Herbert Paukert

Schulmathematik in 8 Bänden

Version 6.0, 2016

MATHE 3

Logik

Zahlenmengen

Algebra

MATHE, Band 1

Arithmetik - Unterstufe

MATHE, Band 2

Geometrie - Unterstufe

MATHE, Band 3

Logik
Zahlenmengen
Algebra

MATHE, Band 4

Differenzialrechnung

MATHE, Band 5

Integralrechnung

MATHE, Band 6

Matrizenrechnung
Statistik
Wahrscheinlichkeit

MATHE, Band 7

Trigonometrie

MATHE, Band 8

Analytische Geometrie
Kegelschnittslinien
Geometrische Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

Hinweis: In Dezimalzahlen wird anstelle eines Kommas ein Dezimalpunkt geschrieben.

Hinweis: Auf seiner Homepage ***www.paukert.at*** stellt der Autor viele weitere Lernhilfen aus unterschiedlichen Fachgebieten zur Verfügung.

Logik, Mengen und Zahlen

Logik und Mengenlehre

Logik und Mengenlehre bilden die Grundlagen der Mathematik.
Sie stellen jene Werkzeuge bereit, mit denen gearbeitet wird.
In diesem Kapitel soll nur ein kurzer Überblick gegeben werden.

Die Logik

Die Logik ist die Wissenschaft vom formal richtigen Denken.
In der *Junktorenlogik* werden Aussagen und ihre Verbindungen analysiert.
Die *Quantorenlogik* analysiert deren innere Struktur.

Eine Aussage (A) ist entweder wahr (w) oder falsch (f).
Die Aussagen werden mit Hilfe von Junktoren (nicht, und, oder,...)
zu Aussagenverbindungen zusammengefügt.

Die Bewertung der Aussagenverbindungen ist für die so genannten
Basis-Junktoren durch *Wahrheitstabellen* festgelegt.

```
       A:  f f w w
 nicht A:  w w f f    (Negation ¬ A)


       A:  f f w w
       B:  f w f w
 A und B:  f f f w    (Konjunktion A ∧ B)


       A:  f f w w
       B:  f w f w
A oder B:  f w w w    (Adjunktion A ∨ B)
                      (einschließendes oder)
```

Bei der *Negation* einer Aussage (nicht A, $\neg$ A) kehrt sich der Wahrheitswert um.

Eine *Konjunktion* (A und B, A $\wedge$ B) ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen zugleich wahr sind.

Die *Adjunktion* (A oder B, A $\vee$ B) ist nur dann wahr, wenn mindestens eine Aussage wahr ist.

Mit Hilfe dieser Basis-Junktoren werden alle weiteren komplexeren Verbindungen von Aussagen aufgebaut. Einige Beispiele sind:

```
                 A: f f w w
                 B: f w f w
entweder A oder B: f w w f   (Disjunktion, A × B)
                             (ausschließendes oder)

                 A: f f w w
                 B: f w f w
   weder A noch B: w f f f   (not or, A nor B)

                 A: f f w w
                 B: f w f w
    wenn A dann B: w w f w   (Implikation, A → B)
                             (Folgerung)

                 A: f f w w
                 B: f w f w
  A gleichwertig B: w f f w  (Äquivalenz, A ↔ B)
                             (Gleichwertigkeit,=)
```

Eine Aussagenverbindung heißt *Tautologie*,
wenn sie immer wahr ist, d.h. unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Einzelaussagen ist sie immer wahr. Tautologien sind daher die allgemein gültigen Spielregeln unseres Denkens.

Der Nachweis, ob eine Aussagenverbindung eine Tautologie ist, wird dadurch erbracht, dass für jede mögliche Belegung der Einzelaussagen mit wahr oder falsch mit Hilfe der Wahrheitstabellen der Wahrheitswert der Aussagenverbindung ermittelt wird.

Beispielsweise bedeutet $(A \times B) = (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$
eine gleichwertige Darstellung der Disjunktion.
Beweis der Richtigkeit von $(A \times B) = (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$**:**

Fall 1: $A = f, B = f$
$(A \times B) = f$
$(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B) = (f \vee f) \wedge \neg (f \wedge f) = (f \wedge \neg f) = (f \wedge w) = f$
also gilt $f = f$ **(w)**

Fall 2: $A = f, B = w$
$(A \times B) = w$
$(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B) = (f \vee w) \wedge \neg (f \wedge w) = (w \wedge \neg f) = (w \wedge w) = w$
also gilt $w = w$ **(w)**

Fall 3: $A = w, B = f$
$(A \times B) = w$
$(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B) = (w \vee f) \wedge \neg (w \wedge f) = (w \wedge \neg f) = (w \wedge w) = w$
also gilt $w = w$ **(w)**

Fall 4: $A = w, B = w$
$(A \times B) = f$
$(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B) = (w \vee w) \wedge \neg (w \wedge w) = (w \wedge \neg w) = (w \wedge f) = f$
also gilt $f = f$ **(w)**

Ergebnis: In allen vier Belegungsmöglichkeiten mit f oder w erweist sich die Gleichwertigkeit der beiden Aussagen als richtig.

Weitere wichtige *Tautologien*:

T01:	**Regel vom ausgeschlossenen Dritten:**	$(A \vee \neg A)$
T02:	**Regel vom zu vermeidenden Widerspruch:**	$\neg (A \wedge \neg A)$
T03:	**Regel von der doppelten Verneinung:**	$A = \neg (\neg A)$
T04:	**Deduktionsregel:**	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
T05:	**Kontrapositionsregel:**	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
T06:	**Regel vom Kettenschluss:**	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) = (A \rightarrow C)$
T07:	**Erste De Morgansche Äquivalenz:**	$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
T08:	**Zweite De Morgansche Äquivalenz:**	$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
T09:	**Äquivalenz und Implikation:**	$(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
T10:	**Äquivalenz und Disjunktion:**	$(A \leftrightarrow B) = \neg (A \times B)$

Damit sei der Exkurs in die *Junktorenlogik* abgeschlossen.

Die *Quantorenlogik* befasst sich mit der inneren Struktur der Aussagen, welche in einer Zuordnung eines Prädikates P zu einem Subjekt x besteht. Diese Zuordnung P(x) wird mit Hilfe von Quantoren (alle, einige, keine, nicht alle) näher bestimmt.

Die Wahrheit der *All-Aussage* "Alle Menschen sind sterblich" ist dann gegeben, wenn das Prädikat P (sterblich) auf alle Individuen x einer Grundmenge $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ zutrifft, d.h. es gilt die mehrgliedrige Konjunktion: $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \;....\; \wedge\; P(x_N)$.

Die *Existenz-Aussage* "Einige Menschen sind ehrlich" ist dann wahr, wenn das Prädikat P (ehrlich) auf mindestens ein Element x einer Grundmenge $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ zutrifft, d.h. es gilt die mehrgliedrige Adjunktion: $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \;....\; \vee P(x_N)$.

Eine quantorenlogische Aussage heißt dann allgemein gültig, wenn sie in allen Individuenbereichen wahr ist. Zum Nachweis einer solchen Allgemeingültigkeit genügen die einfachen Wahrheitstabellen der Junktorenlogik offensichtlich nicht, denn wie sollte die Wahrheit einer Aussage in einer beispielsweise unendlich großen Menge für jedes einzelne Individuum überprüft werden?

Man behilft sich nun damit, dass man bestimmte, offenkundig einsichtige (evidente) Aussagen als allgemein gültige Grundgesetze (Axiome) voraussetzt. Aus diesen kann man dann weitere Aussagen ableiten.

Vier quantorenlogische Aussagen werden oft als solche Axiome genommen:

(A01)	**für alle x gilt P(x)**	**=**	**für kein x gilt $\neg$ P(x)**
(A02)	**für einige x gilt P(x)**	**=**	**für nicht alle x gilt $\neg$ P(x)**
(A03)	**für alle x gilt $\neg$ P(x)**	**=**	**für kein x gilt P(x)**
(A04)	**für einige x gilt $\neg$ P(x)**	**=**	**für nicht alle x gilt P(x)**

Dabei handelt es sich um allgemein und teilweise bejahende, so wie um allgemein und teilweise verneinende Urteile.

Der Allquantor wird mit $\forall$ bezeichnet, der Existenzquantor mit $\exists$. Damit können die vier Axiome A01, A02, A03, A04 folgendermaßen symbolisiert werden. Das Symbol F(x) bezeichnet eine Attribution, d.h. eine Begriffszuordnung einer Eigenschaft F zu einem Individuum x.

(A01)	$\forall x: F(x)$	$\leftrightarrow$	$\neg(\exists x: \neg F(x))$	**(alle = keines nicht)**
(A02)	$\forall x: \neg F(x)$	$\leftrightarrow$	$\neg(\exists x: F(x))$	**(alle nicht = keines)**
(A03)	$\neg(\forall x: F(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x: \neg F(x)$	**(nicht alle = mindestens eines nicht)**
(A04)	$\neg(\forall x: \neg F(x))$	$\leftrightarrow$	$\exists x: F(x)$	**(nicht alle nicht = mindestens eines)**

Nach Aristoteles werden bei der Begriffszuordnung in einer Aussage zwei Kategorien benötigt, die Qualität und die Quantität. Der Qualität nach gibt es affirmative (bejahende) und negative (verneinende) Urteile. Der Quantität nach gibt es universelle (allgemeine) und partikuläre (teilweise) Urteile.

Entsprechend ihrer Qualität und Quantität werden vier Urteilsformen (Modi) unterschieden, welche durch die Vokale a, i, e und o gekennzeichnet sind. Diese sind der jeweils erste und zweite Vokal der Worte *affirmo* (ich bejahe) und *nego* (ich verneine). Zur Illustration werden für jeden Modus Beispiele angegeben, und dann werden diese in der Mengenlehre und in der Quantorenlogik formalisiert. „S" symbolisiert den Subjektsbegriff und „P" das Prädikat.

(1)	**allgemein bejahend (a):**	***Alle Schüler [S] sind fleißig [P].***
(2)	**teilweise bejahend (i):**	***Einige Schüler [S] sind fleißig [P].***
(3)	**allgemein verneinend (e):**	***Alle Schüler [S] sind nicht fleißig [P];***
		bzw. Kein Schüler [S] ist fleißig [P].
(4)	**teilweise verneinend (o):**	***Einige Schüler [S] sind nicht fleißig [P];***
		bzw. Nicht alle Schüler [S] sind fleißig [P].

Die Attribution S(x) bedeutet dabei, dass x ein Element einer Menge S ist ($x \in S$). Übersetzt man diese Aussagenstruktur in die Sprache der elementaren Mengenlehre, dann entsprechen die Begriffsumfänge den Mengen, und die Urteilsmodi kennzeichnen die Beziehungen, die zwischen den einzelnen Mengen bestehen. Wichtige Mengenoperationen:

$\in$ = Element von, $\subset$ = eine Teilmenge von,
{ } = leere Menge, $\cap$ = Durchschnitt, $\cup$ = Vereinigung,
P´ = Komplementärmenge, Q \ R = Differenzmenge.

(1)	**allgemein bejahend (a):**	**S a P,**	$(S \subset P)$,	$\forall x: (S(x) \rightarrow P(x))$
(2)	**teilweise bejahend (i):**	**S i P,**	$(S \cap P) \neq \{\}$,	$\exists x: (S(x) \wedge P(x))$
(3)	**allgemein verneinend (e):**	**S e P,**	$(S \subset P')$,	$\forall x: (S(x) \rightarrow P'(x))$
(4)	**teilweise verneinend (o):**	**S o P,**	$(S \cap P') \neq \{\}$,	$\exists x: (S(x) \wedge P'(x))$

<u>Beispiel:</u> ***Nicht alle Sportler [S] leben gesund [P].***

(S o P)	**Klassische Logik**
$(S \cap P' \neq \{\})$	**Mengenlehre**
$\exists x: (S(x) \wedge P'(x))$	**Quantorenlogik**

An ein Axiomensystem der Quantorenlogik (Prädikatenkalkül) werden bestimmte Forderungen, wie Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit, Konsistenz, Entscheidbarkeit oder Vollständigkeit gestellt. Diese sollen hier nicht erörtert werden, hingegen aber ein kurzer Überblick über die Mengenlehre.

Die Mengenlehre

Eine Menge ist die Zusammenfassung von Elementen zu einer Ganzheit, wo alle Elemente der Menge ein bestimmtes Merkmal (Eigenschaft, Prädikat P) aufweisen. Man schreibt: Menge $A = \{ x \mid P(x) \}$. Das sind alle Elemente x, für die das Prädikat P gilt.

Der Elementoperator $\in$ gibt an, ob ein Element x in der Menge A liegt ($x \in A$) oder nicht ($x \notin A$).

Mengen A, B, C, ... werden durch sprachliche Aussagen definiert. Mit Hilfe von Aussagenverbindungen können dann auch zusammengesetzte Mengen gebildet und allgemein gültige Regeln hergeleitet werden. Folgende wichtige Mengenoperationen werden verwendet:

Mit {} wird die *leere Menge* bezeichnet.

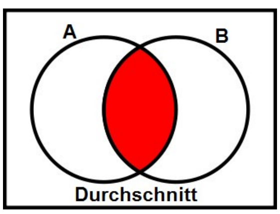
Eine Menge A ist eine *Teilmenge* einer Menge B, wenn alle Elemente von A auch in B liegen ($A \subset B$), d.h. $\forall x: ((x \in A) \rightarrow (x \in B))$.

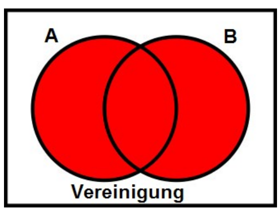
Die *Komplementärmenge* A´ zur Menge A besteht aus jenen Elementen, welche zwar in einer Grundmenge G, aber nicht in A liegen, d.h. $A' = \{ x \mid (x \in G) \wedge (x \notin A) \}$.

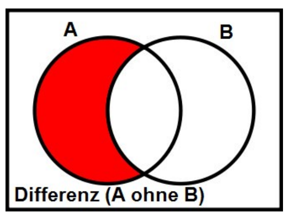
Der *Durchschnitt* zweier Mengen ($A \cap B$) besteht aus jenen Elementen, die in A und in B liegen, d.h. $(A \cap B) = \{ x \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$.

