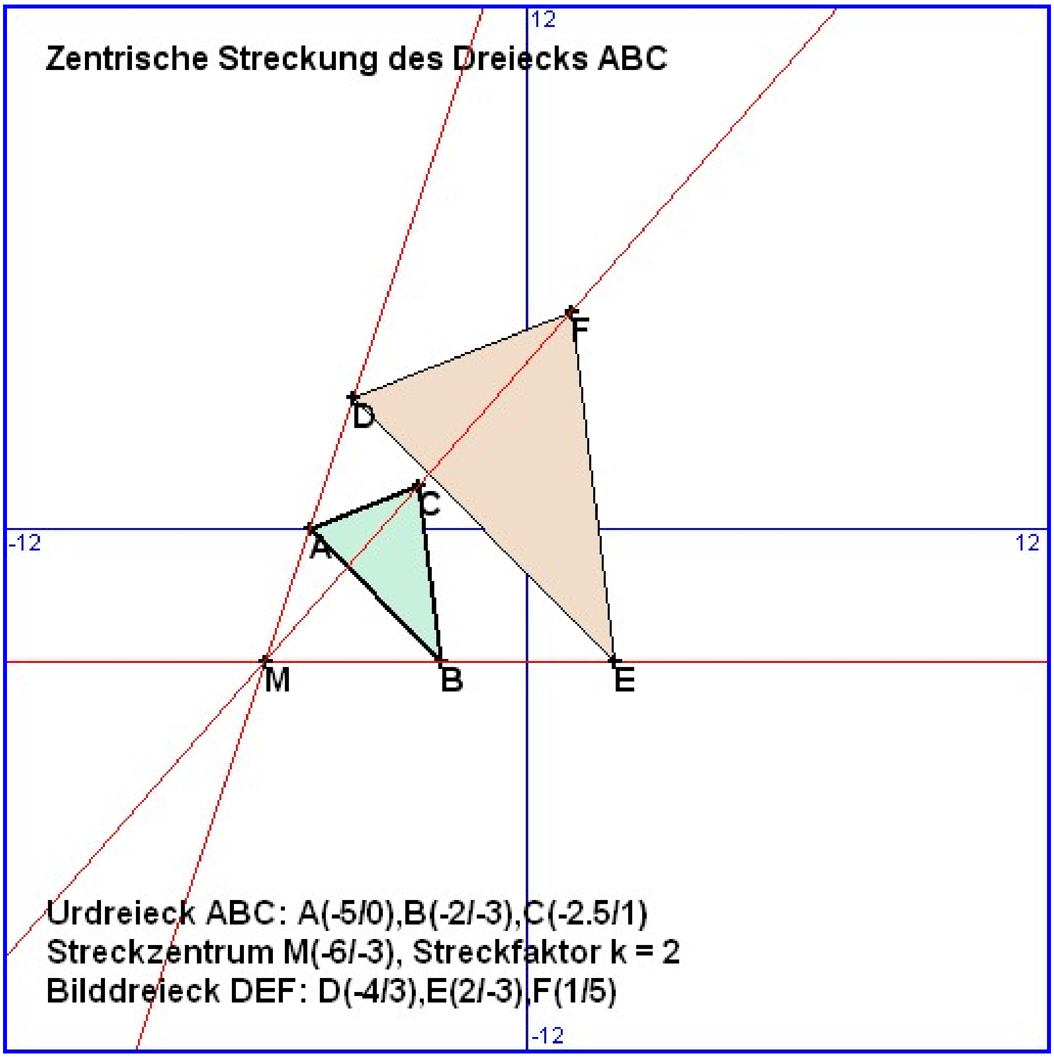
Erster Spiegelungssatz. Zwei hintereinander ausgeführte Spiegelungen mit parallelen Spiegelachsen ergeben eine Schiebung. Die Schieberichtung ist normal auf die Spiegelachsen und der Schiebeweg ist gleich dem doppelten Abstand der Spiegelachsen.



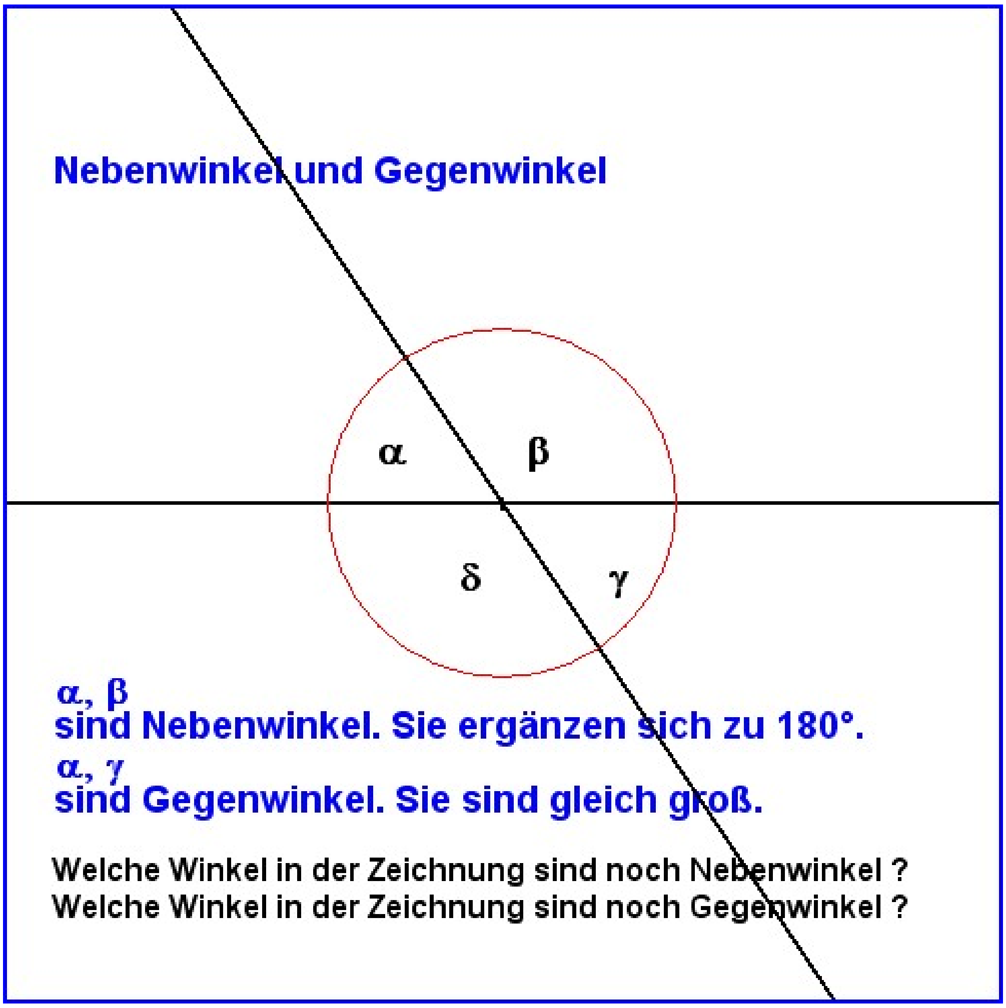
Zweiter Spiegelungssatz. Zwei hintereinander ausgeführte Spiegelungen mit schneidenden Spiegelachsen ergeben eine Drehung. Das Drehzentrum ist der Schnittpunkt der Spiegelachsen und der Drehwinkel ist doppelt so groß wie der Winkel zwischen den Spiegelachsen.



Die Streckung. Gegeben ist ein Streckzentrum M und ein Streckfaktor k. Ein Punkt A und sein Bildpunkt D liegen auf einem Strahl durch das Zentrum. Die Entfernung des Bildpunktes D vom Zentrum M beträgt das k-fache der Entfernung des Urpunktes A vom Zentrum (DM = k * AM). Wenn k > 0 ist, dann liegen A und D auf derselben Seite von M. Wenn k < 0 ist, dann liegen A und D auf verschiedenen Seiten von M.

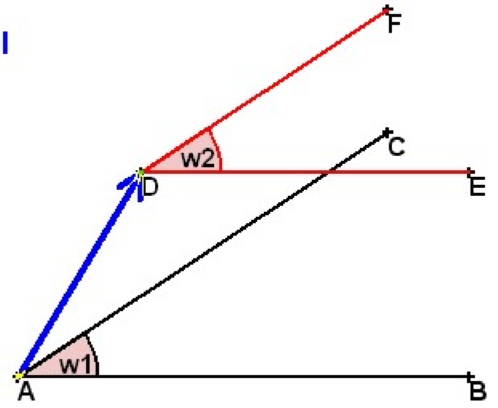


Nebenwinkel und Gegenwinkel



Parallelwinkel und Normalwinkel

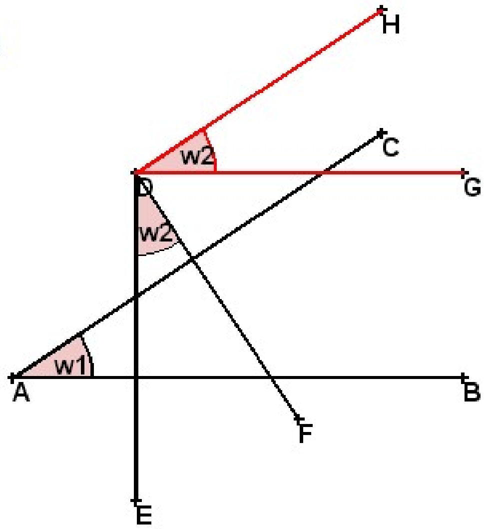
Parallelwinkel



Der Parallelwinkelsatz: Zwei Winkel w1 und w2, deren Schenkel paarweise zueinander parallel sind, heißen Parallelwinkel und sind immer gleich groß.

Beweis: Der erste Winkel w1 kann durch eine einfache Schiebung auf den zweiten Winkel w2 abgebildet werden. Daher sind solche Parallelwinkel natürlich gleich groß.

Normalwinkel



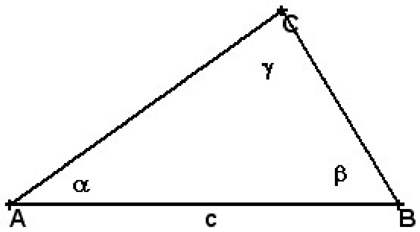
Der Normalwinkelsatz: Zwei Winkel w1 und w2, deren Schenkel paarweise aufeinander normal stehen, heißen Normalwinkel und sind immer gleich groß.

Beweis: Der Normalwinkel w2 kann durch eine Drehung um 90° zum ersten Winkel w1 parallel gedreht werden. Und solche Parallelwinkel sind natürlich gleich groß.

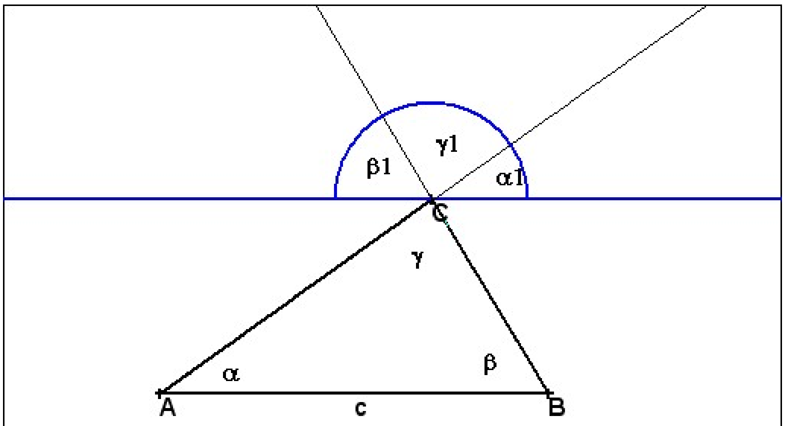
Die Winkelsumme im Dreieck

In jedem Dreieck beträgt die Summe der drei Winkel genau 180°.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$. (Die Untere Abbildung zeigt den Beweis des Satzes).

Die Winkelsumme im Dreieck
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Dieser Satz wird bei der Herleitung vieler weiterer Lehrsätze aus der elementaren Geometrie verwendet, beispielsweise beim Randwinkelsatz (Peripheriewinkelsatz) oder Thalessatz.



(1) Eine parallele Gerade zur Seite c im Eckpunkt C zeichnen.
(2) Den Winkel bei A entlang der Seite AC verschieben.
(3) Den Winkel bei B entlang der Seite BC verschieben.

$\alpha1 + \beta1 + \gamma1 = 180°$.
$\alpha = \alpha1,\ \beta = \beta1,\ \gamma = \gamma1$.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

(4) Die drei Winkel zusammen ergeben daher genau 180°.

Die Kongruenzsätze des Dreiecks

Die Kongruenzsätze des Dreiecks

Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn sie deckungsgleich sind, d.h. sie stimmen in ihren Seitenlängen und Winkelgrößen überein. Natürlich haben sie dann auch die gleiche Form und Fläche.

Die Bewegungen in der Ebene (Schiebung, Drehung) und auch die Spiegelung ändern Form und Fläche von Dreiecken nicht. Man nennt sie daher Kongruenzabbildungen.

Die vier Kongruenzsätze besagen, dass Dreiecke kongruent sind, wenn sie in folgenden Angaben übereinstimmen:

- in drei Seiten (SSS)
- in einer Seite und zwei Winkeln (SWW oder WSW)
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (SWS)
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite (SsW)

Diese Sätze sind ein wichtiges Hilfsmittel für die Herleitung von geometrischen Lehrsätzen. Die Beweise für diese Sätze folgen.

Die Kongruenzsätze des Dreiecks werden wie folgt bewiesen:

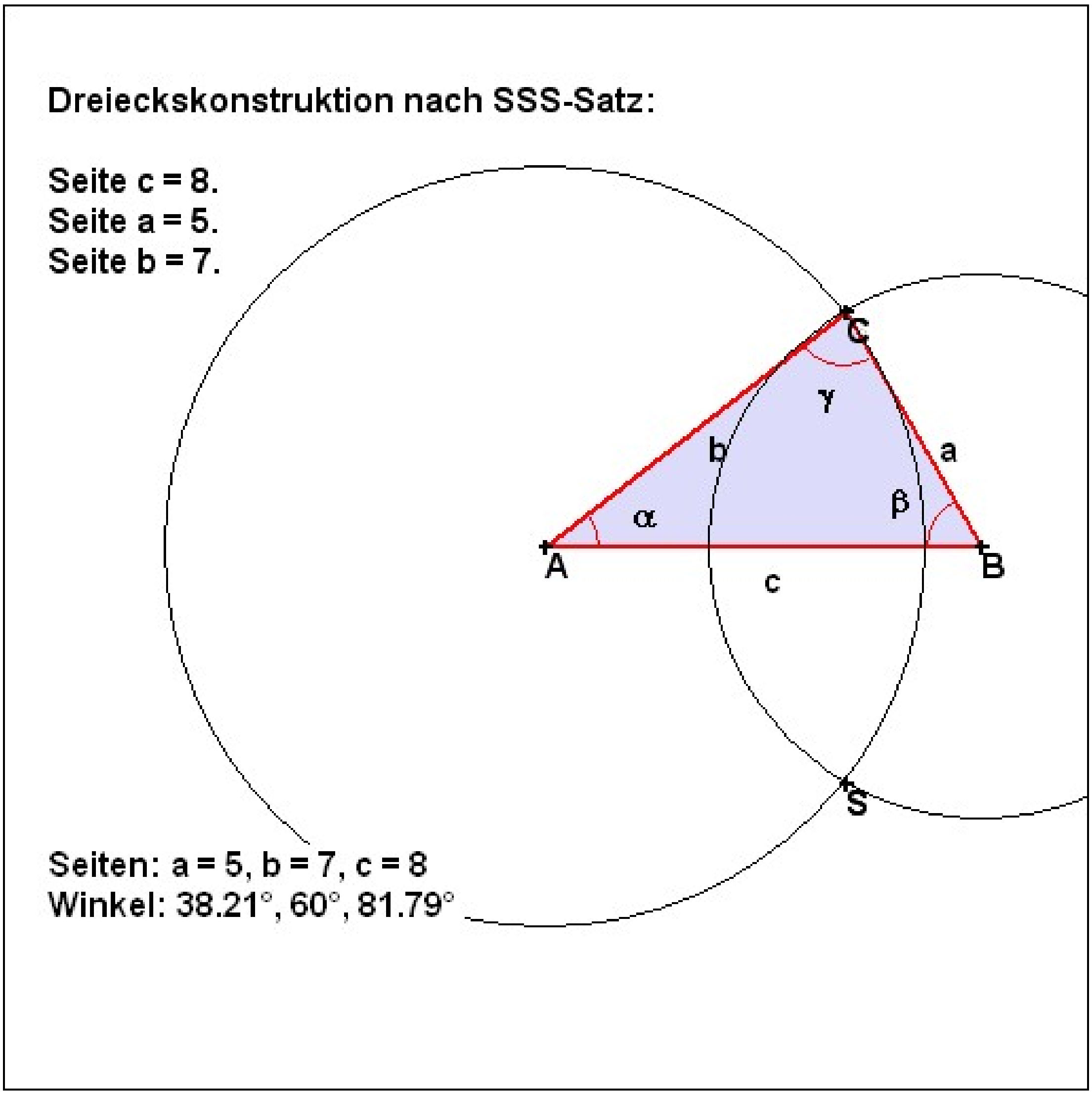
Man gibt ein Konstruktionsverfahren mit Zirkel und Lineal an, mit dessen Hilfe das Dreieck aus den gegebenen Größen ermittelt werden kann. Liefert das Konstruktionsverfahren ein eindeutiges Ergebnis, dann müssen alle Dreiecke mit diesen Angabegrößen deckungsgleich sein.

Als Beispiel wird der SSS-Satz bewiesen. Die anderen Sätze sind dann in analoger Art zu beweisen. Beim SsW-Satz muss der Winkel der größeren Seite gegenüber liegen, sonst gibt es zwei Lösungen.

SSS-Satz: Gegeben seien von einem Dreieck ABC die drei Seiten.

(1) Zeichne eine Strecke AB mit der Länge c.
(2) Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt B und Radius a.
(3) Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius b.
(4) Schneide die beiden Kreise.
(5) Man erhält nur dann zwei spiegelsymmetrische Schnittpunkte, wenn gilt $a + b > c$. Diese so genannte Dreiecksungleichung muss für alle Seitenmöglichkeiten gelten. Betrachtet man nun nur einen Schnittpunkt C, so ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

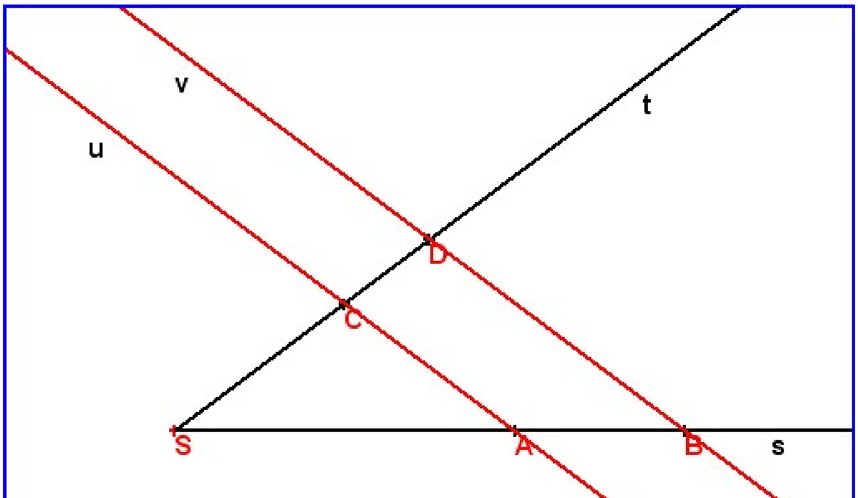
Im Folgenden wird diese Konstruktion anschaulich demonstriert.



Aus der Konstruktion ist ersichtlich, dass es nur dann einen Schnittpunkt C gibt, wenn die Seite c kleiner als die beiden Seiten a und b zusammen ist, d.h. c < a + b.

Diesen Sachverhalt nennt man auch **Dreiecksungleichung**: In jedem Dreieck muss eine Seite kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten sein.

Die Strahlensätze

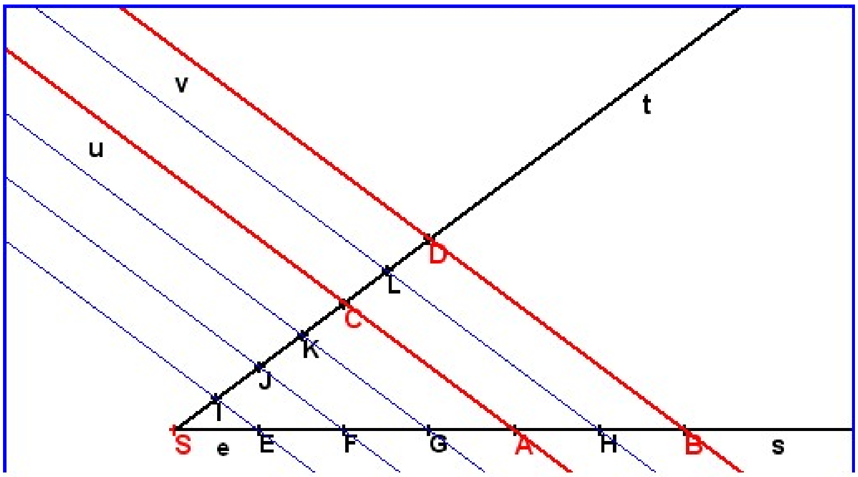


Die Strahlensätze

Es sind s und t zwei Halbgerade mit Scheitel S.
Diese werden von zwei parallelen Geraden u und v geschnitten.
Für die dabei erzeugten Strecken gelten folgende Verhältnisse:

SA : SB = SC : SD, Erster Strahlensatz.
SA : SB = AC : BD, Zweiter Strahlensatz.

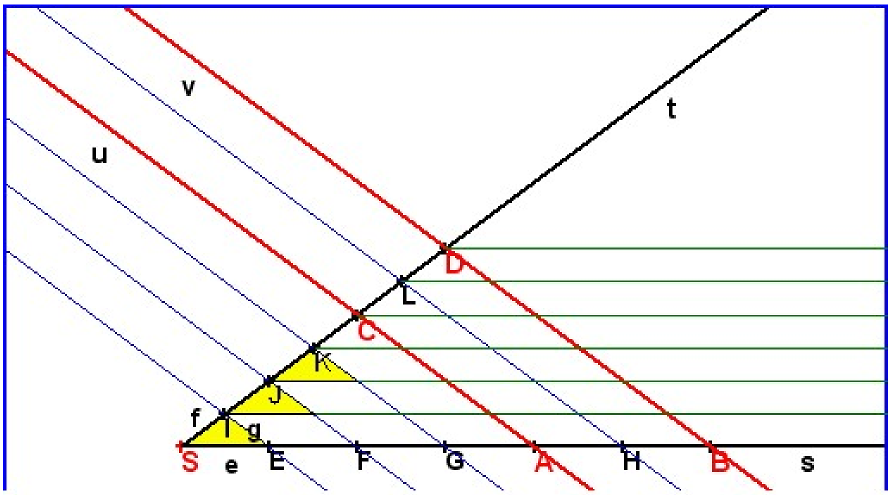
Diese beiden Lehrsätze werden im Folgenden bewiesen.