Die *Vereinigung* zweier Mengen ($A \cup B$) besteht aus Jenen Elementen, die in A oder in B liegen, d.h. $(A \cup B) = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$.

Jene Elemente einer Grundmenge G, welche zwar in A, aber nicht in B liegen, bilden die *Differenzmenge* $(A \setminus B) = \{ x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$.







Die Elemente einer Menge können im aufzählenden Verfahren in einer Mengenklammer aufgeschrieben werden.

Sie können auch grafisch in einem Mengendiagramm dargestellt werden.

Ein Element x darf in einer Menge M nur einmal gezählt werden.
Die Anzahl der Elemente einer Menge A heißt Mächtigkeit n(A).

G = "Alle natürlichen Zahlen kleiner als 16"
G = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 }

A = "Alle geraden natürlichen Zahlen kleiner als 16"
A = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 }

B = "Alle durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen kleiner als 16"
B = { 3, 6, 9, 12, 15 }

Durschnitt $A \cap B$ = { 6, 12 }
Vereinigung $A \cup B$ = { 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 }
Komplement A´ = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 }
Differenz $A \setminus B$ = { 0, 2, 4, 8, 10, 14 }

Mit Hilfe der Logik und veranschaulicht durch grafische Diagramme können nun allgemein gültige Gesetze über die Verbindung von Mengen hergeleitet werden.

Die Operationen Durchschnitt ($\cap$) und Vereinigung ($\cup$) sind assoziativ, kommutativ und zueinander distributiv. Es gelten auch die „De Morganschen Äquivalenzen".

M01: $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$
M02: $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$

M03: $A \cap B = (B \cap A)$
M04: $A \cup B = (B \cup A)$

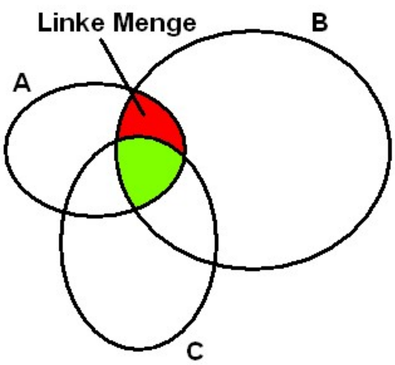
M05: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
M06: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

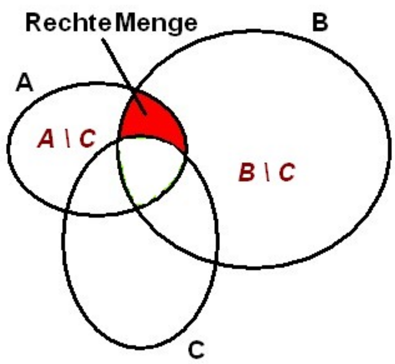
M07: $(A \cap B)' = A' \cup B'$
M08: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Für die Differenzmenge gilt:

M09: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
M10: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
M11: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
M12: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
M13: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
M14: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Beweis von Lehrsatz M11 mit Hilfe von Mengendiagrammen. Dabei wird zuerst die linke Menge $(A \cap B) \setminus C$ und dann die rechte Menge $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ gezeichnet und zuletzt die Gleichheit der beiden Mengen überprüft.





Die Potenzmenge

Die Potenzmenge P(G) ist die Menge aller Teilmengen von G.

Es sei G eine endliche Menge mit n Elementen.
Dann besteht die Potenzmenge aus der leeren Menge {},
aus allen einelementigen, zweielementigen Teilmengen, … …
und aus der Menge G selbst.
Insgesamt besteht die Potenzmenge P(G) aus 2^n Teilmengen.

Beispiel: G = { 1, 2, 3 }
P(G) = {}, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}
n(P(G)) = 2^3 = 8

Die Produktmenge

Die Produktmenge A × B zweier Mengen besteht aus allen geordneten Paaren (x, y), deren erstes Element x aus A und deren zweites Element y aus B ist.

Beispiel: A = { 1, 2, 3 } und B = { a, b }.
A × B = { (1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b) }
n(A) = 3, n(B) = 2, n(A × B) = 6.

Für die Mächtigkeiten der Mengen gilt: n(A × B) = n(A) * n(B).

Die Produktmenge wird grafisch im kartesischen Koordinatensystem in der Ebene als Punktmenge { P(x/y) } dargestellt.

Damit ist auch der kurze Exkurs in die Mengenlehre beendet.

Mathematische Beweisverfahren

In der Mathematik werden hauptsächlich drei Beweisverfahren verwendet: direkter Beweis, indirekter Beweis und vollständige Induktion. Diese sollen an einfachen Beispielen erklärt werden.

Der direkte Beweis

Er wird entsprechend der Deduktionsregel der Logik geführt. Die Aussage A soll bewiesen werden. Zuerst wird eine wahre Aussage B gesucht und dann daraus die Aussage A gefolgert.
Deduktionsregel: B und (B -> ... -> A) -> A.

Beispiel: Die binomische Quadratformel soll bewiesen werden:
A: $(x + y)^2 = x^2 + 2*x*y + y^2$

B: $(x + y)^2 = (x + y) * (x + y)$
C: $(x + y) * (x + y) = (x + y)*x + (x + y)*y = x^2 + 2*x*y + y^2$
A: $(x + y)^2 = x^2 + 2*x*y + y^2$

B und (B -> C -> A) -> A. Damit ist alles bewiesen.

Der indirekte Beweis

Wenn eine Aussage A nicht direkt bewiesen werden kann, dann verwendet man den indirekten Beweis.

Beim indirekten Beweis der Aussage A wird zunächst ihr logisches Gegenteil ¬ A als wahr angenommen. Dann wird aus dieser Annahme ein logischer Widerspruch (B und ¬ B) gefolgert. Um diesen Widerspruch zu vermeiden, muss somit die ursprüngliche Aussage A als wahr bewertet werden. Der indirekte Beweis ergibt sich aus der Kontrapositionsregel der Logik: (¬ A -> B) und (¬ B) -> A.

Beispiel A: Alle natürlichen Zahlen n größer als Eins besitzen Primfaktorenzerlegungen. Diese Aussage soll bewiesen werden.

¬ A: Nicht alle n besitzen Primfaktorenzerlegungen. Daraus folgt
B: Es gibt eine kleinste Zahl z ohne Primfaktorenzerlegung.

Daher gibt es einen Teiler t von z mit 1 < t < z. Also ist z = t * k. Weil z die kleinste Zahl ohne eine Primfaktorenzerlegung ist, müssen t und k Primfaktorenzerlegungen besitzen. Sie sind ja kleiner als z. Damit ist aber z ein Produkt von Primfaktoren.

¬ B: Die Zahl z besitzt eine Primfaktorenzerlegung.

(B und ¬ B) ist ein Widerspruch, also kann ¬ A nicht gelten, also muss A gelten.

Die vollständige Induktion

Eine Aussage A[n] soll für alle natürlichen Zahlen n >= k gelten.

1. Induktionsanfang: A[n] wird für n = k bewiesen.
2. Induktionsannahme: A[n] wird für n als gültig angenommen.
3. Induktionsschluss: Aus A[n] wird die Gültigkeit von A[n+1] logisch abgeleitet.

Wenn alle drei Beweisschritte erfüllt sind, dann muss A[n] für alle n >= k gelten, weil der Induktionsschluss beliebig fortgesetzt werden kann.

Beispiel: $A[n] = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n*(n+1)*(2n+1) / 6$

1: $n = 1$, $1*2*3 / 6 = 1 = 1^2$, Induktionsanfang bewiesen.
2: Annahme $A[n] = 1^2+2^2+ \ldots+n^2 = n*(n+1)*(2n+1)/6 = (2n^3+3n^2+n)/6$
3: Induktionsschluss von A[n] auf A[n+1]:

$A[n+1] = (1^2+2^2+ \ldots+n^2) + (n+1)^2 = (2n^3+3n^2+n)/6 + (n+1)^2$
$A[n+1] = (2n^3+3n^2+n)/6 + (6n^2+12n+6)/6 = (2n^3+9n^2+13n+6)/6$
$A[n+1] = (2n^3+9n^2+13n+6)/6 = (n+1)*(n+2)*(2n+3)/6$
$A[n+1] = (n+1)*(n+2)*(2n+3)/6 = (n+1)*((n+1)+1)*(2(n+1)+1)/6$

Damit ist A[n+1] aus A[n] abgeleitet und alles bewiesen.

Natürliche und ganze Zahlen

Die natürlichen Zahlen N = { 0,1,2,3, ... , n,n+1, ... } dienen in erster Linie zum Abzählen von Objekten oder Ereignissen. So werden Mächtigkeiten oder Häufigkeiten ermittelt. In zweiter Linie kann mit den natürlichen Zahlen auch gerechnet werden.

Die Menge der natürlichen Zahlen N ist unendlich und kann durch die fünf Axiome von Peano beschrieben werden, wobei im Mittelpunkt das Nachfolgerprinzip steht:

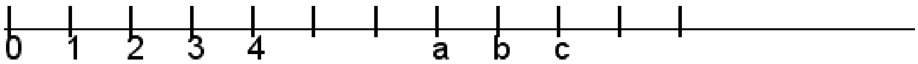
P1: 0 ist eine natürliche Zahl.
P2: Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger (n+1).
P3: Die Zahl 0 ist selbst kein Nachfolger.
P4: Sind ihre Nachfolger gleich, dann sind die Zahlen gleich.
P5: Besitzt eine Teilmenge T von N die beiden Eigenschaften
P1 und P2, dann gilt T = N (Induktionsprinzip).

Es seien A und B zwei disjunkte Mengen mit den Mächtigkeiten n(A) = a und n(B) = b, d.h. ihr Durchschnitt ist die leere Menge und ihre Element-Anzahlen sind a und b. Unter der Summe c = a + b versteht man die Mächtigkeit der Vereinigung von A und B. Unter dem Produkt d = a * b versteht man die Mächtigkeit der Produktmenge A × B. Damit sind die Rechenoperationen der Addition und Multiplikation definiert. Mit Hilfe der Mengenlehre werden dann die Rechengesetze bewiesen.

Wegen ihrer Definition mit Hilfe von Mengen sind Addition und Multiplikation assoziativ und kommutativ. Die Multiplikation ist distributiv zur Addition.

$a + (b + c) = (a + b) + c$, und $a + b = b + a$.
$a * (b * c) = (a * b) * c$, und $a * b = b * a$.
$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$.

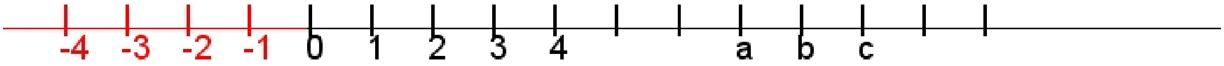
Ordnet man jeder natürlichen Zahlen n umkehrbar eindeutig einen Punkt P auf einer Geraden in der Zeichenebene zu, dann erhält man äquidistante Gitterpunkte auf einer Halbgeraden.



Die Zahlen sind jetzt in der Weise geordnet, dass $a < b$ ist, wenn a auf der Zahlengerade links von b liegt. So kann in der Menge N eine Ordnungsrelation eingeführt werden, die bestimmte Eigenschaften besitzt: Die Ordnung ist transitiv, d.h. wenn $(a < b)$ und $(b < c)$, dann $(a < c)$.

Betrachtet man nun die Gleichung $a + x = b$, so ist ersichtlich, dass es nur eine natürliche Zahl x als Lösung gibt, wenn $a <= b$. Wir erweitern nun die Menge N mit Objekten x, welche alle die Gleichung $a + x = 0$ erfüllen und nennen sie negative Zahlen $-a$.

Erweiterte Zahlengerade:



Die Lösungen x der Gleichung a + x = 0 sind neue Objekte, welche man negative Zahlen -1, -2, -3, -4, ..., -a, ... nennt und links vom Nullpunkt auf der Zahlengerade einzeichnet. Die negative Zahl -a heißt auch das inverse Element zur Zahl a, bzw. die Gegenzahl zur positiven Zahl a (bzw. +a).

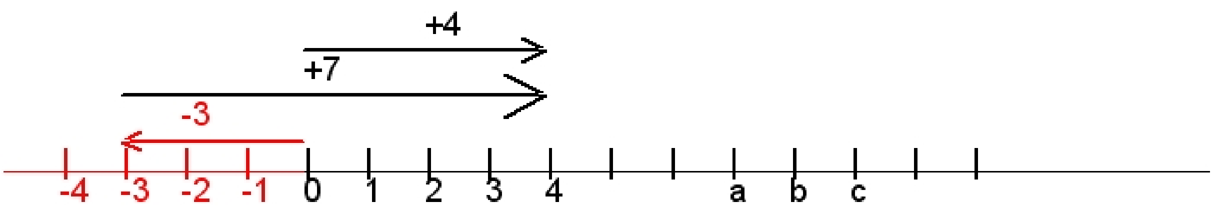
Vereinigt man nun diese negativen Zahlen mit der Menge der natürlichen Zahlen N, so erhält man die ganzen Zahlen Z.
Z = { . . ., -n, . . ., -2, -1, 0, 1, 2, . . ., n, . . . }

In der Menge Z ist nun jede Gleichung a + x = b lösbar und man kann die Subtraktion x = b - a als eine Addition mit der Gegenzahl definieren: x = b + (-a). Damit ist nicht nur die Addition, sondern auch die Subtraktion in der Zahlenmenge Z unbeschränkt ausführbar.

Betrachtet man in Z auch die Gleichung a * x = b und führt die Division mit x = b / a ein, dann sieht man sofort, dass eine solche Division in der Menge der ganzen Zahlen nur sehr beschränkt ausführbar ist, beispielsweise für 2 * x = 6 mit x = 3, nicht aber für 2 * x = 5, weil 2 * 2 = 4 ist und 1 Rest bleibt.

Problem: Die Grundrechenoperationen sind in der Menge der natürlichen Zahlen N wohl definiert. Wie aber wird mit ganzen Zahlen gerechnet ?

Für die Addition bietet sich das "Pfeilmodell" an. Dabei entspricht einer Zahl z ein Pfeil, dessen Länge durch den Betrag |z| der Zahl und dessen Richtung durch das Vorzeichen sgn(z) der Zahl gegeben ist. Die Addition zweier Pfeile erfolgt nach der "Fuß bei Kopf"-Regel, wo der Fuß des zweiten Pfeiles an den Kopf des ersten Pfeiles gelegt wird. Der Ergebnispfeil zielt dann vom Fuß des ersten zum Kopf des zweiten Pfeiles. Dieses Modell ist gut geeignet die Addition von natürlichen und auch ganzen Zahlen zu beschreiben. Schließlich muss noch gezeigt, werden, dass die Rechengesetze auch für ganze Zahlen gelten.



Pfeilmodell für die Addition (-3) + (+7) = +4.

Die Subtraktion als Addition mit der Gegenzahl ist in dem Modell auch gut erklärbar: +7 - (-3) = +7 + (+3) = 10.

Für die Multiplikation genügt es, die Multiplikation mit (-1) als Spiegelung einer Zahl am Nullpunkt der Zahlengerade zu erklären, also wird dabei immer die Gegenzahl erzeugt, d.h. $(-1) * a = a * (-1) = -a$. Dadurch ist es einfach möglich, auch die Multiplikation von beliebigen ganzen Zahlen auszuführen, beispielsweise $(-3) * 2 = (-1) * 3 * 2 = (-1) * 6 = -6$.

Mit den beschriebenen Erweiterungen kann mit ganzen Zahlen genauso gerechnet werden, wie mit natürlichen Zahlen.

Das ist das Permanenzprinzip der formalen Rechengesetze.

Die Teilbarkeit der ganzen Zahlen

Die Teilbarkeit der ganzen Zahlen

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen noch einige interessante Sachverhalte zu diesem Thema "Teilen" dargestellt werden.

Eine Zahl b teilt eine Zahl a, wenn bei der Division a / b kein Rest r bleibt. Das soll durch einen geraden Divisionsstrich "|" symbolisiert werden. Jede Zahl a wird durch 1 und sich selbst geteilt. Alle anderen Teiler, falls vorhanden, heißen echte Teiler.

3 | 12, weil 12 / 3 = 4 und 0 Rest.
¬ (5 | 12), weil 12 / 5 = 2 und 2 Rest.

Eine Zahl, die keine echten Teiler besitzt, nennt man Primzahl. Alle Teiler einer Zahl a bilden die Teilermenge T(a). Jene Teiler davon, die selbst Primzahlen sind, heißen Primfaktoren von a.

T(12) = {1,2,3,4,6,12} ist die Teilermenge von 12.
1 und 12 sind unechte Teiler von 12.
2 und 3 sind Primzahlen und Primfaktoren von 12.

Alle Vielfachen b = n * a bilden die Vielfachenmenge V(a) von a.
V(3) = {3,6,9,12,15,18,21, ... } ist die Vielfachenmenge von 3.

Alle gemeinsamen Teiler von zwei Zahlen a und b liegen im Durchschnitt der beiden Teilermengen T(a) und T(b). Von Interesse ist der größte gemeinsame Teiler ggT(a,b).

Alle gemeinsamen Vielfachen von zwei Zahlen a und b liegen im Durchschnitt der beiden Vielfachenmengen V(a) und V(b). Von Interesse ist das kleinste gemeinsame Vielfache kgV(a,b).

Ganze Zahlen a, welche bei der Division durch eine Zahl m den gleichen Rest r aufweisen, bilden eine Menge. Diese wird als Restklasse r' von (a mod m) bezeichnet. Eine Zahl a hat genau m verschiedene Restklassen: 0', 1', 2', 3' . . . . ., (m-1)'. Der Operator "mod" (modulo) weist auf den Divisor m hin. Zwei Zahlen x und y, welche in der gleichen Restklasse liegen, heißen kongruent und man schreibt: x = y mod m.

Für kongruente Zahlen gelten bestimmte Rechenregeln, z.B.
Wenn a = b mod m und c = d mod m, so (a+c) = (b+d) mod m.

Beweis: a = b mod m, a = k1*m + r und b = k2*m + r.
c = d mod m, c = k3*m + s, d = k4*m + s, also folgt
(a+c) = (k1+k3)*m + (r+s) und (b+d) = (k2+k4)*m + (r+s).
(a+c) und (b+d) liegen in der Restklasse (r+s) mod m
und sind daher zueinander kongruent.

So wie oben können mehrere Rechenregeln für Kongruenzen bewiesen werden. Mit Hilfe dieser Regeln, kann man für Restklassen eine Addition und eine Multiplikation definieren, was aber hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Der Euklidische Algorithmus

Das ist ein Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers ggT zweier Zahlen a und b mit Hilfe der Kettendivision.

Es sei $a > b$ und $a = b * t1 + r1$ mit Divisionsrest $r1 < b$.
$b = r1 * t2 + r2$, Divisor wird durch Rest dividiert mit $r2 < r1$.
$r1 = r2 * t3 + r3$, mit $r3 < r2$.
$r2 = r3 * t4 + r4$, mit $r4 < r3$.
....
$r(n-2) = r(n-1)*t(n) + r(n)$, mit $r(n) < r(n-1)$.
$r(n-1) = r(n)*t(n+1) + r(n+1)$, mit $r(n+1) = 0$.

Diese Kettendivision muss mit einem Rest = 0 abbrechen, weil die positiven ganzzahligen Reste monoton fallen.
Der letzte Rest $r(n) > 0$ ist der gesuchte ggT, weil er erstens in allen Resten, also auch in a und b, enthalten ist. Und weil zweitens jeder andere Teiler von a und b in ihm enthalten ist. Das ergibt sich bei schrittweiser Verfolgung der Divisionskette.

Aus dem Euklidischen Algorithmus folgt, dass der ggT von
a und b als deren Vielfachensumme dargestellt werden kann:
ggT(a,b) = i*a + j*b mit i und j aus Z.

Beginnen wir bei der ersten Division r1 = a - t1*b,
r2 = b - t2*r1 = b - t2*a + t1*t2*b = (-t2)*a + (1+t1*t2)*b,
r3 = r1 - t3*r2 = a - t1*b + t2*t3*a - t3*b - t1*t2*t3*b,
    = (1+t2*t3)*a - (t1 + t3 + t1*t2*t3)*b,
r4 = r2 - t4*r3 = ...
....
r(n) = i*a + j*b, das erhält man durch schrittweises Einsetzen.

Beispiel: ggt(99,78) = ?

99 = 1*78 + 21, ... 21 = 1*99 - 1*78.
78 = 3*21 + 15, ... 15 = 1*78 - 3*21 = (-3)*99 + 4*78.
21 = 1*15 + 6, ... 6 = 1*21 - 1*15 = 4*99 - 5*78.
15 = 2*6 + 3, ... 3 = 1*15 - 2*6 = (-11)*99 + 14*78.
 6 = 2*3 + 0.

Also gilt: ggt(99,78) = 3 und 3 = (-11)*99 + 14*78.

Zum Abschluss folgt der "Fundamentalsatz der Arithmetik",
der mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bewiesen wird.

Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl a, welche größer als Eins ist, besitzt eine Primfaktorenzerlegung und diese ist bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren eindeutig. $a = p1 * p2 * ... *pN$.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Erstens muss die Existenz einer solchen Zerlegung und zweitens dann ihre Eindeutigkeit bewiesen werden.

Der Existenzbeweis erfolgt indirekt. Es sei A die Satzaussage.

¬ A: Nicht alle Zahlen haben Primfaktorenzerlegungen. Dann folgt
B: Es gibt eine kleinste Zahl z ohne Primfaktorenzerlegung.

Daher gibt es einen Teiler t von z mit $1 < t < z$. Also ist $z = t * k$. Weil z die kleinste Zahl ohne eine Primfaktorenzerlegung ist, müssen t und k Primfaktorenzerlegungen besitzen. Sie sind ja kleiner als z. Damit ist aber z ein Produkt von Primfaktoren.

¬ B: Die Zahl z besitzt eine Primfaktorenzerlegung.

(B und ¬ B) ist ein Widerspruch, also kann ¬ A nicht gelten, also muss A gelten. Die Existenz der Zerlegung ist bewiesen.

Für den Eindeutigkeitsbeweis wird ein Hilfssatz (H) benötigt: Wenn eine Primzahl p ein Produkt a * b teilt, dann muss p ein Teiler von a oder ein Teiler von b sein.

Der Beweis von Satz H erfolgt ebenfalls indirekt. Wir nehmen an, dass p weder a noch b teilt. Dann muss ggT(a,p) = 1 sein. Aus dem Euklidischen Algorithmus folgt 1 = i*a + j*p. Das wird mit b multipliziert: b = i*(a*b) + j*(p*b). p teilt (a*b) und daher ist die ganze Summe durch p teilbar und daher auch b. Das ist nun ein Widerspruch zur Annahme. Also ist der Hilfssatz bewiesen. Dieser Hilfssatz gilt natürlich auch für mehrgliedrige Produkte.

Wir betrachten nun zwei Primfaktorenzerlegungen einer Zahl n.

n = p1*p2*p3 ..... = q1*q2*q3 .....

p1 ist ein Teiler von n. Wegen dem Hilfssatz muss er auch ein Teiler eines Faktors q sein. Weil q aber eine Primzahl ist, kann q keine echten Teiler haben, also muss p1 mit q identisch sein. Diese Überlegung gilt für jeden Primfaktor der Zerlegungen, und daher müssen die beiden Zerlegungen bis auf die Reihenfolge der Primfaktoren übereinstimmen.

Damit soll das Kapitel über ganze Zahlen abgeschlossen sein.

Rationale und reelle Zahlen

Die rationalen Zahlen

Der Aufbau der Zahlen beginnt bei den natürlichen Zahlen N und führt zunächst zu den ganzen Zahlen Z. Diese bilden in Bezug auf die Addition eine algebraische Gruppe, d.h. es gelten folgende vier fundamentale Gruppenaxiome G1 bis G4.

In der Menge Z ist eine Zahlen-Verknüpfung "+" definiert:
[G1] Für zwei Zahlen a und b aus Z liegt auch (a+b) in Z.
[G2] Für alle Zahlen a, b, c gilt: a + (b + c) = (a + b) +c.
[G3] Es gibt genau eine Zahl 0 mit: a + 0 = 0 + a = a.
[G4] Zu jeder Zahl a gibt es eine Zahl -a mit: a + (-a) = 0.

Abgeschlossenheit [G1], Assoziativität [G2], das neutrales Element [G3] und das inverse Element [G4]. Zusätzlich gilt, [G5] a + b = b + a für alle Zahlen a, b aus Z. (Kommutativität). Subtraktion ist definiert als Addition des inversen Elements.

In Z ist auch eine Verknüpfung " * " von Zahlen definiert, für welche die Gesetze [G1], [G2], [G3] und [G5] gelten, nicht aber [G4]. Es gibt zur Zahl a kein multiplikativ inverses Element b, so dass a * b = 1, wobei 1 das multiplikativ neutrale Element ist. Die Division als Multiplikation mit dem inversen Element (Kehrwert) kann in dieser Form in Z nicht definiert werden.

Die Menge der ganzen Zahlen Z wird nun durch neue Objekte so erweitert, dass die Gleichung $b * x = a$ für alle Zahlen a, b lösbar ist. Die neuen Objekte x werden durch Zahlenpaare (a,b) dargestellt, wo meistens statt einem Komma ein Bruchstrich / geschrieben wird, welcher eine nicht ausgeführte Division kennzeichnen soll. Man nennt diese neuen Objekte daher auch Brüche (Bruchzahlen, rationale Zahlen) und ihre Menge heißt Q. Die ganzen Zahlen a und b heißen dabei Zähler und Nenner. Wie wird nun mit den Zahlenpaaren (a / b) gerechnet ?

Die Grundrechenarten der Brüche sind wie folgt definiert:

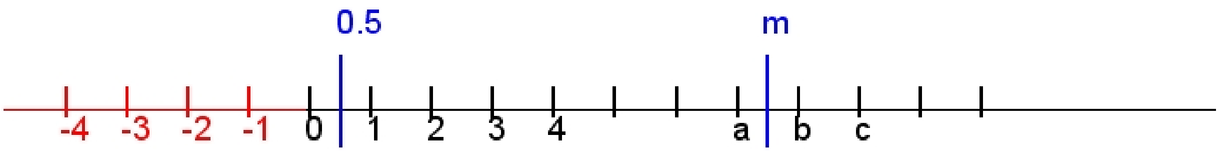
Addition (Subtraktion): $(a/b) \pm (c/d) = (a*d \pm c*b) / (b*d)$.
Multiplikation: $(a/b) * (c/d) = (a*c) / (b*d)$.
Division: $(a/b) / (c/d) = (a/b) * (d/c) = (a*d) / (b*c)$.

Mit diesen Definitionen kann man durch Ausrechnung leicht nachweisen, dass die Menge der Bruchzahlen eine additive und eine multiplikative Gruppe bildet. Die ganzen Zahlen Z sind eine Untermenge von Q mit $a = (a/1)$ für alle a aus Z. Es sind so in Q alle vier Grundrechenoperationen unbeschränkt ausführbar und es gelten in Q alle bekannten Rechenregeln. Jeder Bruchzahl z entspricht ein eindeutiger Punkt P auf der Zahlengerade, wo eine Ordnung von links nach rechts besteht.

Eine Menge, welche so wie Q zwei Gruppen bildet und wo zusätzlich ein Distributivgesetz $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ gilt, heißt ein algebraischer Körper. Dieser ist hier sogar geordnet.

Zahlen werden traditioneller Weise im so genannten Zehnersystem dargestellt, wo es genau zehn Grundziffern 0,1,2,..,9 gibt. Bruchzahlen sind dann Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen oder Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich jedoch periodisch wiederholen, beispielsweise $29 / 8 = 3.625$ oder $2 / 7 = 0.2857142857142.....$

Betrachten wir die zwei Zahlen $a = 0$ und $b = 1$. Wir können in Q die Zahl $(a+b) / 2 = 1/2 = 0.5$ bilden. Diese liegt auf der Zahlengerade in der Mitte zwischen 0 und 1.