Es ist e = 1 die Längeneinheit auf Strahl s und SA = a und SB = b.

(1) Nun wird auf dem ersten Strahl s von S fortlaufend die Einheit e aufgetragen und in den Punkten S, E, F, G, A, H, B eine Schar von Geraden errichtet, die parallel zu den Geraden u und v verlaufen.

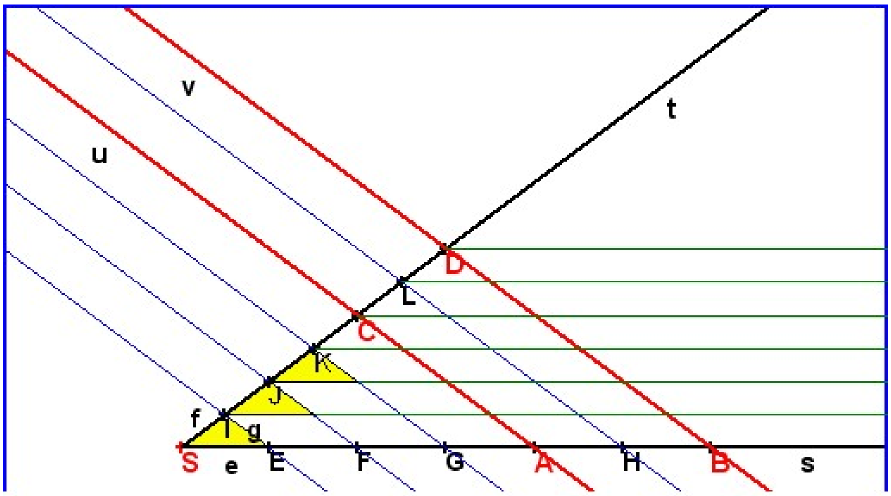
(2) Die Geradenschar schneidet den zweiten Strahl t in den Punkten S, I, J, K, C, L, D. Wir wollen nun zeigen, dass diese Punkte auf dem zweiten Strahl t äquidistant liegen, d.h. benachbarte Punkte sind voneinander gleich weit entfernt.



(3) Es wird eine Geradenschar durch die Punkte S, I, J, K, C, L, D errichtet, welche zu dem ersten Strahl s parallel verläuft.

(4) Dadurch entstehen die eingefärbten Stufendreiecke. Diese sind alle untereinander kongruent, weil sie alle in Seite e und in zwei Winkeln übereinstimmen. Die Seiten der Stufendreiecke sind e, f, g.

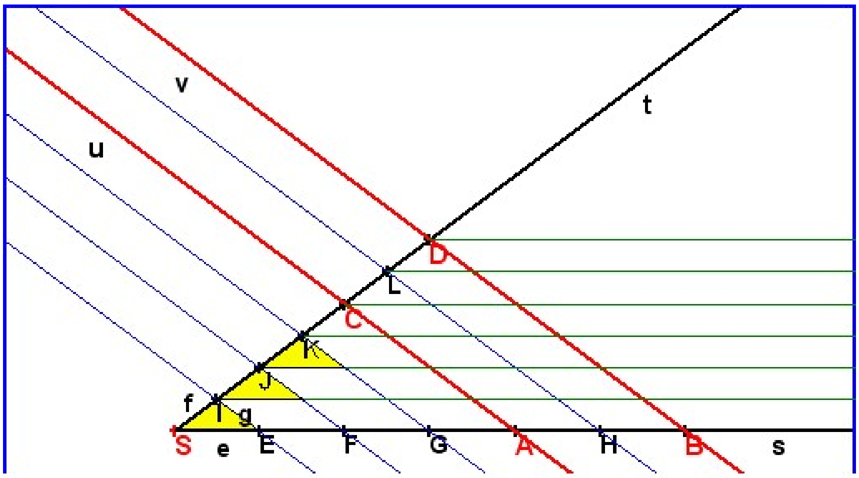
(5) Daher gilt, dass alle Punkte S, I, J, K, C, L, D auf dem zweiten Strahl äquidistant liegen. Also gilt c = SC = a*f, d = SD = b*f.



(6) Es gilt also a = SA, b= SB und c = SC = a*f, d = SD = b*f.

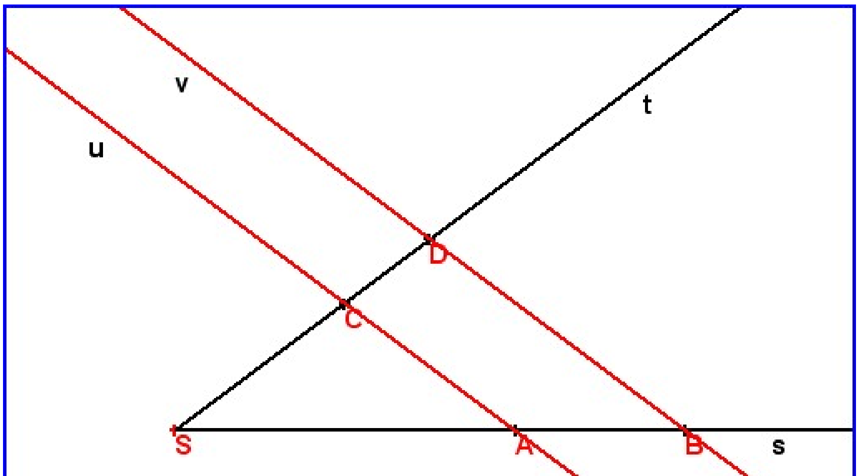
(7) Ein Zahlenverhältnis bleibt gleich, wenn man es mit derselben Zahl erweitert. Also gilt a : b = a*f : b*f = c : d und SA : SB = SC : SD.

Damit ist der erste Strahlensatz bewiesen !



(8) Die waagrechte Parallelenschar, welche durch S, I, J, K, C, L, D verläuft schneidet aus den Geraden u und v ebenfalls äquidistante Punkte heraus. Daher gilt AC = a*g und BD = b*g, also gilt auch hier eine Verhältnisgleichung SA : SB = AC : BD.

Damit ist auch der zweite Strahlensatz bewiesen !



Die Strahlensätze

SA : SB = SC : SD, Erster Strahlensatz.
SA : SB = AC : BD, Zweiter Strahlensatz.

Diese Lehrsätze spielen in der Geometrie eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe werden die Ähnlichkeitssätze des Dreiecks, die Flächenformel von Heron und viele andere Lehrsätze bewiesen.

Ähnlichkeitsabbildungen

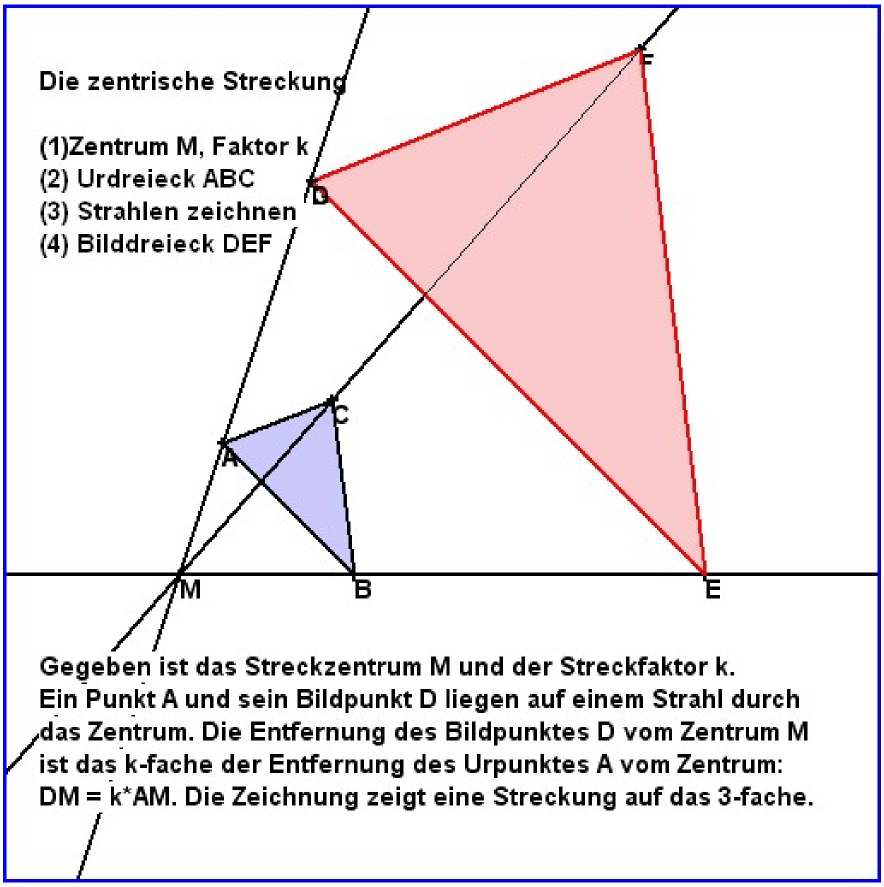
Zwei Objekte in der Ebene heißen ähnlich, wenn sie gleiche Form (Gestalt) aufweisen.

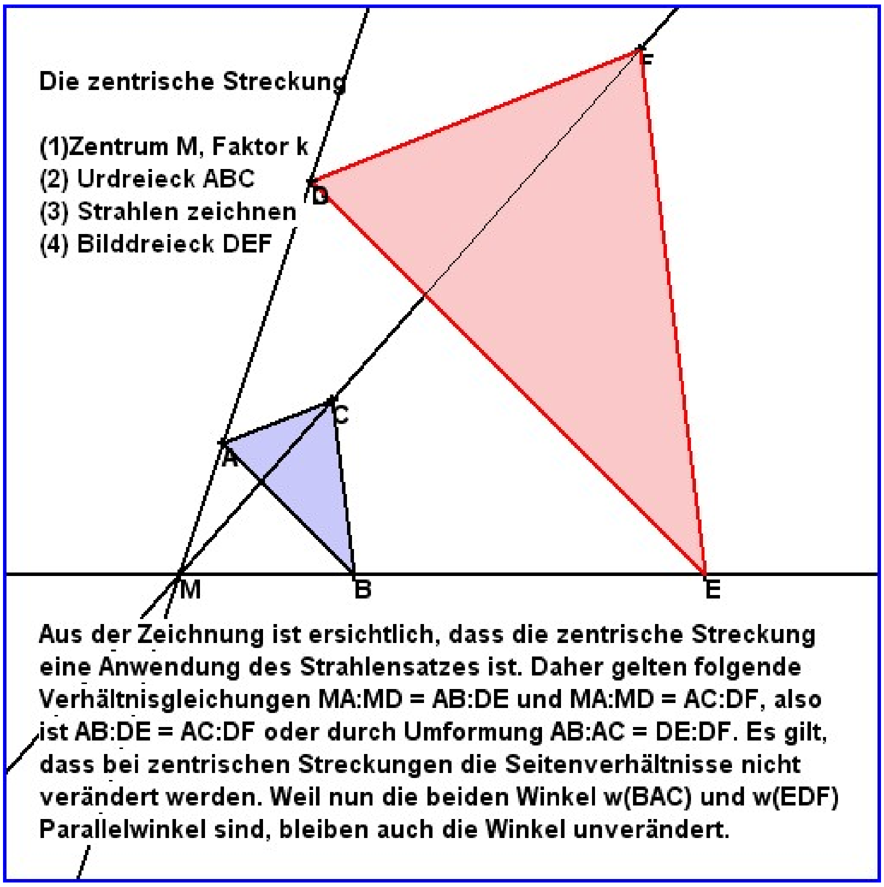
Offenkundig sind zwei Dreiecke dann ähnlich, wenn sie gleich große Winkel aufweisen. Zwei Rechtecke sind offenkundig dann ähnlich, wenn das Verhältnis der beiden Seitenlängen (a : b) in beiden Rechtecken gleich groß ist.