Wir nehmen beliebige Zahlen a und b und bilden $m = (a+b)/2$. So dicht a und b auch nebeneinander liegen, es liegt immer noch eine Bruchzahl dazwischen. Damit haben wir bewiesen:

Die Bruchzahlen liegen unendlich dicht auf der Zahlengerade.

In der Menge Q der rationalen Zahlen $\{x = m / n: m, n \text{ aus } Z\}$ ist das Quadrieren lückenlos ausführbar. $y = x*x = x^2$ ist immer eine Bruchzahl. Die Umkehroperation $y = sqrt(x)$ hingegen ist nur lückenhaft ausführbar. Wir wollen zuerst zeigen, dass die Quadratwurzel aus einer Primzahl p keine Bruchzahl ist.

Behauptung: Für eine Primzahl p ist sqrt(p) keine Bruchzahl.

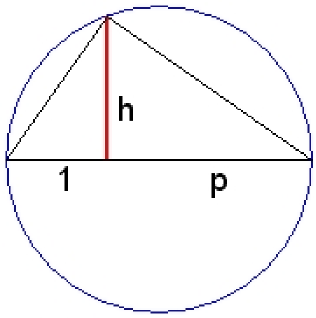
Wir beweisen die Behauptung indirekt, indem wir genau das Gegenteil der Behauptung annehmen und aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten. Wenn dies gelingt, dann muss die ursprüngliche Behauptung wahr sein.

Gegenteil der Behauptung: $sqrt(p) = m / n$ mit ganzen Zahlen m und n, welche teilerfremd sind (d.h. nicht weiter kürzbar).

$sqrt(p) = m / n$, $p = m^2 / n^2$, $m^2 = p * n^2$, d.h. p teilt m^2.
Wenn p nun m^2 teilt, dann muss p auch m teilen.
Also gilt $p * z = m$. Einsetzen in $p = m^2 / n^2$ liefert:
$p = p^2 * z^2 / n^2$, $p * n^2 = p^2 * z^2$, $n^2 = p * z^2$, d.h. p teilt n^2.
Wenn p nun n^2 teilt, dann muss p auch n teilen.

Ergebnis: p teilt m und n. Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass m und n teilerfremd sind.

Wir haben bewiesen, dass die Wurzel aus einer Primzahl p keine Bruchzahl ist. Andererseits können wir ebenfalls zeigen, dass dieser Wurzel aus einer Primzahl immer ein Punkt auf der Zahlengerade entspricht. Dazu verwenden wir nur den Höhensatz von rechtwinkeligen Dreiecken: $h^2 = p * q$. Dabei nehmen wir die Primzahl p als ersten Hypotenusenabschnitt und $q = 1$ als zweiten Hypotenusenabschnitt. Für die Höhe h gilt dann: $h^2 = p * 1$ und somit $h = sqrt(p)$.



Diese Höhe kann mit dem Thales-Kreis konstruiert und dann am Zahlenstrahl vom Nullpunkt abgetragen werden. Damit ist bewiesen, dass sqrt(p) einem Punkt auf der Zahlengerade entspricht. Früher haben wir aber bewiesen, dass sqrt(p) keine Bruchzahl ist. Daraus erkennen wir nun: Die Bruchzahlen erfüllen die Zahlengerade nur lückenhaft. Wie können wir uns diesen Objekten, wie sqrt(p), welche in den Lücken liegen schrittweise nähern ?

Die Antwort auf die Frage liefern "Intervallschachtelungen".

Intervallschachtelungen

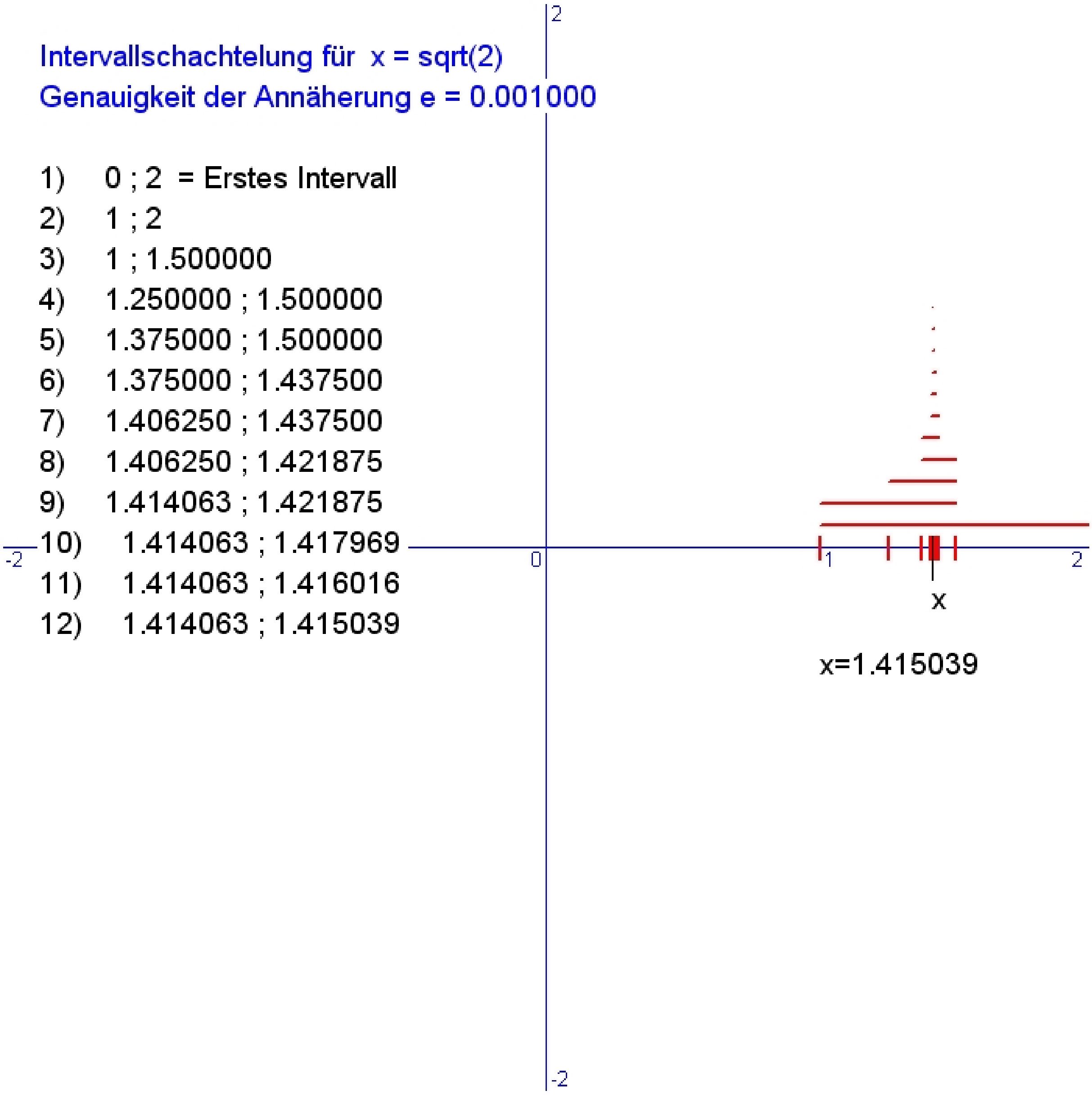
Eine Intervallschachtelung IS ist eine Folge von Intervallen [a(n) , b(n)] in der rationalen Zahlenmenge Q. Der Index n durchläuft dabei die natürlichen Zahlen 0,1,2, ... Es liegt jedes Intervall zur Gänze im vorangehenden Intervall, d.h. es gilt:

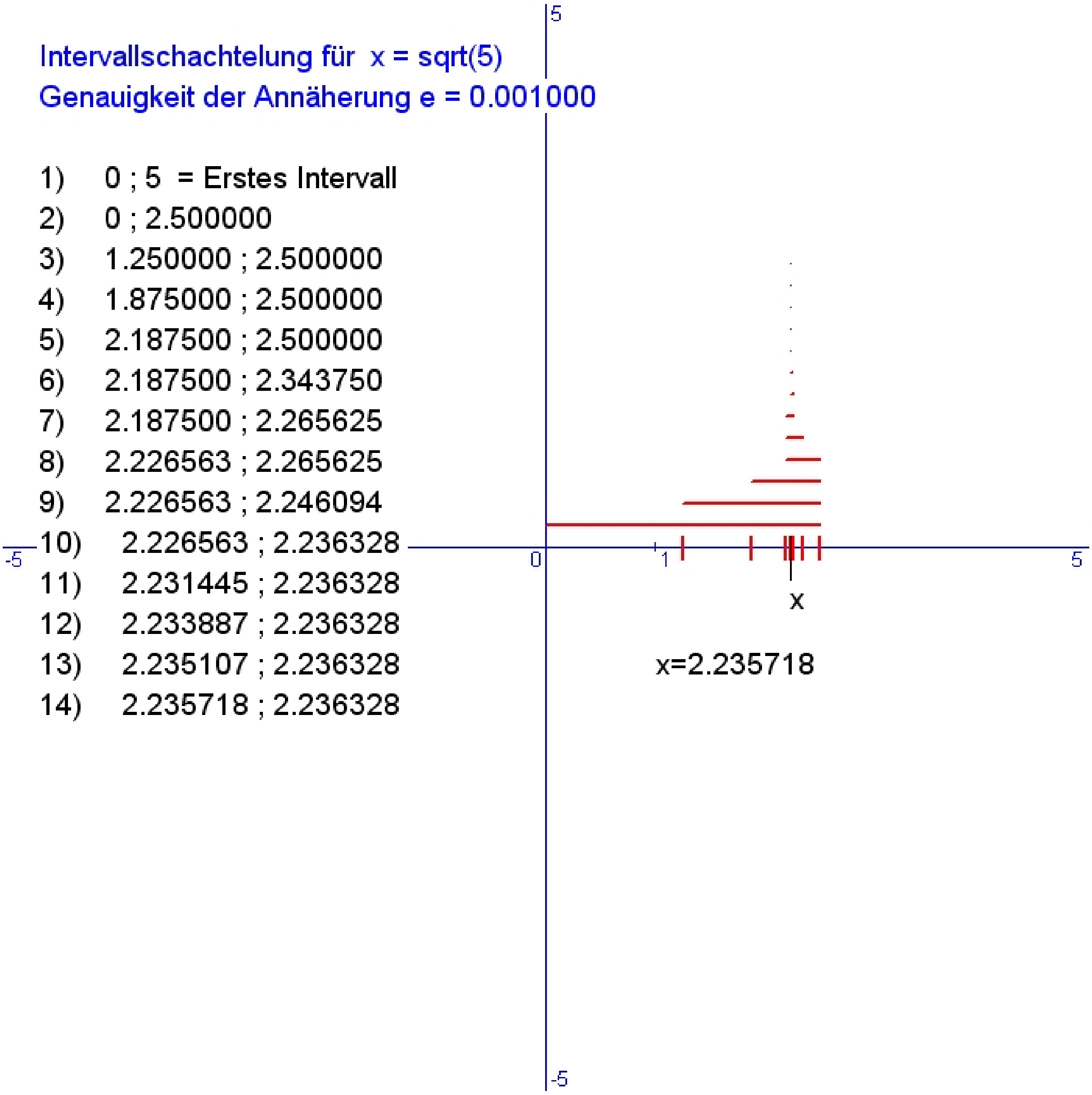
Die linken Ränder a(n) sind eine monoton wachsende Folge.
Die rechten Ränder b(n) sind eine monoton fallende Folge.
Die Intervall-Längen l(n) = b(n) - a(n) bilden eine Nullfolge.

Somit konvergiert eine Intervallschachtelung genau auf einen innersten Punkt, der in allen Intervallen liegt.

Die Intervallschachtelung ist ein wichtiges Verfahren zur schrittweisen Ermittlung von gesuchten Zahlenwerten. Weit verbreitet ist dabei die Bisektion, bei welcher die Längen der Intervalle fortlaufend halbiert werden.

Im Folgenden soll im Zahlenbereich Q der rationalen Zahlen die Quadratwurzel aus 2 schrittweise angenähert werden.


Intervallschachtelung für x = sqrt(2)
Genauigkeit der Annäherung e = 0.001000
1) 0 ; 2 = Erstes Intervall
2) 1 ; 2
3) 1 ; 1.500000
4) 1.250000 ; 1.500000
5) 1.375000 ; 1.500000
6) 1.375000 ; 1.437500
7) 1.406250 ; 1.437500
8) 1.406250 ; 1.421875
9) 1.414063 ; 1.421875
10) 1.414063 ; 1.417969
11) 1.414063 ; 1.416016
12) 1.414063 ; 1.415039
2
-2
0
1
2
-2
x
x=1.415039


Intervallschachtelung für x = sqrt(5)
Genauigkeit der Annäherung e = 0.001000
1) 0 ; 5 = Erstes Intervall
2) 0 ; 2.500000
3) 1.250000 ; 2.500000
4) 1.875000 ; 2.500000
5) 2.187500 ; 2.500000
6) 2.187500 ; 2.343750
7) 2.187500 ; 2.265625
8) 2.226563 ; 2.265625
9) 2.226563 ; 2.246094
10) 2.226563 ; 2.236328
11) 2.231445 ; 2.236328
12) 2.233887 ; 2.236328
13) 2.235107 ; 2.236328
14) 2.235718 ; 2.236328
5
-5
0
1
5
-5
x
x=2.235718

Es wurde gezeigt, dass es Punkte auf der Zahlengerade gibt, denen keine rationale Zahl entspricht. Die Menge der rationalen Zahlen Q wird nun um diese nicht rationalen Objekte erweitert. Das sind beispielsweise alle Quadratwurzeln aus Primzahlen, die Ludolfsche Zahl ¶, die Eulersche Zahl e, usw. Diese neuen Zahlenobjekte nennt man irrationale Zahlen. Als Dezimalzahlen dargestellt, haben sie unendlich viele, aber nicht periodische Nachkommastellen.

Vereingt man die Menge der irrationalen Zahlen mit der Menge der rationalen Zahlen Q, dann erhält man die Menge der reellen Zahlen R. Wie gezeigt wurde, kann jede reelle Zahl z als der Grenzwert einer Intervallschachtelung mit rationalen Rändern dargestellt werden. Damit das auch immer möglich ist, muss noch ein zusätzliches Axiom angenommen werden. Das Axiom von Archimedes besagt, dass es zu jeder reellen Zahl z eine natürliche Zahl n gibt, welche größer als z ist ($n > z$). Dadurch ist sichergestellt, dass jede noch so große reelle Zahl mit Hilfe einer rational-randigen Intervallschachtelung dargestellt wird.

Mit irrationalen Zahlen als Grenzwerte von rational-randigen Intervallschachtelungen kann nun genauso gerechnet werden, wie mit den rationalen Zahlen. (Permanenzprinzip der formalen Rechengesetze).

Die reellen Zahlen R bilden einen geordneten algebraischen Körper, der im Gegensatz zum Körper der rationalen Zahlen auch vollständig ist - in dem Sinne, dass nun jedem Punkt P der Zahlengerade eineindeutig eine reelle Zahl z entspricht.

Die reellen Zahlen sind dadurch geordnet, dass $a < b$ ist, wenn a auf der Zahlengerade links von b liegt. Es wurde gezeigt, dass diese Ordnungsrelation transitiv ist. Und es gelten die Monotoniegesetze: aus $a < b$ folgt $a+c < b+c$, und aus $a < b$ folgt $a*c < b*c$ mit $0 < c$.

Damit ist ein Abschluss im Bau der Zahlenmengen erreicht. Dieser Abschluss ist aber nur vorläufig. Will man nämlich die Gleichung $x^2 + 4 = 0$ in der Menge der reellen Zahlen lösen, dann ist ersichtlich, dass dies unmöglich ist, weil eine reelle Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht existiert. Damit das Wurzelziehen mit allen reellen Zahlen möglich ist, muss die Zahlenmenge ein letztes Mal erweitert werden. Das ergibt dann den Körper der komplexen Zahlen, der in "Algebra, Teil 2" ausführlich dargestellt wird. In diesem Zahlenkörper können die vier Grundrechenoperationen, das Potenzieren und das Radizieren (Wurzelziehen) unbeschränkt ausgeführt werden.

Damit ist der Aufbau der Zahlenmengen abgeschlossen.

Potenzen und Wurzeln

Wird eine Zahl a genau n-Mal mit sich selbst multipliziert, dann nennt man das Produkt die n-te Potenz von a. Man schreibt a^n und sagt dazu "a hoch n".

Definition [D1]: a^n = a * a * a * . . . . * a

a = Grundzahl (Basis)
^ = Potenzzeichen
n = Hochzahl (Exponent)

Für das Rechnen mit Potenzen gelten die gleichen Regeln wie für das Quadrieren. Wir wollen sie hier zusammenfassen und beweisen.

Definition [D2]: a^0 = 1

Satz [P1]: a^x * a^y = a^(x+y)
Beweis: a^x * a^y bedeutet, dass a genau x-Mal und y-Mal mit sich selbst multipliziert wird, also insgesamt (x+y)-Mal.
Beispiel: 2^2 * 2^3 = (2*2) * (2*2*2) = 2^5.

Satz [P2]: a^x / a^y = a^(x - y)
Beweis: Wenn wir aus x-Mal genau y-Mal die Zahl a kürzen, erhalten wir die Zahl a genau (x - y)-Mal. Es muss x >= y sein.
Beispiel: 2^5 / 2^3 = (2*2*2*2*2) / (2*2*2) = 2*2 = 2^2.

Satz [P3]: (a^x)^y = a^(x*y)
Beweis: Wird das Produkt von x-Mal der Zahl a genau y-Mal mit sich selbst multipliziert, dann erhält man die Zahl a insgesamt (x*y)-Mal.
Beispiel: (2^3)^2 = (2*2*2) * (2*2*2) = 2^6.

Satz [P4]: (a * b)^x = a^x * b^x
(a*b)^x = (a*b) * (a*b) * . . . * (a*b) = (a*a*...*a) * (b*b*...*b) = a^x * b^x.
Beispiel: (2 * 3)^2 = (2*3) * (2*3) = 2*2 * 3*3 = 2^2 * 3^2.

Satz [P5]: (a / b)^x = a^x / b^x
(a / b)^x = (a/b) * (a/b) * . . . * (a/b) = (a*a*...*a) / (b*b*...*b) = a^x / b^x.
Beispiel: (6 / 3)^2 = (6/3) * (6/3) = (6*6) / (3*3) = 6^2 / 3^2.

Bei diesen Rechenregeln wurde vorausgesetzt, dass Potenzieren Vorrang vor allen anderen Rechenoperationen hat, d.h. bei 24 / 2^3 wird zuerst 2^3 = 8 und dann 24 / 8 = 3 gerechnet.

Bei allen bisherigen Überlegungen waren die Hochzahlen natürliche Zahlen. Bei einer ersten Erweiterung wollen wir als Hochzahlen auch negative Zahlen (d.h. dann alle ganzen Zahlen) zulassen. Bei einer zweiten Erweiterung werden schließlich auch Bruchzahlen als Hochzahlen genommen. Was bedeuten diese Erweiterungen der Potenz und wie wird mit ihnen gerechnet ?

Potenzen mit negativen Hochzahlen

Definition [D3]: a^(-n) = 1 / a^n = 1 / (a*a*a* . . . *a)

Beispiele:
2^(-1) = 1 / 2^1 = 1 / 2 = 0.5
2^(-2) = 1 / 2^2 = 1 / 4 = 0.25
2^(-3) = 1 / 2^3 = 1 / 8 = 0.125

Wir wollen zeigen, dass auch für diese erweiterten Potenzen die Rechenregeln [P1] bis [P5] gelten, welche für Potenzen mit natürlichen Zahlen gültig sind.

Satz [P1]: a^(-x) * a^(-y) = a^((-x) + (-y))

Multipliziert man Potenzen mit der gleichen Basis, dann werden die Hochzahlen addiert.

a^(-x) * a^(-y) =
1 / a^x * 1 / a^y =
1 / (a^x * a^y) =
1 / a^(x + y) =
a^(-(x + y)) =
a^((-x) + (-y))

Die anderen Rechenregeln können analog bewiesen werden.

Satz [P2]: a^(-x) / a^(-y) = a^((-x) - (-y))
Dividiert man Potenzen mit der gleichen Basis, dann werden
die Hochzahlen subtrahiert.

Satz [P3]: (a^(-x))^(-y) = a^((-x)*(-y))
Potenziert man eine Potenz, werden die Hochzahlen multipliziert.

Satz [P4]: (a * b)^(-x) = a^(-x) * b^(-x)
Die Potenz eines Produktes ist gleich dem Produkt der Potenzen.

Satz [P5]: (a / b)^(-x) = a^(-x) / b^(-x)
Die Potenz eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Potenzen.

Beispiele:

2^(-3) * 2^(-2) = 1 / 2^3 * 1 / 2^2 = 1 / (2^5) = 2^(-5) = 0.03125
4^5 * 4^(-3) = 4^5 / 4^3 = 4^(5 - 3) = 4^2 = 16
(2^(-3))^2 = (1 / 2^3)^2 = 1 / 2^6 = 2^(-6) = 0.015625

a^(-3) / a^(-4) = a^((-3) - (-4)) = a^1 = a
a^3 * a^(-5) * a^(4) = a^(3-5+4) = a^2
a^4 * b^(-3) * a^(-5) * b^5 * a^3 = a^2 * b^2 = (a*b)^2

Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen

Gegeben ist die Zahl a und wir suchen jetzt die Zahl p mit p^x = a.
Diese Zahl p nennt man die x-te Wurzel von a.

Die Umkehrung des Potenzierens ist das Wurzelziehen:
2 ist die 4-te Wurzel von 16, weil 2^4 = 2*2*2*2 = 16.
5 ist die 3-te Wurzel von 125, weil 5^3 = 5*5*5 = 125.
7 ist die 2-te Wurzel von 49, weil 7^2 = 7*7 = 49.
Die 2-te Wurzel aus einer Zahl heißt "Quadratwurzel" (sqrt).

Definition [D4]: a^(1/x) = p = x-te Wurzel von a

Es muss gelten (a^(1/x))^x = (a^x)^(1/x) = a, weil Potenzieren
und Wurzelziehen (Radizieren) umgekehrte Rechenoperationen sind.

Definition [D5]: a^(y/x) = (a^(1/x))^y = (a^y)^(1/x)
(d.h. Wurzelziehen und Potenzieren sind vertauschbar)

16^(1/4) = 2, weil 2^4 = 16.
125^(1/3) = 5, weil 5^3 = 125.
49^(1/2) = sqrt(49) = 7, weil 7^2 = 7^2 = 49.
16^(3/4) = (16^(1/4))^3 = 2^3 = 2^3 = 8.
125^(2/3) = (125^(1/3))^2 = 5^2 = 5^2 = 25.
125^(2/3) = (125^2)^(1/3) = 15625^(1/3) = 25.

Es bleibt noch zu zeigen, dass für die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen die bekannten Rechenregeln [P1] bis [P5] gelten. Das soll hier nur für die Regel [P1] bewiesen werden.

Satz [P1]: a^(1/x) * a^(1/y) = a^((1/x) + (1/y))

Beweis des Satzes:
p = a^(1/x) mit p^x = a
q = a^(1/y) mit q^y = a
(p*q)^(x*y) = p^(x*y) * q^(x*y) = (p^x)^y * (q^y)^x = a^y * a^x = a^(x+y)
(p*q)^(x*y) = a^(x+y)
Also ist p*q die (x*y)-te Wurzel aus a^(x+y):
p*q = (a^(x+y))^(1/(x*y)) = a^((x+y)/(x*y)) = a^((1/x) + (1/y))
Weil p*q = a^(1/x) * a^(1/y) gilt:
a^(1/x) * a^(1/y) = a^((1/x) + (1/y))

Die anderen Rechenregeln können analog bewiesen werden.

Satz [P2]: a^(1/x) / a^(1/y) = a^((1/x) - (1/y))
Satz [P3]: (a^(1/x))^(1/y) = a^(1/(x*y))
Satz [P4]: (a * b)^(1/x) = a^(1/x) * b^(1/x)
Satz [P5]: (a / b)^(1/x) = a^(1/x) / b^(1/x)

Damit ist bewiesen, dass die Potenzregeln auch für Wurzeln gelten.

Zum Abschluss noch einige Beispiele mit Potenzen und Wurzeln:

(8^(1/3))^3 = 2^3 = 8
(8^3)^(1/3) = 512^(1/3) = 8

(9^(1/2))^4 = 3^4 = 9*9 = 81
(9^(-1/2))^4 = (1/3)^4 = 1/81

(64^(2/3) = (64^(1/3))^2 = 4^2 = 16
(81^(3/4) = (81^(1/4))^3 = 3^3 = 27

(2*a)^(1/3)*(4*a^5)^(1/3) = (8*a^6)^(1/3) = 8^(1/3)*(a^6)^(1/3) = 2*a^2
(2*a^3)^(1/4)*(8*a*b^8)^(1/4) = (16*a^4*b^8)^(1/4) = 2*a*b^2

sqrt(20) / sqrt(5) = sqrt(20 / 5) = sqrt(4) = 2
(sqrt(27) + sqrt(12)) * sqrt(3) = sqrt(81) + sqrt(36) = 9 + 6 = 15

Teilweises Wurzelziehen: sqrt(48) = sqrt(16*3) = 4*sqrt(3)
Teilweises Wurzelziehen: 48^(1/3) = (8*6)^(1/3) = 2*6^(1/3)

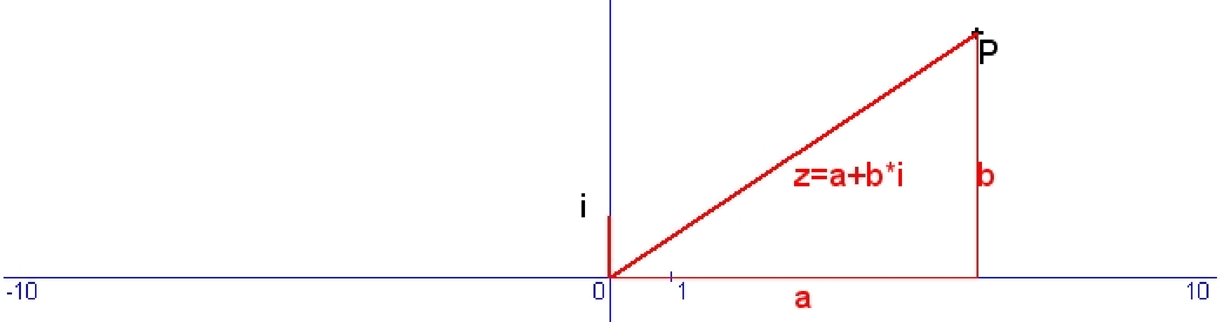
3.258 * 10^2 = 3.258 * 100 = 325.8
3.258 * 10^(-2) = 3.258 * 1/100 = 3.258 / 100 = 0.03258

Damit sei das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln abgeschlossen.

Komplexe Zahlen

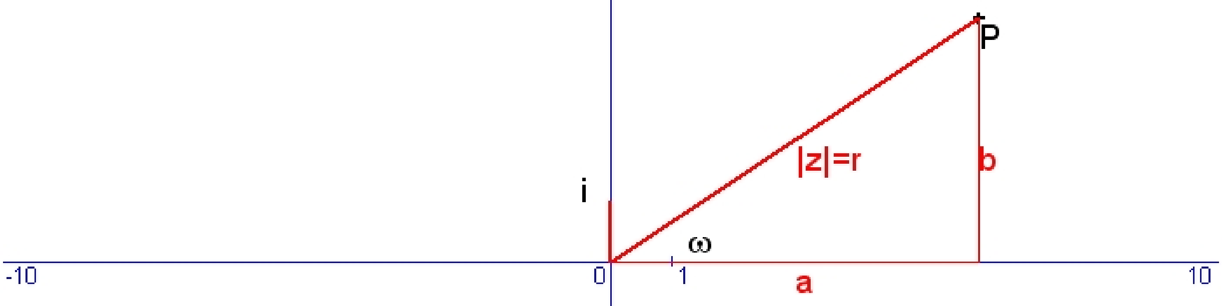
Komplexe Zahlen, Theorie

Die komplexen Zahlen erweitern die Menge der reellen Zahlen derart, dass auch Wurzeln negativer Zahlen berechnet werden können. Das gelingt durch Einführung einer neuen Zahl i als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Diese Zahl i wird die imaginäre Einheit genannt mit i = sqrt(-1).