Aus diesen Überlegungen ist ersichtlich, dass die Form von den Winkeln und den Seitenverhältnissen abhängt.

Wenn man ein Objekt unter Beibehaltung seiner Form verkleinert oder vergrößert, dann liegt eine Abbildung des Objektes vor. Solche Abbildungen heißen Ähnlichkeitsabbildungen, weil das Ur-Objekt zum Bild-Objekt ähnlich (formgleich) ist.

Mit Hilfe der Strahlensätze kann nun gezeigt werden, dass die zentrische Streckung eine Ähnlichkeitsabbildung ist, d.h. Winkelgrößen und Seitenverhältnisse werden bei einer zentrischen Streckung nicht verändert.


Die zentrische Streckung
(1)Zentrum M, Faktor k
(2) Urdreieck ABC
(3) Strahlen zeichnen
(4) Bilddreieck DEF
F
D
C
A
M
B
E
Gegeben ist das Streckzentrum M und der Streckfaktor k.
Ein Punkt A und sein Bildpunkt D liegen auf einem Strahl durch das Zentrum. Die Entfernung des Bildpunktes D vom Zentrum M ist das k-fache der Entfernung des Urpunktes A vom Zentrum:
DM = k*AM. Die Zeichnung zeigt eine Streckung auf das 3-fache.


Die zentrische Streckung
(1)Zentrum M, Faktor k
(2) Urdreieck ABC
(3) Strahlen zeichnen
(4) Bilddreieck DEF
F
D
C
A
M
B
E
Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass die zentrische Streckung eine Anwendung des Strahlensatzes ist. Daher gelten folgende Verhältnisgleichungen MA:MD = AB:DE und MA:MD = AC:DF, also ist AB:DE = AC:DF oder durch Umformung AB:AC = DE:DF. Es gilt, dass bei zentrischen Streckungen die Seitenverhältnisse nicht verändert werden. Weil nun die beiden Winkel w(BAC) und w(EDF) Parallelwinkel sind, bleiben auch die Winkel unverändert.

Ähnlichkeitssätze des Dreiecks

Die Ähnlichkeitssätze des Dreiecks

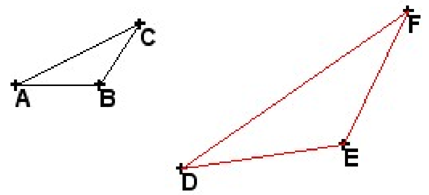
Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie in ihrer Form gleich sind. Offenkundig haben Dreiecke die gleiche Form, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Da die drei Winkel zusammen 180° sind, genügen bereits zwei gleiche Winkel, damit die Dreiecke gleiche Form (Gestalt) aufweisen. Ähnlichkeit ist Übereinstimmung in Proportionen, d.h. entsprechende Seitenverhältnisse sind gleich.

Abbildungen, welche die Form der Objekte unverändert lassen, sodass das Bild-Objekt zum Ur-Objekt ähnlich ist, heißen Ähnlichkeitsabbildungen (siehe auch die zentrische Streckung).
Die vier Ähnlichkeitssätze besagen, dass Dreiecke ähnlich sind, wenn sie in folgenden Angaben übereinstimmen:

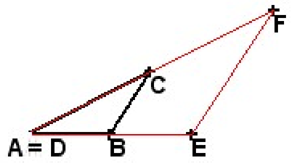
zwei Winkeln (WW)
zwei Seitenverhältnissen (SS)
einem Seitenverhältnis und dem eingeschlossenen Winkel (SWe)
einem Seitenverhältnis und Gegenwinkel der längeren Seite (SWg)

Für den Beweis eines Satzes wird gezeigt, dass unter den Angaben des Satzes eine Ähnlichkeitsabbildung existiert, welche das erste Dreieck auf das zweite Dreieck abbildet. Die Sätze sind wichtige Werkzeuge für die Herleitung von anderen Lehrsätzen.

ABC und EDF sind Dreiecke, wo die Proportionen AB:BC = DE:EF und AC:BC = DF:EF gelten. Es soll nun gezeigt werden, dass die zwei Dreiecke ähnlich sind. Damit ist dann der SS-Satz bewiesen.



Durch eine Drehung und Schiebung wird das Dreieck DEF bewegt.



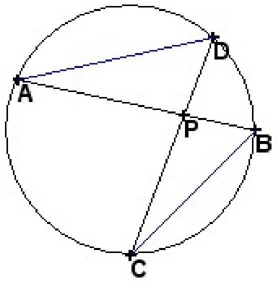
Durch die Bewegung von DEF hat sich die Form nicht geändert.
Laut Angabe gilt AB:BC = DE:EF und AC:BC = DF:EF. Mit einer Umformung gilt dann AB:DE = BC:EF und AC:DF = BC:EF.
Weil A = D ist, folgt daraus AB:AE = AC:AF.
Damit ist eine zentrische Streckung mit dem Zentrum A gefunden, welche das Dreieck ABC auf das Dreieck DEF abbildet. Weil dabei die Form gleich bleibt, sind die beiden Dreiecke ähnlich !

Sehnensatz und Sekantensatz

Der Sehnensatz

Zieht man von einem Punkt P innerhalb eines Kreises beliebige Sehnen, dann sind die Produkte der beiden Sehnenabschnitte vom Punkt zum Kreis immer gleich groß.

PA * PB = PC * PD



Beweis:

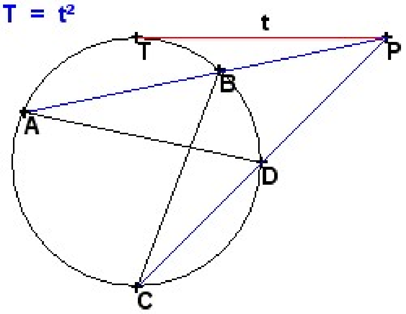
Die Dreiecke [PAD] und [PCB] sind ähnlich, weil sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Die Winkel w(PAD) und w(PCB) sind Randwinkel über dem Kreisbogen BD. Die Winkel w(APD) und w(CPB) sind Gegenwinkel. In zwei ähnlichen Dreiecken sind die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich, d.h. PA : PD = PC : PB. Also gilt:

PA * PB = PC * PD.

Der Sekantensatz

Zieht man von einem Punkt P außerhalb eines Kreises beliebige Sekanten, dann sind die Produkte der beiden Sekantenabschnitte vom Punkt zum Kreis immer gleich groß. Sie sind auch genau so groß wie das Quadrat des Tangentenabschnittes.

PA * PB = PC * PD = PT * PT = t^2



Beweis:

Die Dreiecke [PAD] und [PCB] sind ähnlich, weil sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Die Winkel w(PAD) und w(PCB) sind Randwinkel über dem Kreisbogen BD und der Winkel bei Punkt P ist beiden Dreiecken gemeinsam. In ähnlichen Dreiecken sind die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich, d.h. PA : PD = PC : PB. Also gilt:

PA * PB = PC * PD.

Für die Tangente als Grenzlage der Sekante gilt: PA * PB = PT * PT.

Vier merkwürdige Punkte im Dreieck

Das Merkwürdige an diesen Punkten ist, dass sie jeweils der Schnittpunkt nicht nur von zwei, sondern sogar von drei besonderen Geraden im Dreieck sind. Die entsprechenden Lehrsätze werden auf den folgenden Seiten bewiesen.

Der Umkreismittelpunkt

Die drei Seitensymmetralen des Dreiecks schneiden einander in genau einem Punkt (Umkreismittelpunkt U).

Der Inkreismittelpunkt

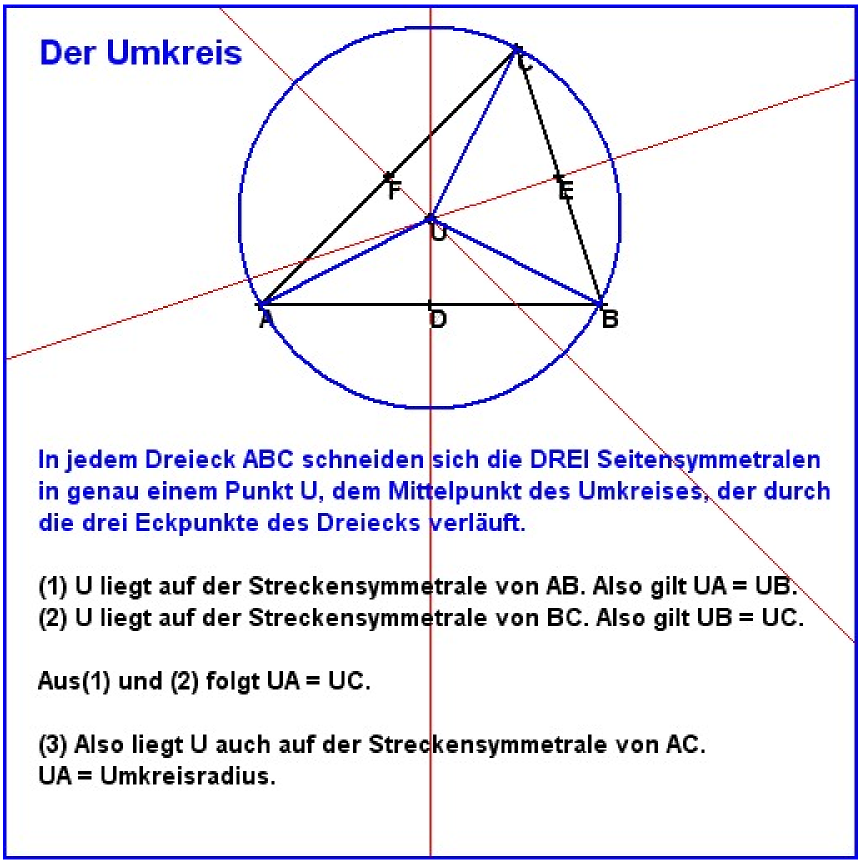
Die drei Winkelsymmetralen des Dreiecks schneiden einander in genau einem Punkt (Inkreismittelpunkt I).