Komplexe Zahlen z werden in der Form z = a + b*i geschrieben, wobei a und b reelle Zahlen sind. Während die Menge R der reellen Zahlen durch Punkte auf der Zahlengerade dargestellt wird, kann man die Menge der komplexen Zahlen C als Punkte in der Ebene darstellen (Gaußsche Zahlenebene). Dabei wird dem reellen Zahlenpaar (a,b) der Punkt P(a/b) zugeordnet. Die x-Achse ist die reelle und die y-Achse die imaginäre Achse. Dem entsprechend heißt a der Realteil und b der Imaginärteil. Man schreibt a = Re(z) und b = Im(z).

Eine komplexe Zahl z = a + b*i kann in der Zahlenebene auch mit Hilfe von Polarkoordinaten P(r ; w°) dargestellt werden. Dabei ist r = |z| der Betrag von z und der Winkel w wird das Argument von z genannt.



Für Umrechnungen von kartesischen in Polar-Koordinaten gilt:
$r^2 = a^2 + b^2$ und $w = \arctan(b/a)$.
Für Umrechnungen von Polar- in kartesische Koordinaten gilt:
$a = r * \cos(w)$ und $b = r * \sin(w)$.
Durch Einsetzen der Koordinaten in z = a + b*i erhält man:
$z = r*(\cos(w) + i*\sin(w))$.
Diese Darstellung heißt trigonometrische Form der komplexen Zahl z. Schließlich muss noch erwähnt werden, dass man die Zahlen z = a + b*i und z' = a - b*i konjugiert komplex nennt.

Definition der Grundrechenoperationen
für zwei komplexe Zahlen z1 = a + b*i, z2 = c + d*i.

Summe: z1 + z2 = (a+c) + (b+d)*i
Produkt: z1 * z2 = (a*c - b*d) + (a*d + b*c)*i

Die beiden Operationen sind so definiert, dass erstens alle bekannten Rechenregeln gelten und zweitens das Rechnen mit rellen Zahlen als Spezialfall für b = d = 0 daraus folgt.

Differenz: z1 - z2 = (a-c) + (b-d)*i
Quotient: z1 / z2 = (a+b*i) / (c+d*i) = ?

Um den Quotienten zu berechnen, wird zuerst der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl z2' = (c - d*i) erweitert und dann Realteil und Imaginärteil getrennt berechnet. Dabei erhält man:

Quotient: z1 / z2 = (a*c + b*d) / (c^2 + d^2) + (b*c - a*d) / (c^2 + d^2)*i.

Durch Ausrechnen kann man zeigen, dass für diese Rechenoperationen alle bekannten Rechenregeln gelten, und dass die reellen Zahlen R (z = a + 0*i) eine Teilmenge der Menge C sind. Eine Ordnungsrelation (<) wie in R gibt es in der Menge C nicht.

Während Additionen und Subtraktionen ohne Aufwand mit kartesischen Koordinaten durchführbar sind, so ist die Berechnung von Produkten oder Quotienten eher mühsam. Multiplikation und Division werden vorteilhaft in Form von Polarkoordinaten ausgeführt. Zur Erinnerung: i² = -1.

z1 = a + b*i = (r1 ; w1) = r1*(cos(w1) + i*sin(w1))
z2 = c + d*i = (r2 ; w2) = r2*(cos(w2) + i*sin(w2))

z = z1 * z2 = (a*c - b*d) + (a*d + b*c)*i = (r ; w)

z = r1*r2*cos(w1)*cos(w2) - r1*r2*sin(w1)*sin(w2) +
+ (r1*r2*cos(w1)*sin(w2) + r1*r2*sin(w1)*cos(w2))*i

z = r1*r2*(cos(w1)*cos(w2) + sin(w1)*sin(w2)) +
+ r1*r2*(cos(w1)*sin(w2) + sin(w1)*cos(w2))*i

z = r1*r2*(cos(w1+w2) + sin(w1+w2))*i = (r1*r2 ; w1+w2).

Diese Zusammenfassung gilt wegen der Additionsgesetze für Winkelfunktionen. Somit gilt für das komplexe Produkt:

z = z1 * z2 = (r1 ; w1) * (r2 ; w2) = (r1*r2 ; w1+w2)

Damit wurde folgender Lehrsatz hergeleitet:

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden
die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.
z1 * z2 = (r1 ; w1) * (r2 ; w2) = (r1*r2 ; w1+w2).

Für die Division von z1 = (r1 ; w1) durch z2 = (r2 ; w2)
wird durch Einsetzen der trigonometrischen Formen in den
Quotienten in analoger Weise folgender Lehrsatz bewiesen:

Bei der Division zweier komplexer Zahlen werden
die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert,
d.h. z1 / z2 = (r1;w1) / (r2;w2) = (r1/r2 ; w1-w2).

Beispiel: z1 = 4 + 3*i und z2 = 2 + 5*i.

r1 = sqrt(4^2+3^2) = 5.00, w1 = arctan(3/4) = 36.87°
r2 = sqrt(2^2+5^2) = 5.39, w2 = arctan(5/2) = 68.20°
z1 = (5.00 ; 36.87°), z2 = (5.39 ; 68.20°)

z1 * z2 = (26.95 ; 105.07°) = -7.01 + 26.02*i
z1 / z2 = (0.93 ; -31.33°) = 0.79 - 0.48*i

Mit Hilfe dieser beiden Lehrsätze können nun auch das Potenzieren und das Radizieren mit komplexen Zahlen ausgeführt werden.

z = a + b*i = (r ; w) = r*(cos(w) + i*sin(w)).

p2 = z^2 = (r^2 ; 2*w)
p3 = z^3 = (r^3 ; 3*w)
....
Für die n-te Potenz gilt: pn = z^n = (r^n ; n*w).

w2 = z^(1/2) = (r^(1/2) ; (w/2))
w3 = z^(1/3) = (r^(1/3) ; (w/3))
....
Für die n-te Wurzel gilt: wn = z^(1/n) = (r^(1/n) ; w/n).

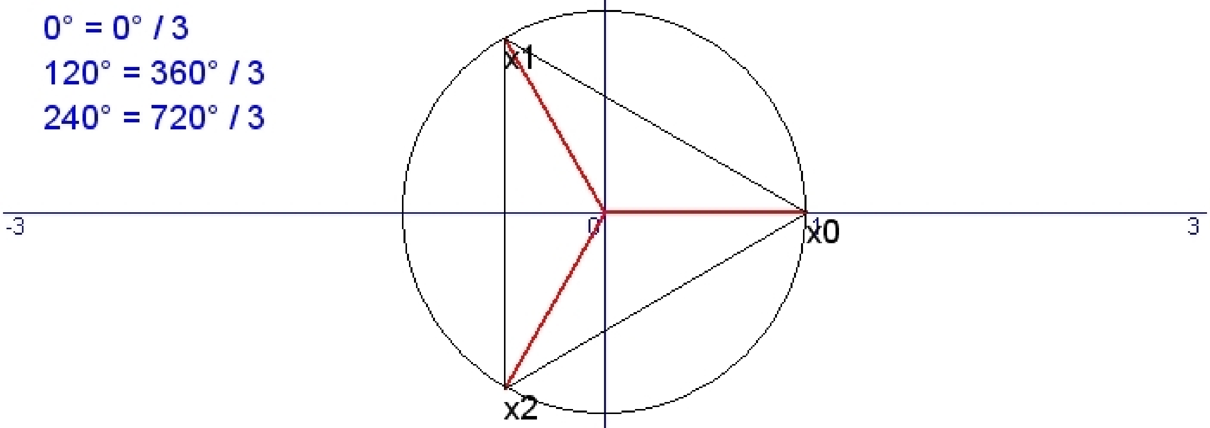
Bei der n-ten Wurzel muss folgender Sachverhalt beachtet werden. Weil die Winkel w, w + 1*360, w + 2*360, w + 3*360, ... gleich groß sind, erhält man bei einer Winkelteilung durch n genau n verschiedene Teilwinkel. Winkel w/n heißt Hauptwert, w/n + 1*360/n, w/n + 2*360/n, ..., w/n + (n-1)*360/n Nebenwerte.

Bei der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl erhält man n Werte!

Es sei z = a + b*i mit a = 1 und b = 0, d.h. z = 1 (eine reelle Zahl).
Wir wollen nun alle 3-ten Wurzeln x0, x1 und x2 bestimmen:
z = 1, Polarkoordinaten: r = 1 und w = 0 = 0+1*360 = 0+2*360.

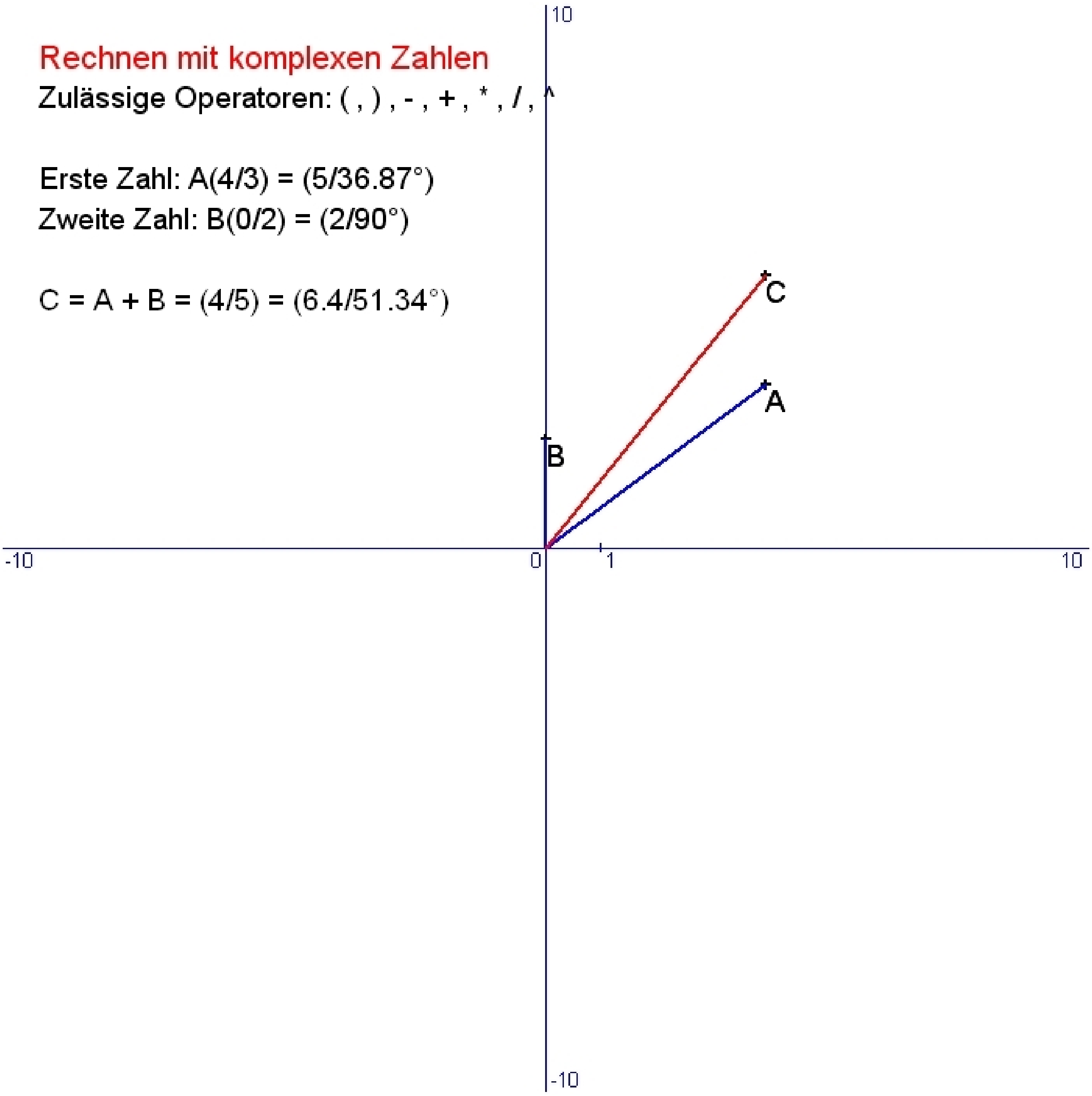
x0 = (1 ; 0°) = 1*(cos(0) + i*sin(0)) = 1 + 0*i, Hauptwert.
x1 = (1 ; 120°) = 1*(cos(120) + i*sin(120)) = -0.5 + 0.87*i
x2 = (1 ; 240°) = 1*(cos(240) + i*sin(240)) = -0.5 - 0.87*i

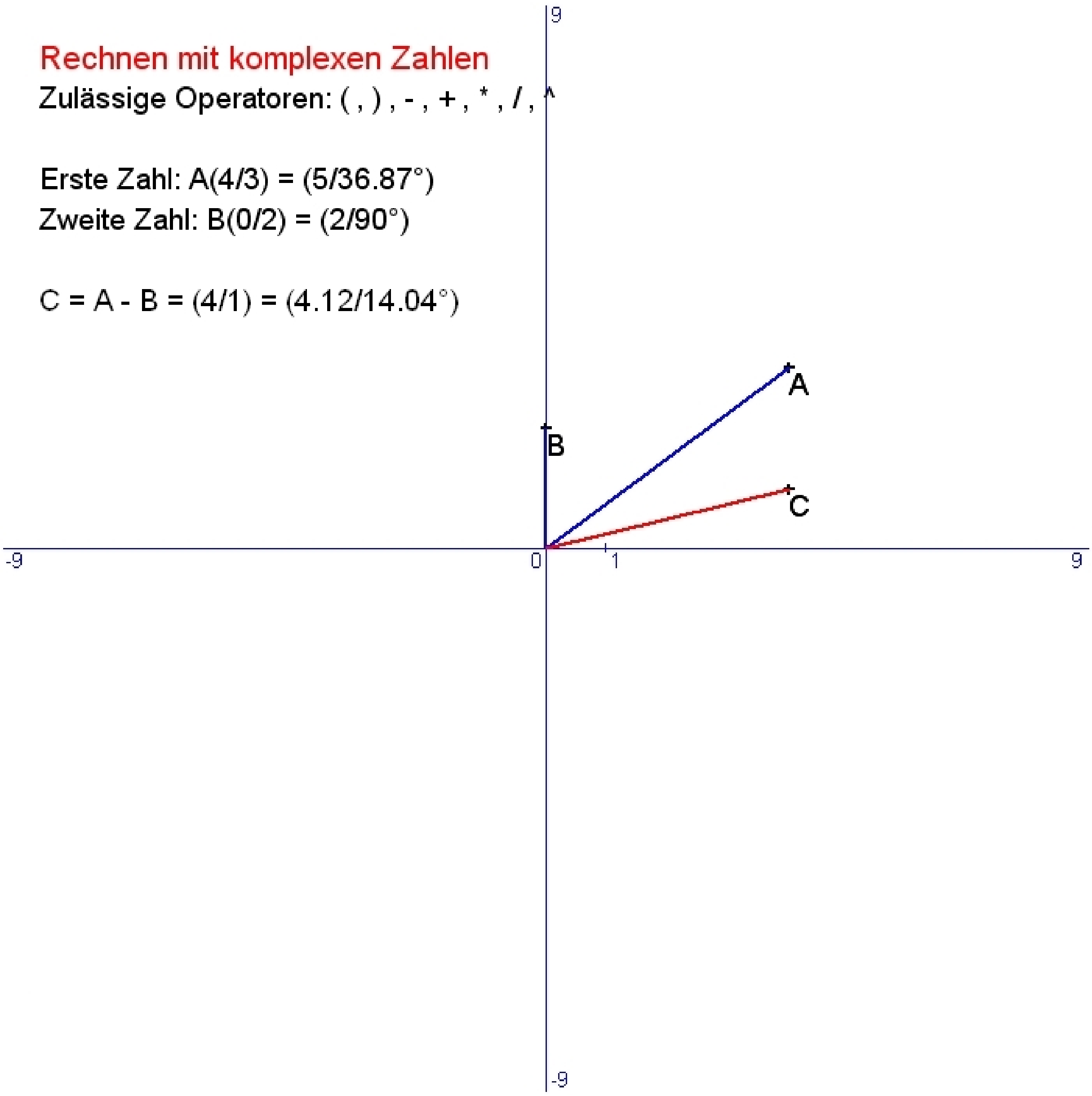
0° = 0° / 3
120° = 360° / 3
240° = 720° / 3

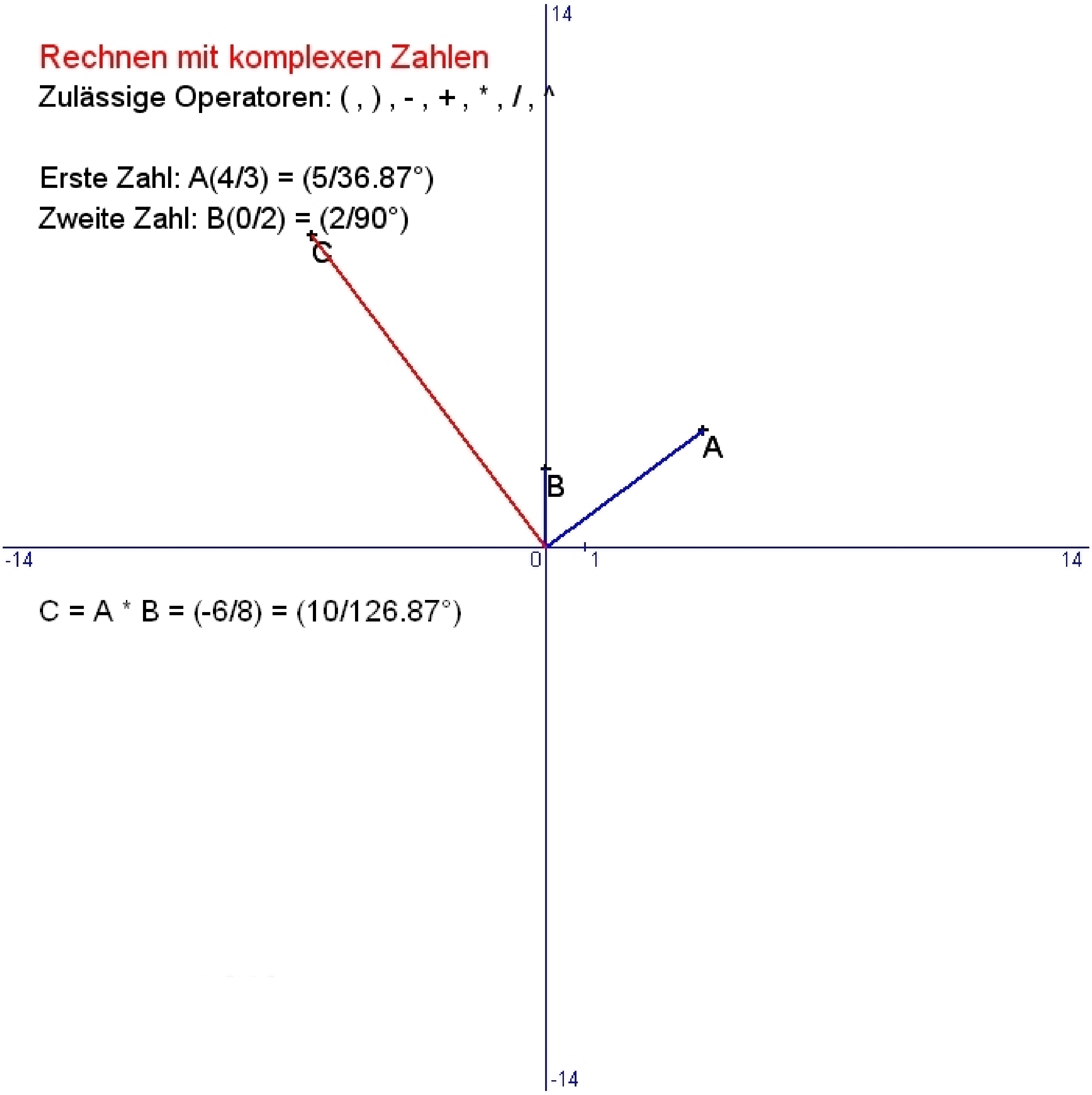


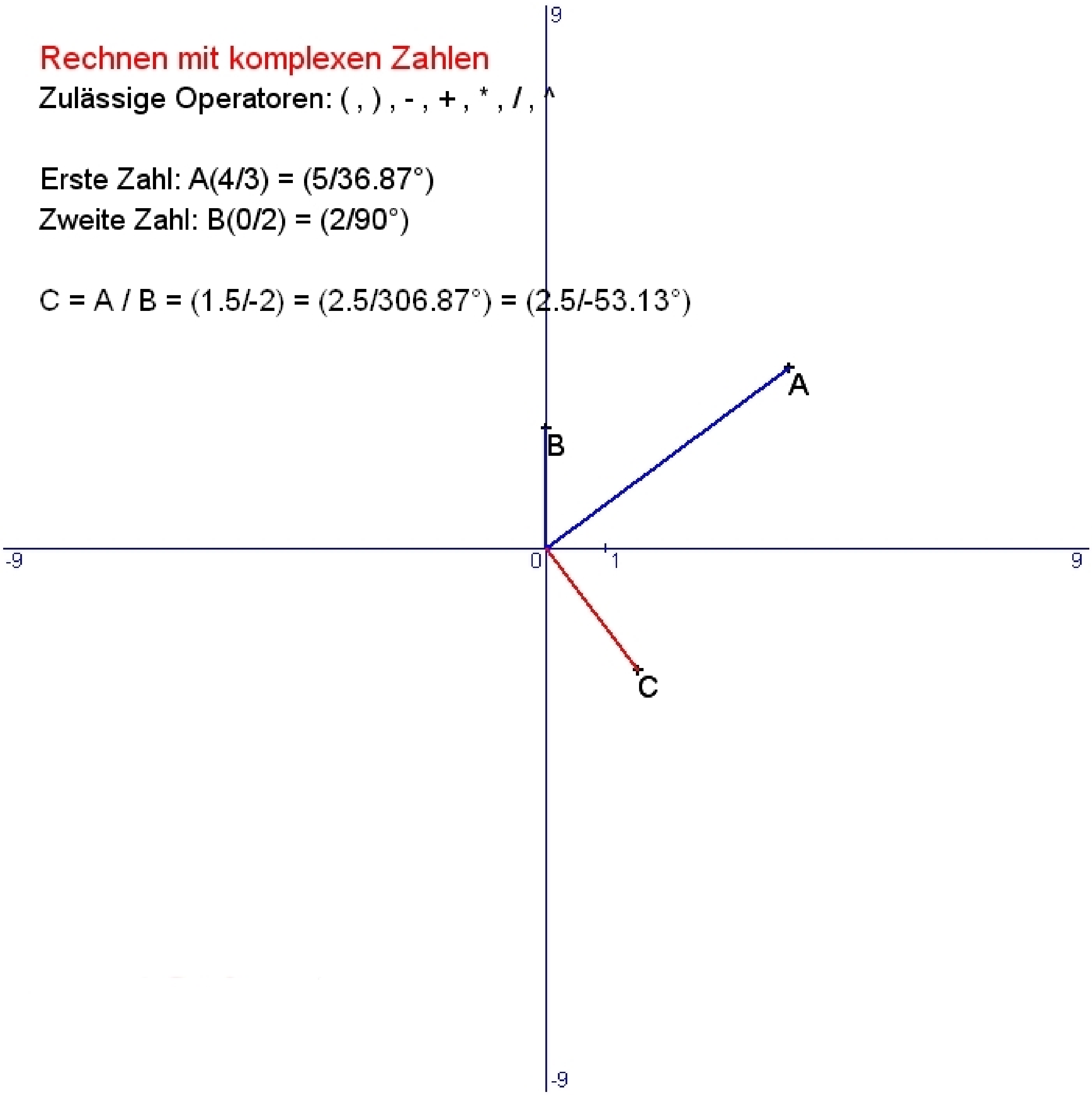
Die Gleichung $x^3 = 1$ hat also 3 komplexe Lösungen x0, x1, x2.
Man nennt sie Einheitswurzeln und sie bilden im Einheitskreis
in der Gaußschen Zahlenebene ein regelmäßiges Vieleck !