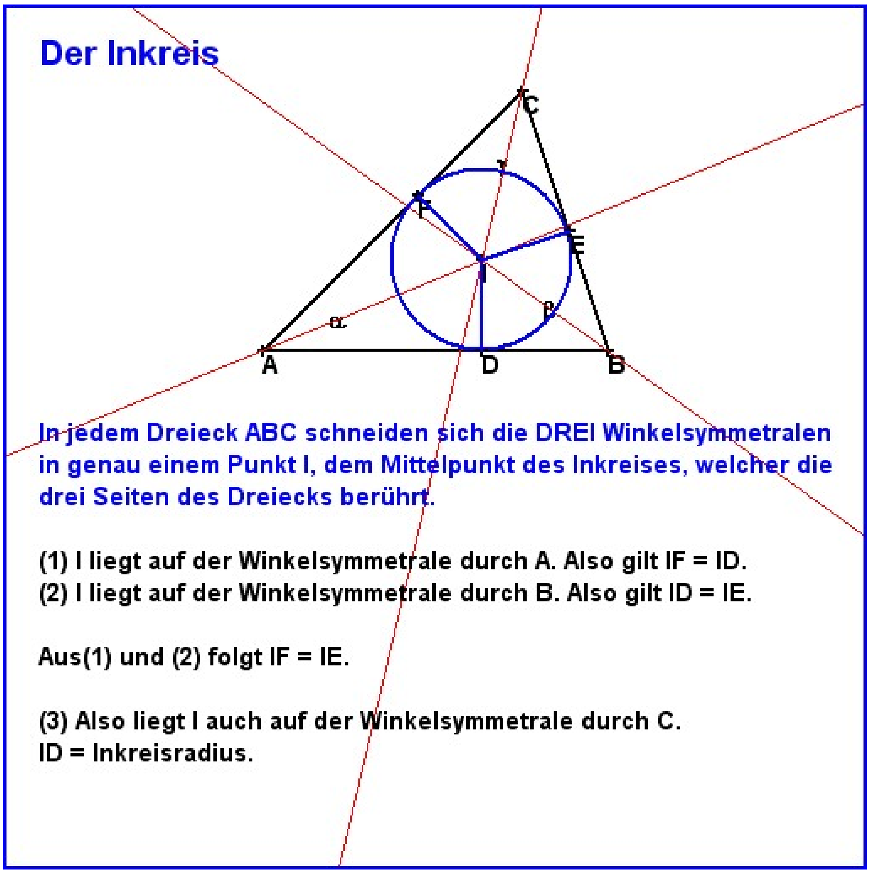
Der Schwerpunkt

Die drei Schwerlinien des Dreiecks schneiden einander in genau einem Punkt (Schwerpunkt S). Eine Schwerlinie ist die Strecke vom Eckpunkt zum Halbierungspunkt der gegenüberliegenden Seite.

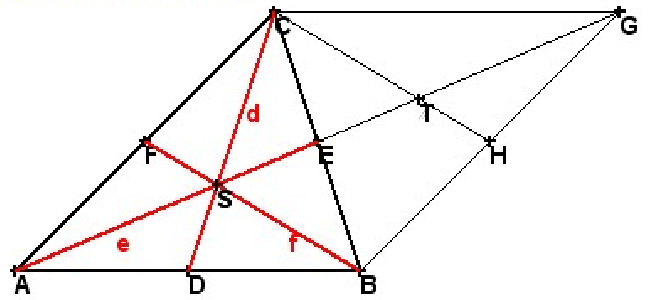
Der Höhenschnittpunkt

Die drei Höhen des Dreiecks schneiden einander in genau einem Punkt (Höhenschnittpunkt H). Unter einer Höhe versteht man das Lot von einem Eckpunkt auf die gegenüberliegende Seite.


Der Umkreis
C
F
E
U
A
D
B
In jedem Dreieck ABC schneiden sich die DREI Seitensymmetralen in genau einem Punkt U, dem Mittelpunkt des Umkreises, der durch die drei Eckpunkte des Dreiecks verläuft.
(1) U liegt auf der Streckensymmetrale von AB. Also gilt UA = UB.
(2) U liegt auf der Streckensymmetrale von BC. Also gilt UB = UC.
Aus(1) und (2) folgt UA = UC.
(3) Also liegt U auch auf der Streckensymmetrale von AC.
UA = Umkreisradius.


Der Inkreis
C
γ
F
E
I
α
β
A
D
B
In jedem Dreieck ABC schneiden sich die DREI Winkelsymmetralen in genau einem Punkt I, dem Mittelpunkt des Inkreises, welcher die drei Seiten des Dreiecks berührt.
(1) I liegt auf der Winkelsymmetrale durch A. Also gilt IF = ID.
(2) I liegt auf der Winkelsymmetrale durch B. Also gilt ID = IE.
Aus(1) und (2) folgt IF = IE.
(3) Also liegt I auch auf der Winkelsymmetrale durch C.
ID = Inkreisradius.

Der Schwerpunkt



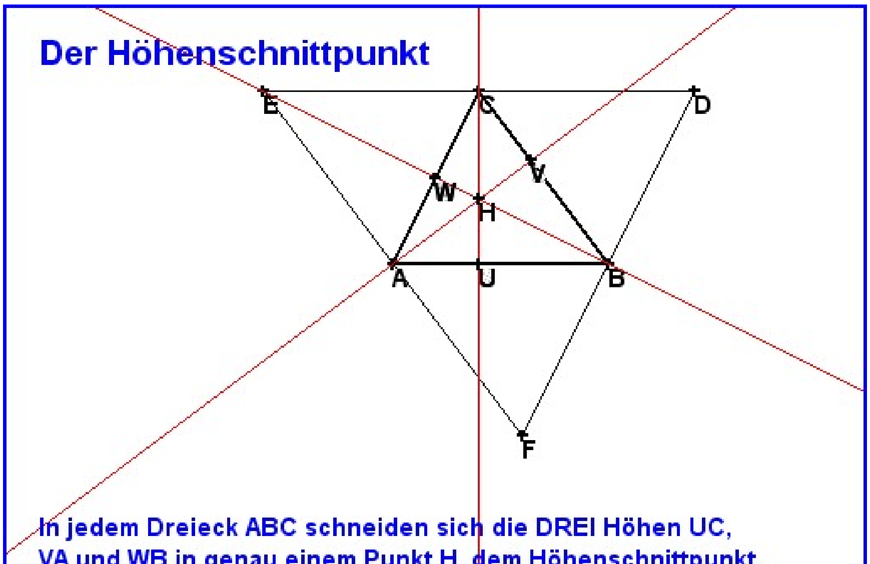
In jedem Dreieck ABC schneiden sich die DREI Schwerlinien DC, EA und FB in genau einem Punkt S, dem Schwerpunkt.

(1) Das Dreieck ABC wird zum Parallelogramm ABGC ergänzt.

(2) Die beiden Strecken AC und AG werden von den parallelen Strecken BF und HC geschnitten. Daher kann der STRAHLENSATZ angewendet werden: AS : AT = AF : AC = 1 : 2 und AS = ST = TG.
Es gilt: 3*AS = AG = 2*AE, also AS = 2/3*AE, also AS : SE = 2 : 1.
Der Schwerpunkt S teilt die Schwerlinie AE im Verhältnis 2 : 1.

(3) Diese Überlegung gilt für alle drei Schwerlinien. Daher muss der Schwerpunkt S auf allen drei Schwerlinien liegen !

Der Höhenschnittpunkt



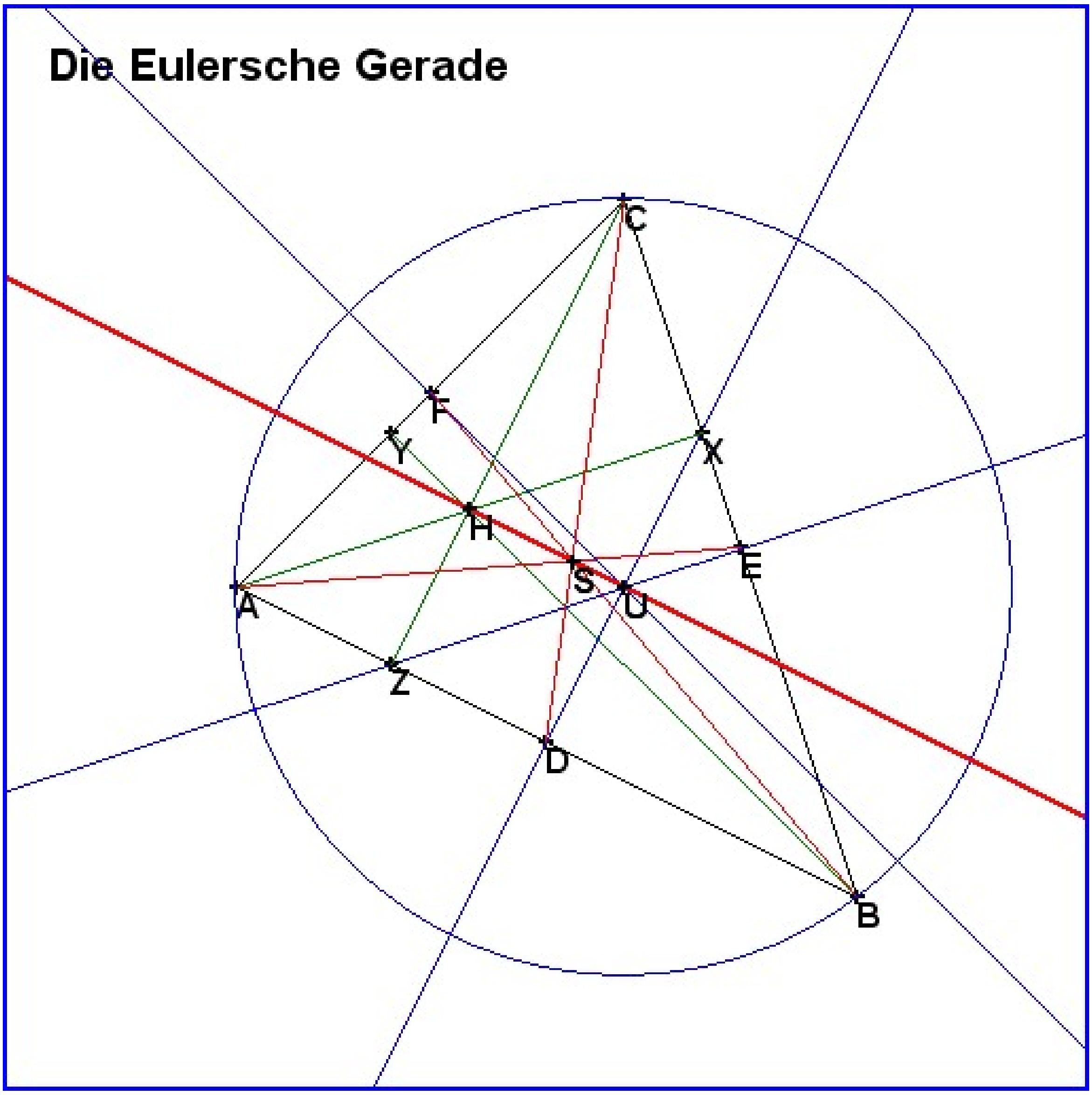
In jedem Dreieck ABC schneiden sich die DREI Höhen UC, VA und WB in genau einem Punkt H, dem Höhenschnittpunkt.

(1) Das Dreieck ABC wird durch Anfügen von drei kongruenten Dreiecken zum großen Dreieck DEF ergänzt.

(2) Die drei Höhen des Dreiecks ABC sind die Seitensymmetralen des großen Dreiecks DEF. Ihr Schnittpunkt ist somit auch der Schnittpunkt H der drei Höhen.

Die Eulersche Gerade. Umkreismittelpunkt U, Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S des Dreiecks liegen auf einer Geraden. Es ist SH = 2*SU.

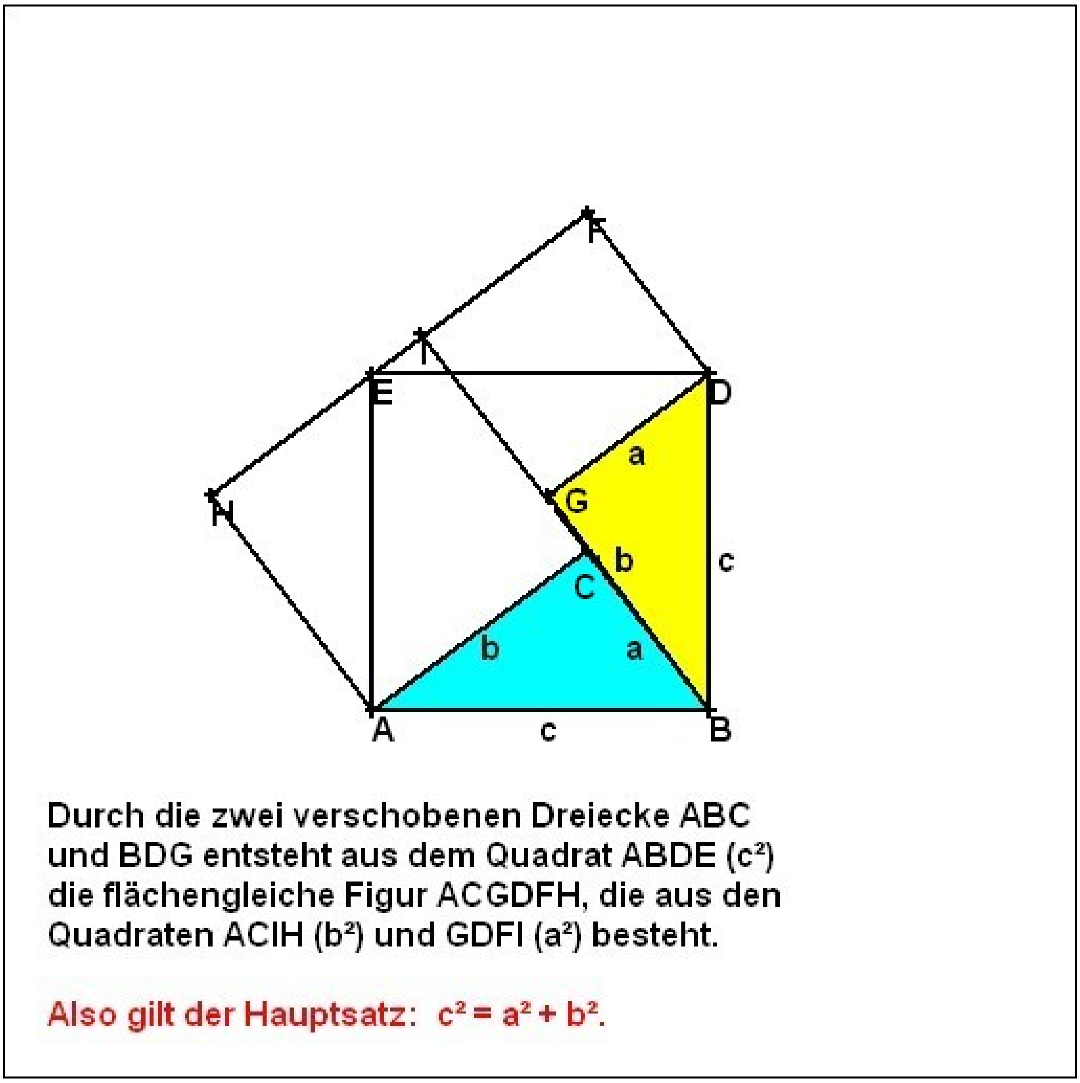
Beweis des Satzes: Durch eine Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor k = -1/2 wird Dreieck ABC auf das Mittendreieck DEF abgebildet. Weil nun die Seitensymmetralen von ABC zu den Höhen von DEF werden, ist der Bildpunkt des Höhenschnittpunktes H von ABC auch der Umkreismittelpunkt U. So liegen H und U auf einem Strahl durch S und SH = 2*SU.



Der Lehrsatz von PYTHAGORAS

Im rechtwinkeligen Dreieck ABC heißt die Seite c, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypotenuse. Die zwei anderen Seiten nennt man die Katheten a und b. In jedem rechtwinkeligen Dreieck gilt nun $c^2 = a^2 + b^2$.

Zum Beweis dieses Lehrsatzes errichtet man über der Seite c des Dreiecks ABC ein Quadrat ABDE und verschiebt die beiden kongruenten Dreiecke ABC und BDG auf die Dreiecke EDF und AEH. Dadurch entsteht die Figur ACGDFH, die zum Quadrat ABDE (c^2) flächengleich ist, und die aus den beiden Quadraten ACIH (a^2) und GDFI (b^2) besteht. Also gilt $c^2 = a^2 + b^2$.



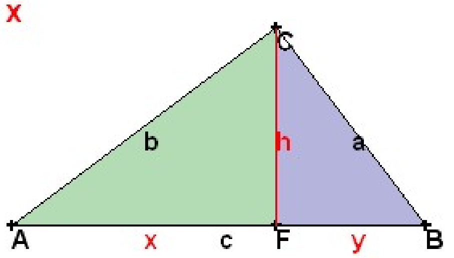
Im rechtwinkeligen Dreieck gelten noch zwei andere interessante Lehrsätze, nämlich der Kathetensatz und der Höhensatz.

Kathetensatz und Höhensatz

Der Kathetensatz

$a^2 = c * y$

$b^2 = c * x$



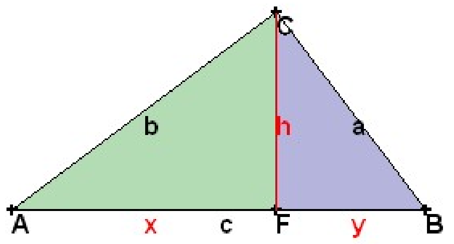
Weil das Dreieck ABC ähnlich zum Dreieck CBF ist, müssen in beiden Dreiecken die entsprechenden Seitenverhältnisse gleich groß sein, d.h. AB : BC = BC : FB, also $c : a = a : y$. Durch eine einfache Umformung erhält man: $a^2 = c * y$ (Erster Kathetensatz).

Führt man den selben Beweis mit den Dreiecken ABC und ACF durch, erhält man die Formel $b^2 = c * x$ (Zweiter Kathetensatz).

Die beiden Strecken x und y heißen Hypotenusenabschnitte.

Der Höhensatz

$h^2 = x * y$

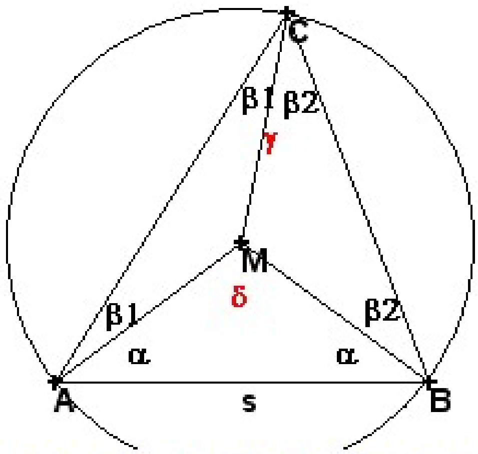


Wenn man die beiden Teildreiecke ACF und CBF genauer betrachtet, wird man erkennen, dass auch diese Dreiecke ähnlich sind, weil die entsprechenden Winkel gleich groß sind. Also müssen auch die entsprechenden Seitenverhältnisse in beiden Dreiecken gleich groß sein: FC : AF = BF : FC oder $h : x = y : h$. Durch einfache Umformung erhält man daraus

die Formel $h^2 = x * y$ (Höhensatz).

Der Randwinkel-Satz. Dieser besagt, dass eine gegebene Sehne eines Kreises von allen Punkten auf dem Kreis unter dem gleichen Sichtwinkel (Randwinkel γ) gesehen wird. Jeder Randwinkel ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel (δ).

Der Beweis des Lehrsatzes vom Randwinkel



Wir wollen nun zeigen, dass der Randwinkel bei Punkt C immer halb so groß ist, wie der fixe Zentriwinkel beim Kreismittelpunkt M.

Die Dreiecke ABM und ACM und BCM sind alle gleichschenkelig.
Im Dreieck ABM gilt:
$\delta + 2\alpha = 180°$, $\delta = 180° - 2\alpha$.

Im Dreieck ABC gilt:
$(\alpha+\beta1) + (\beta1+\beta2) + (\beta2+\alpha) = 180°$.
$2\alpha + 2(\beta1+\beta2) = 180°$.
$2\alpha + 2\gamma = 180°$.
$2\gamma = 180 - 2\alpha = \delta$.
$\gamma = \delta / 2$.

Ein Spezialfall (Satz von Thales) liegt dann vor, wenn der Zentriwinkel 180° ist. Dann wird die Sehne zum Durchmesser und der Randwinkel wird zu 90°. Also gilt, dass alle Winkel im Halbkreis rechte Winkel sind.

Die Randwinkel werden auch Peripheriewinkel genannt.

Die Flächenformel von HERON

Wenn von einem beliebigen Dreieck alle drei Seiten a, b und c gegeben sind, so kann man auch ohne Kenntnis einer Dreieckshöhe die Fläche F des Dreiecks berechnen.

$F^2 = s*(s-a)*(s-b)*(s-c)$ { F = Fläche des Dreiecks }
mit $s = U/2 = (a+b+c)/2$ { U = Umfang des Dreiecks }

Die folgenden Abbildungen zeigen den Beweis des Lehrsatzes.

Die Flächenformel von Heron

**In jedem Dreieck gilt für die Fläche $F^2 = s*(s-a)*(s-b)*(s-c)$.
Dabei ist s der halbe Umfang: $s = (a+b+c)/2$.
Dadurch wird die Dreiecksfläche nur aus den Seiten berechnet.**

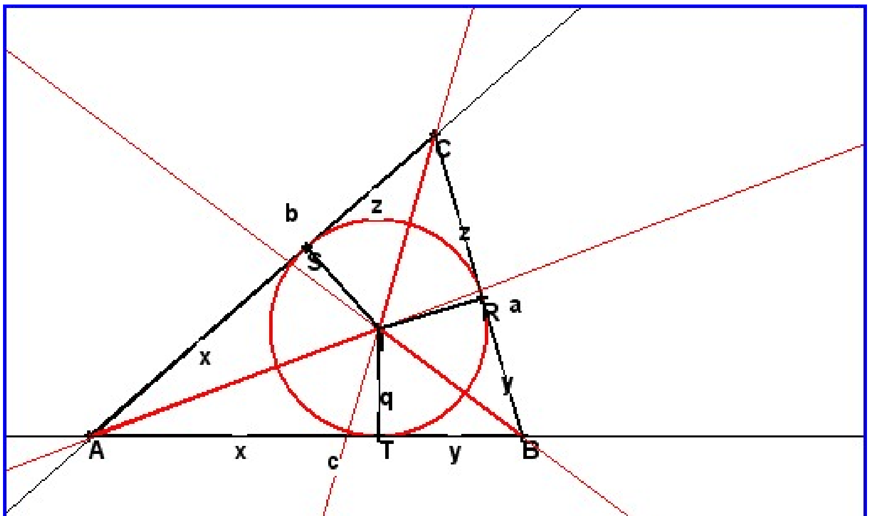
Zum Beweis sind drei augenscheinliche geometrische Sachverhalte und drei einfache Hilfssätze notwendig.

Sachverhalt 1: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkel übereinstimmen. Dann sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich (wegen Strahlensatz).

Sachverhalt 2: Die beiden Tangentenstrecken von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang und jede Tangente steht im Berührpunkt normal auf den Kreisradius (wegen Sekantensatz).

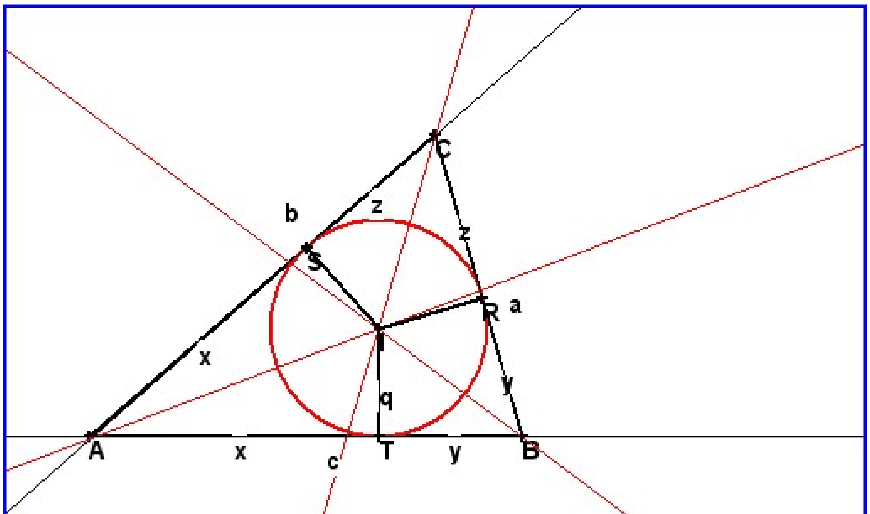
Sachverhalt 3: Im Dreieck stehen die Winkelsymmetralen eines Winkels und des angrenzenden Außenwinkels aufeinander normal (wegen Winkelsumme im Dreieck).

Diese drei Sachverhalte werden als bekannt vorausgesetzt. Die drei zusätzlichen Hilfssätze werden schrittweise bewiesen und dann zum Gesamtbeweis der Flächenformel verwendet.



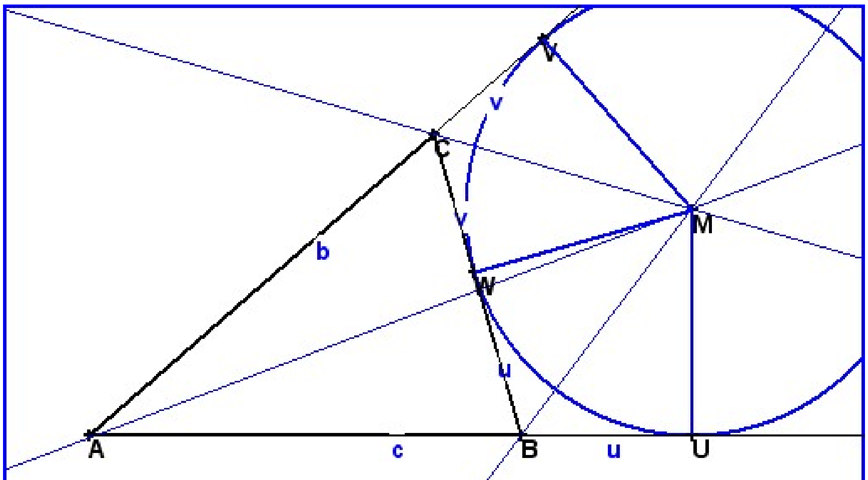
Hilfssatz 1: In jedem Dreieck gilt für die Fläche: F = q*s.
Dabei ist q der Inkreisradius und s der halbe Umfang.

Beweis: F(ABC) = F(AIB) + F(BIC) + F(CIA) = c*q/2 + a*q/2 + b*q/2.
Also gilt F = F(ABC) = q*(a+b+c)/2 = q*s.



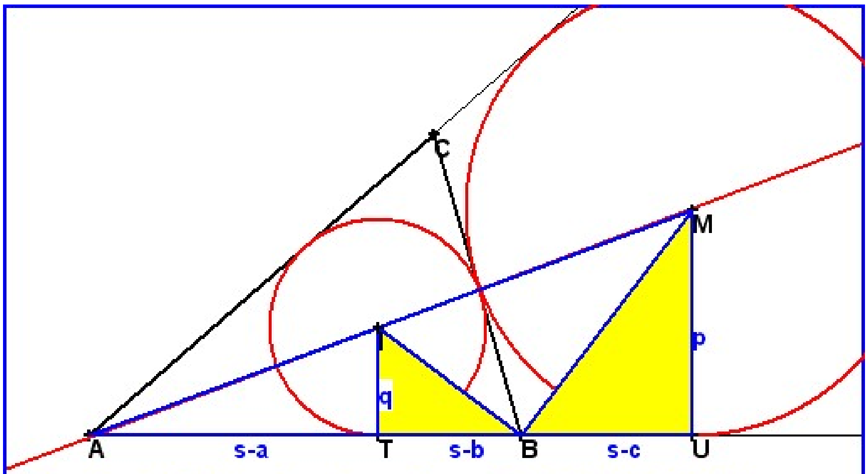
Hilfssatz 2: In jedem Dreieck gilt für die Strecken zwischen den Eckpunkten A,B,C und den Berührpunkten des Inkreisradius R,S,T:
x = s - a, y = s - b, z = s - c mit s als halben Umfang.

Beweis: 2*x + 2*y + 2*z = (a+b+c), wegen Sachverhalt 2.
Also gilt x + y + z = s und x = s - (y + z) = s - a.
Also gilt x = s - a. Analoges gilt für die anderen Streckenabschnitte.



Hilfssatz 3: In jedem Dreieck gilt für die Strecke AU zwischen dem Eckpunkt A und dem Berührpunkt U des Ankreises: AU = s.

Beweis: AU = AV, wegen Sachverhalt 2.
Also ist c + u = b + v und außerdem u + v = a.
Also gilt 2*AU = (c + u) + (b + v) = (u + v) + b + c = a + b + c.
Also ist AU = (a+b+c)/2 = s und BU = u = (s - c).



Beweis der Flächenformel von Heron: F² = s*(s-a)*(s-b)*(s-c).

(I) Die Dreiecke ATI und AUM sind ähnlich, weil Winkel gleich sind.
Also gilt AT : TI = AU : UM, d.h. (s-a):q = s:p, also q*s = p*(s-a).
(II) Die Dreiecke BTI und UMB sind ähnlich, wegen Sachverhalt 3.
Also gilt BT : TI = MU : UB, d.h. (s-b):q = p:(s-c), also p = (s-b)*(s-c)/q.

Ankreisradius p von (II) in (I) einsetzen: q*s = (s-a)*(s-b)*(s-c)/q.
Die Gleichung mit (q*s) multiplizieren: (q*s)² = s*(s-a)*(s-b)*(s-c).
Wegen Hilfssatz 1 gilt F = q*s, also F² = s*(s-a)*(s-b)*(s-c).

Umkreisradius und Inkreisradius

Die Berechnung von Umkreisradius r und Inkreisradius q eines Dreiecks nur mit Hilfe der drei Seiten a, b, c ist möglich.

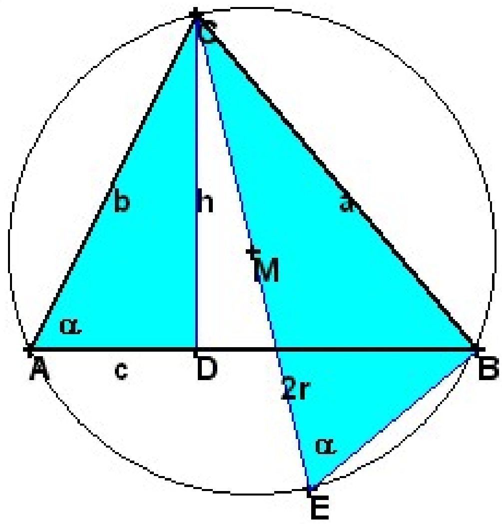
Der Randwinkel-Satz kann verwendet werden, um den Umkreisradius r von beliebigen Dreiecken zu berechnen. $r = (a*b*c) / (4*F)$.

Auch der Inkreisradius q kann berechnet werden. $q = (2*F) / (a+b+c)$.

Zur Flächenberechnung wird die Formel von Heron verwendet.
$F^2 = s*(s-a)*(s-b)*(s-c)$ mit $s = (a+b+c)/2$.

Umkreis- und Inkreisradius des Dreiecks

I. Der Umkreisradius



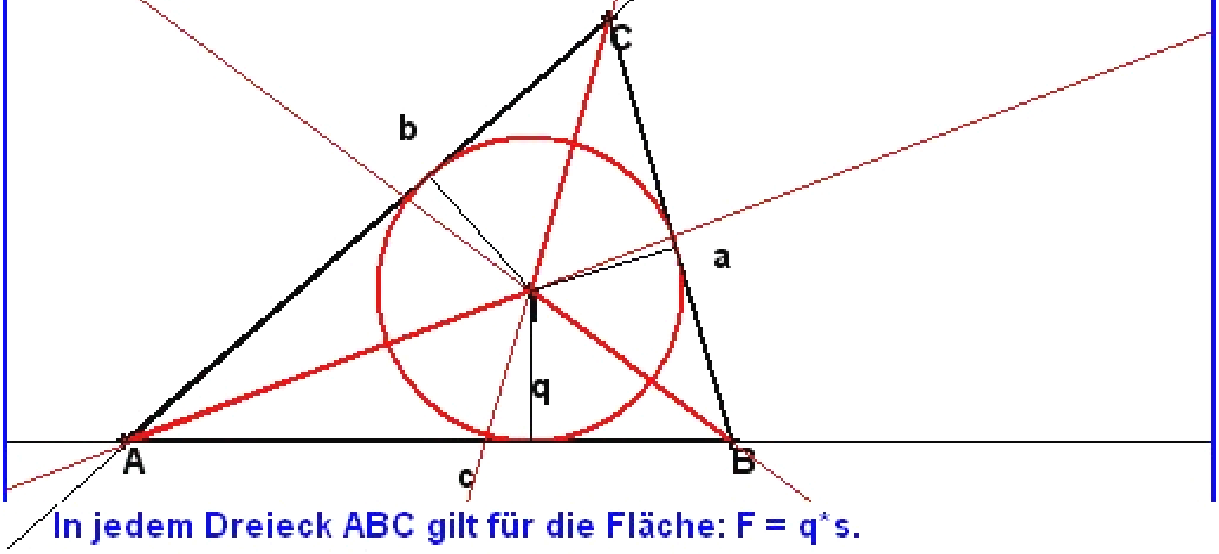
(1) Die Seite BC = a erscheint von den Punkten A und E unter dem gleichen Randwinkel. Dreieck ECB ist rechtwinkelig (Thalessatz).

(2) Die Dreiecke ECB und ACD sind ähnlich, weil sie in zwei Winkel übereinstimmen. Also gilt $(2*r) : a = b : h$, also $r = a*b/(2*h)$.

(3) Aus der Dreiecksfläche $F = c*h/2$ folgt $h = 2*F/c$. Einsetzen von h liefert eine Formel für den Umkreisradius: $r = (a*b*c)/(4*F)$.

Umkreis- und Inkreisradius des Dreiecks

II. Der Inkreisradius



In jedem Dreieck ABC gilt für die Fläche: F = q*s.
Dabei ist q der Inkreisradius und s der halbe Umfang U.

Beweis: F(ABC) = F(AIB) + F(BIC) + F(CIA) = c*q/2 + a*q/2 + b*q/2.
Also gilt F = F(ABC) = q*(a+b+c)/2 = q*s, d.h. q = F/s = 2*F/U.

So lassen sich Inkreisradius q und Umkreisradius r nur aus den Seiten eines Dreiecks berechnen: q = 2*F/U und r = (a*b*c)/(4*F).

Die Fläche wird berechnet mittels F^2 = s*(s-a)*(s-b)*(s-c).
Dabei ist s = U/2 = (a+b+c)/2. (Flächenformel von Heron).

Die Verkettung von Schiebungen

Die Verkettung von Schiebungen

Zum Abschluss wollen wir uns noch mit der Verkettung von zwei Schiebungen (Vektoren) befassen. Es wird der Fuß des zweiten Schiebepfeils an den Kopf des ersten Schiebepfeils gesetzt.

Merkregel: "Fuß an Kopf".

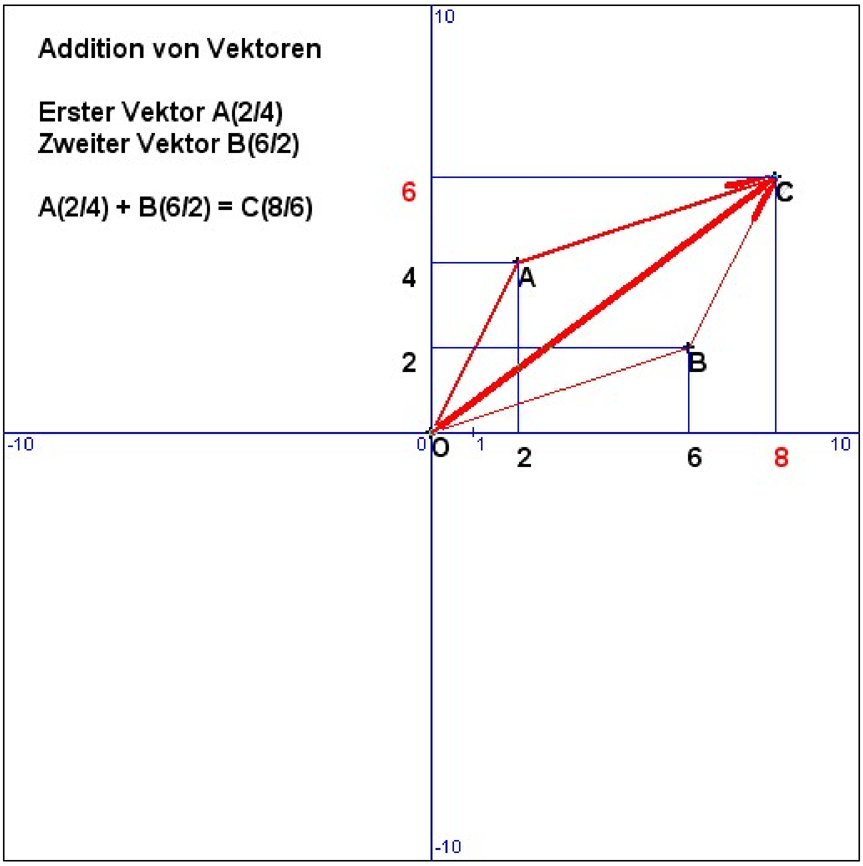
Führt man zwei Schiebungen U und V derart hintereinander aus, dann erhält man wieder eine neue Schiebung W.

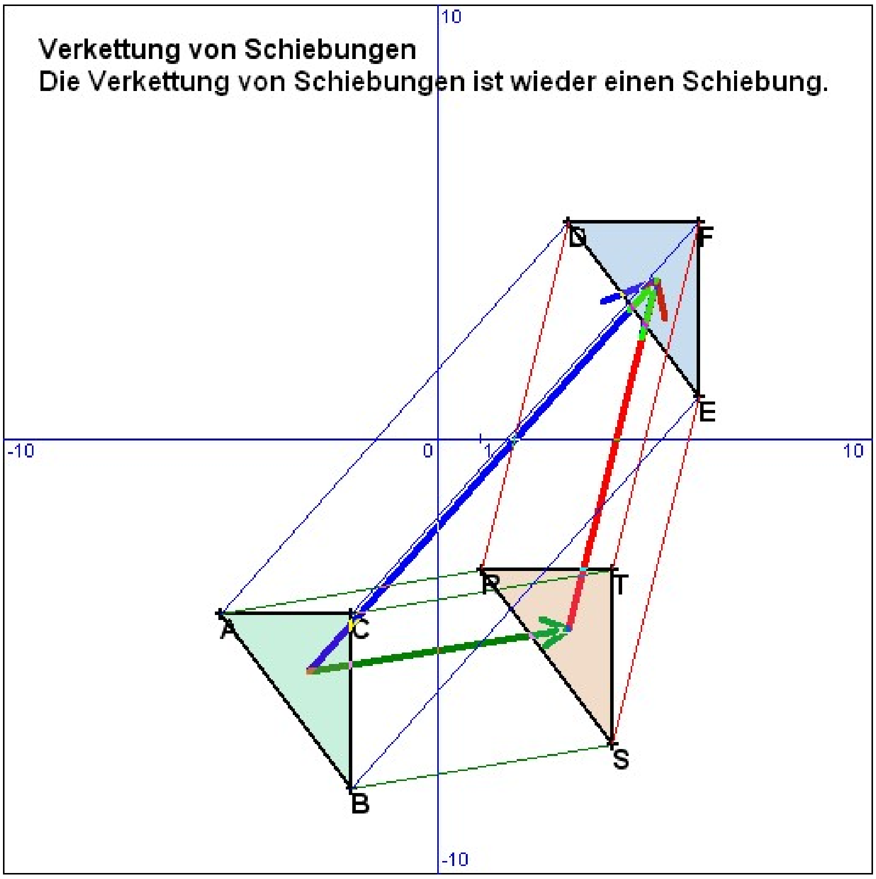
Die Koordinaten des neuen Vektors W(xW/yW) erhält man durch Addition der Koordinaten der Vektoren U(xU/yU) und V(xV/yV).

xW = xU + xV
yW = yU + yV

Mit den Vektoren schreibt man dann einfach W = U + V und nennt dies eine Vektoraddition.

Die folgende Grafik soll diesen Sachverhalt darstellen.


Addition von Vektoren
Erster Vektor A(2/4)
Zweiter Vektor B(6/2)
A(2/4) + B(6/2) = C(8/6)
10
6
4
2
-10
0
O
1
2
6
8
10
-10
A
B
C


Verkettung von Schiebungen
Die Verkettung von Schiebungen ist wieder einen Schiebung.
10
-10
0
1
10
-10
D
F
E
R
T
S
A
C
B

Geometrische Axiomensysteme

Die vorgestellten geometrischen Lehrsätze bauen auf den Grundlagen der Abbildungsgeomtrie auf. Wie aber ist der Mensch auf die Begriffe "Spiegelung" oder "Drehung" gekommen ?

Zunächst sind das operative Begriffe, welche aus der Anschauung stammen. In der Geschichte der Mathematik wurde nun versucht, diese Begriffe und ihre Beziehungen mit so genannten Axiomen zu beschreiben. Axiome sind für wahr gehaltene, nicht beweisbare Grundgesetze.

Diese Axiome ihrerseits verwenden elementare Begriffe, wie "Punkt", "Gerade" oder "Zwischenlage", welche nicht weiter definiert werden, d.h. nicht wieder auf andere Begriffe zurückgeführt werden können. Sie sind intuitiv verständlich (evident, augenscheinlich).

Aus diesen evidenten Grundbegriffen und möglichst wenigen widerspruchsfreien Axiomen soll dann möglichst vollständig das gesamte Gebäude der elementaren Geometrie nur mit Hilfe der menschlichen Logik errichtet werden.

Die ersten Versuche einer Axiomatisierung der Geometrie stammen von dem griechischen Mathematiker Euklid (300 v. Chr.). Mehr als 2000 Jahre später zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts war es dann der deutsche Mathematiker David Hilbert, der ein vollständiges Axiomensystem der Geometrie entwickelte. Während Hilbert sein System auf dem "Kongruenzbegriff" aufbaut, erschufen ca. 50 Jahre später die deutschen Mathematiker F. Bachmann und H. Lenz ein Axiomensystem, dass vom "Bewegungsbegriff" ausgeht.

Zunächst werden im System zwei Arten von Axiomen unterschieden: Bewegungs- und Anordnungsaxiome. Im Folgenden sollen einige Beispiele aus dem System von Bachmann/Lenz angeführt werden:

Definition 1: Die Ebene ist eine nicht leere Menge, deren Elemente Punkte heißen. Gewisse umkehrbare Abbildungen der Ebene auf sich heißen Bewegungen.

Definition 2: Eine Spiegelung ist eine nicht identische Abbildung mit mindestens zwei Fixpunkten.

Definition 3: Eine Drehung ist entweder die identische Abbildung oder eine Abbildung mit genau einem Fixpunkt.

Axiom B1: Zu zwei Punkten gibt es genau eine Spiegelung, für welche die beiden Punkte Fixpunkte sind.
Axiom B2: Die Verkettung zweier Spiegelungen ist keine Spiegelung.

Definition 4: Zwei Geraden a, b heißen orthogonal, wenn sie die Achsen von zwei Spiegelungen s_a, s_b sind, deren Verkettung vertauschbar ist, d.h. $s_a * s_b = s_b * s_a$.

Axiom I1: Durch zwei Punkte in der Ebene geht genau eine Gerade.
Axiom I2: Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für drei Punkte A,B,C auf einer Geraden ist eine "Zwischenlage" durch bestimmte Axiome definiert, beispielsweise:

Axiom A1: Sind A und B zwei verschiedene Punkte, dann gibt es immer einen Punkt C, der zwischen A und B liegt.
Axiom A2: Liegt C zwischen A und B, so liegt B nicht zwischen A und C.

Folgerung: Eine Gerade hat keine Löcher.

Aus den hier nur auszugsweise angeführten Axiomen wird die sogenannte absolute Geometrie entwickelt. Damit ist ein wichtiger Abschluss erreicht.

Schon der griechische Mathematiker Euklid hat ein Axiom aufgestellt, das bisher nicht erwähnt worden ist. Es handelt sich dabei um das berühmte Parallelenaxiom, auch Euklidisches Axiom genannt:

Axiom E: Zu einer Geraden g in der Ebene und zu einem Punkt P, der nicht auf der Geraden g liegt, gibt es genau eine Gerade h, welche durch Punkt P geht und die Gerade g nicht schneidet.

Die absolute Geometrie und das zusätzliche Axiom E bilden dann die euklidische Geometrie. Das ist genau jene Geometrie, an die sich unsere Anschauung und unser Denken traditionellerweise gewöhnt hat. Das ist auch jene Geometrie, die an unseren Schulen gelehrt wird.

Aber betrachten wir doch unseren Sehraum: Zwei nebeneinander liegende Eisenbahnschienen, die uns in der Nähe parallel erscheinen, verschmelzen in der Ferne zu einem Punkt. Oder betrachten wir unseren Tastraum: Wenn wir einen nur wenig geöffneten Zirkel über unsere Haut bewegen, dann gibt es Hautbereiche, wo wir keine getrennten Empfindungen erfahren. Unser Wahrnehmungsraum ist daher in Wirklichkeit nicht euklidisch, d.h. es gibt dort eigentlich keine parallelen Geraden.

Eine Geometrie, in welcher das Parallelenaxiom nicht gilt, wird demnach als nicht euklidische Geometrie bezeichnet. Ein praktisches Beispiel ist die Geometrie auf einer Kugeloberfläche, z.B. die sphärische Trigonometrie.

Eine letzte Bemerkung: Die Strecken- und Winkelmessung spielt in der Geometrie eine wesentliche Rolle. Jede Messung zerfällt in zwei Schritte: Erstens die Festlegung einer Maßeinheit und zweitens die Durchführung eines Verfahrens zur Ermittlung der einem Objekt zugeordneten Maßzahl, d.h. wie oft die Maßeinheit im entsprechenden Objektmerkmal enthalten ist.

Nun besteht zwischen Winkelmessung und Streckenmessung in unserer euklidischen Geometrie ein fundamentaler Unterschied. Die Maßeinheit der Winkelmessung kann logisch definiert werden: Beispielsweise ist ein Grad der 360-te Teil eines vollen Winkels, und ein voller Winkel wird durch eine Drehung beschrieben, welche die identische Abbildung ist.

Die Maßeinheit der Streckenmessung, beispielsweise ein Meter, kann durch keine Logik und Axiomatik definiert werden, sondern nur empirisch, d.h. nur unter Mithilfe der sinnlichen Wahrnehmung.

ENDE von MATHE 2