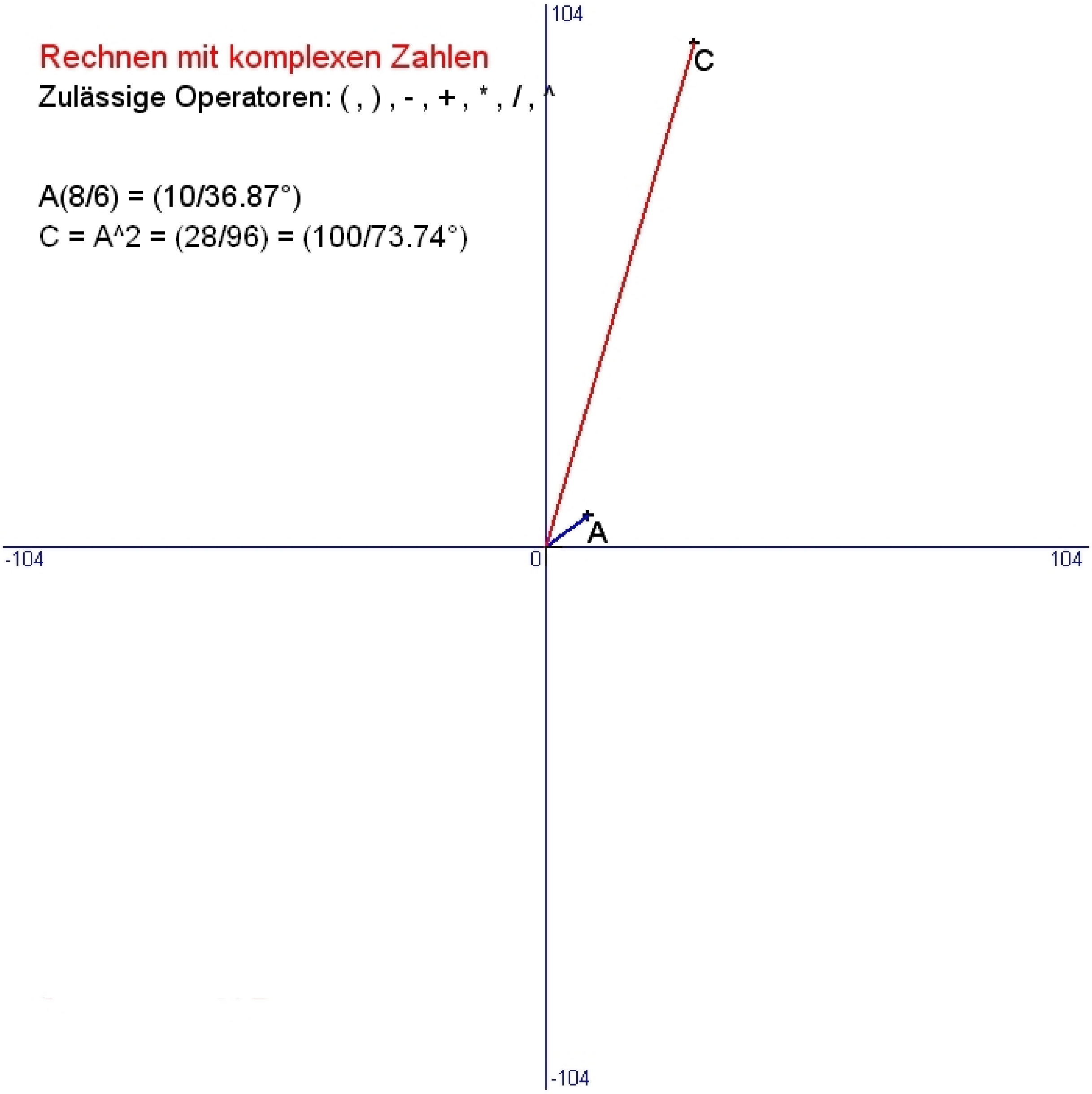
Komplexe Zahlen, Beispiele



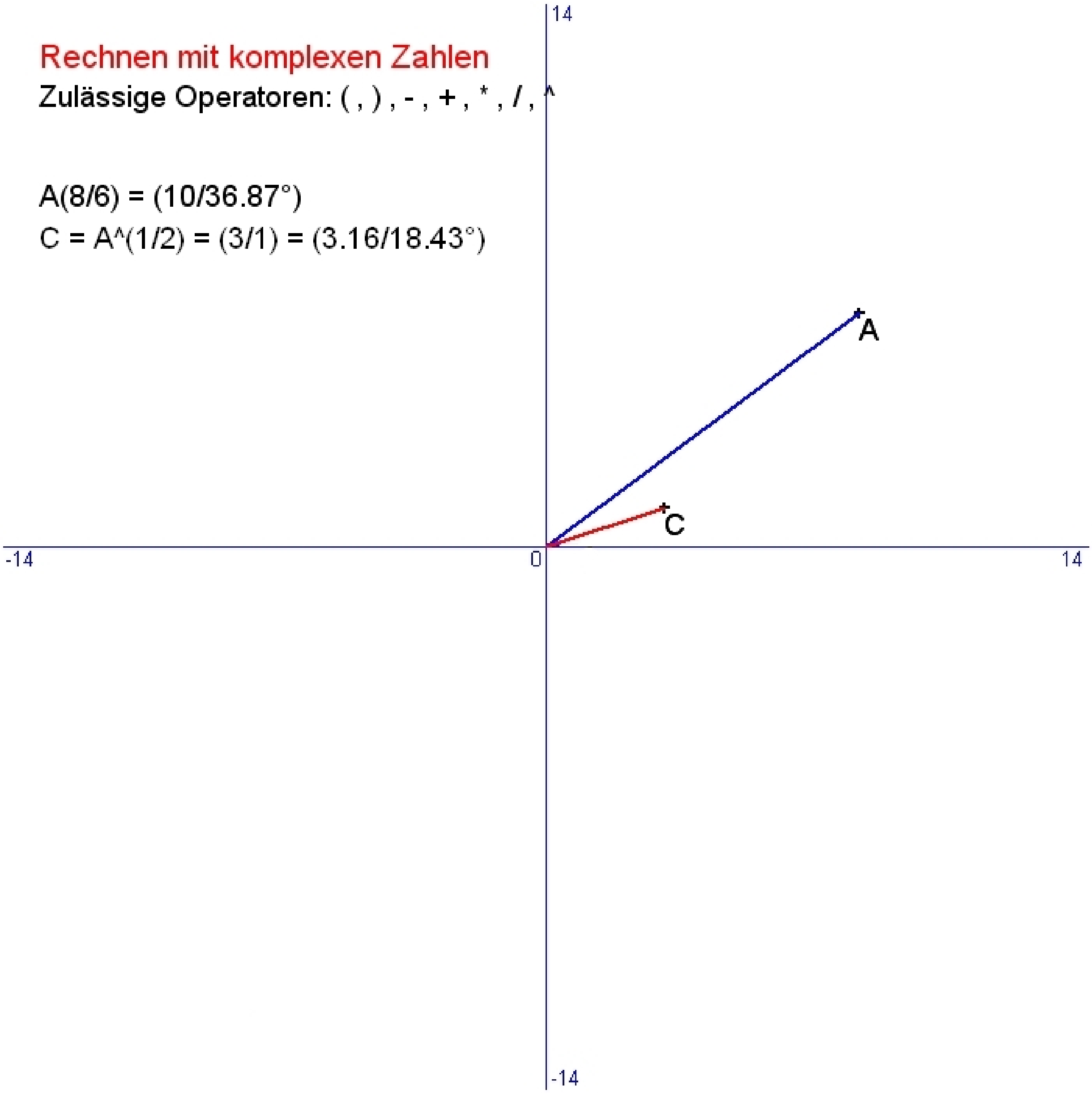

Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
Erste Zahl: A(4/3) = (5/36.87°)
Zweite Zahl: B(0/2) = (2/90°)
C = A - B = (4/1) = (4.12/14.04°)
A
B
C
9
-9
0
1
9
-9


Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
Erste Zahl: A(4/3) = (5/36.87°)
Zweite Zahl: B(0/2) = (2/90°)
C = A * B = (-6/8) = (10/126.87°)
14
-14
0
1
14
-14
A
B
C


Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
Erste Zahl: A(4/3) = (5/36.87°)
Zweite Zahl: B(0/2) = (2/90°)
C = A / B = (1.5/-2) = (2.5/306.87°) = (2.5/-53.13°)
A
B
C
9
-9
0
1
9
-9



104
Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
A(8/6) = (10/36.87°)
C = A^2 = (28/96) = (100/73.74°)
C
A
-104
0
104
-104


Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
A(8/6) = (10/36.87°)
C = A^(1/2) = (3/1) = (3.16/18.43°)
14
-14
0
14
-14
A
C

A L G E B R A

Nullstellen und Fundamentalsatz

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen: $a*x^2 + b*x + c = 0$

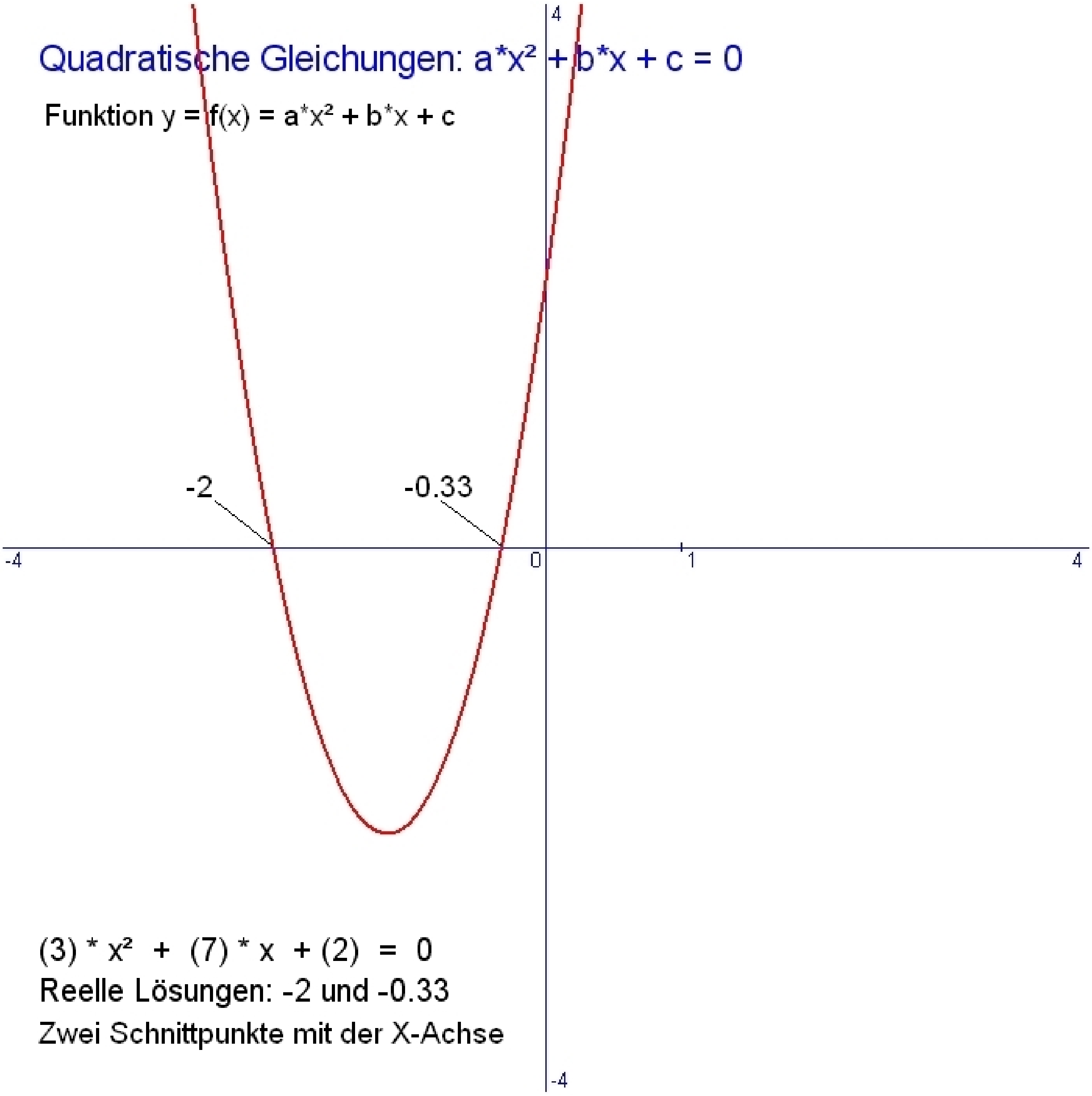
Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $a*x^2 + b*x + c = 0$.
Mit Äquivalenzumformungen kann eine allgemeine Lösungsformel hergeleitet werden.

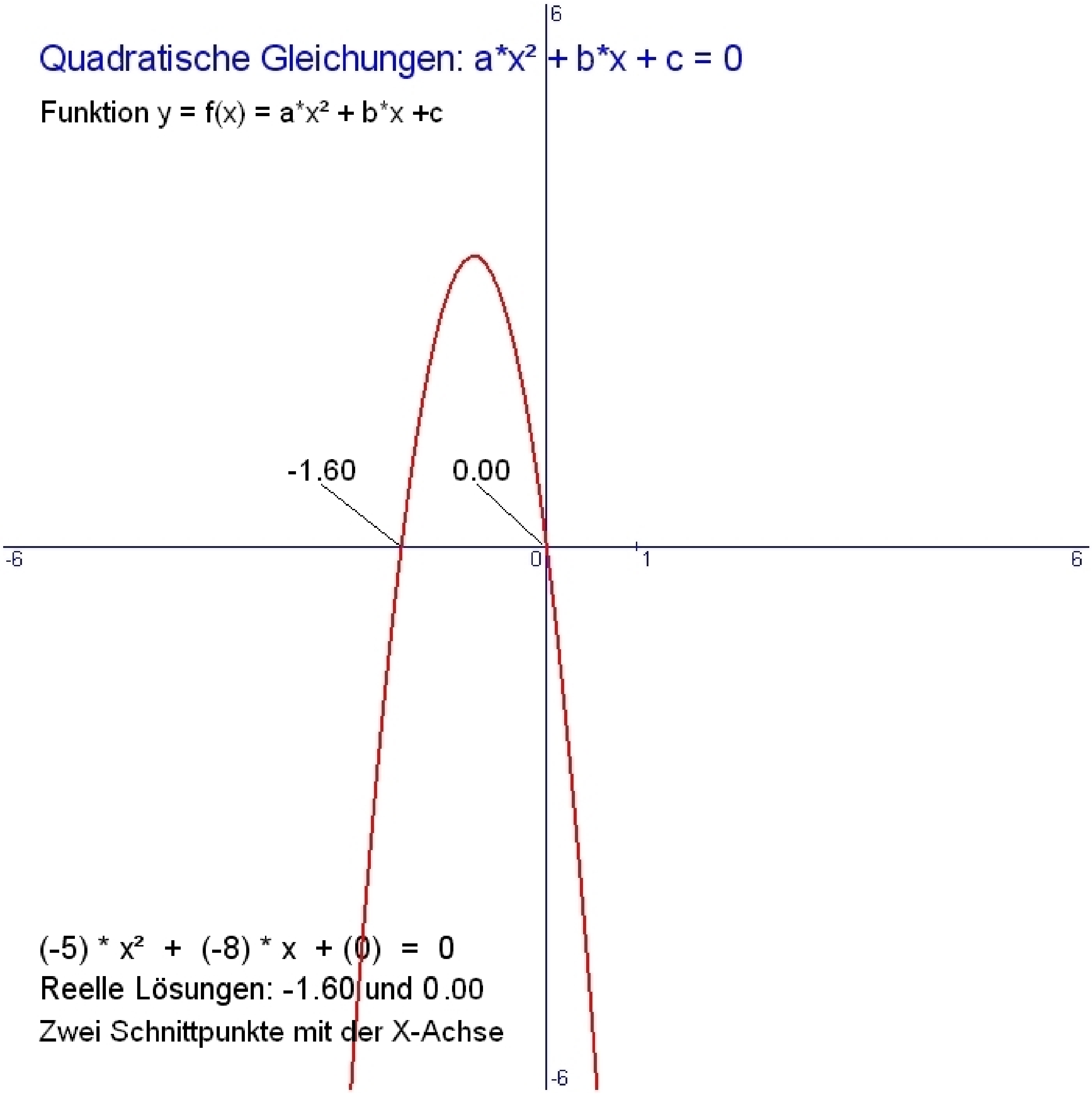
$a*x^2 + b*x + c = 0$
$x^2 + (b/a)*x + (c/a) = 0$. Wir setzen $p = (b/a)$ und $q = (c/a)$.
$x^2 + p*x + q = 0$
$x^2 + p*x + (p/2)^2 - (p/2)^2 + q = 0$
$(x + (p/2))^2 = p^2/4 - q$
$x + (p/2) = \pm \mathrm{sqrt}(p^2/4 - q)$
$x = - p/2 \pm \mathrm{sqrt}(p^2/4 - q)$. Wir setzen für p und q zurück ein.

$x = (- b \pm \mathrm{sqrt}(b^2 - 4*a*c)) / (2*a)$

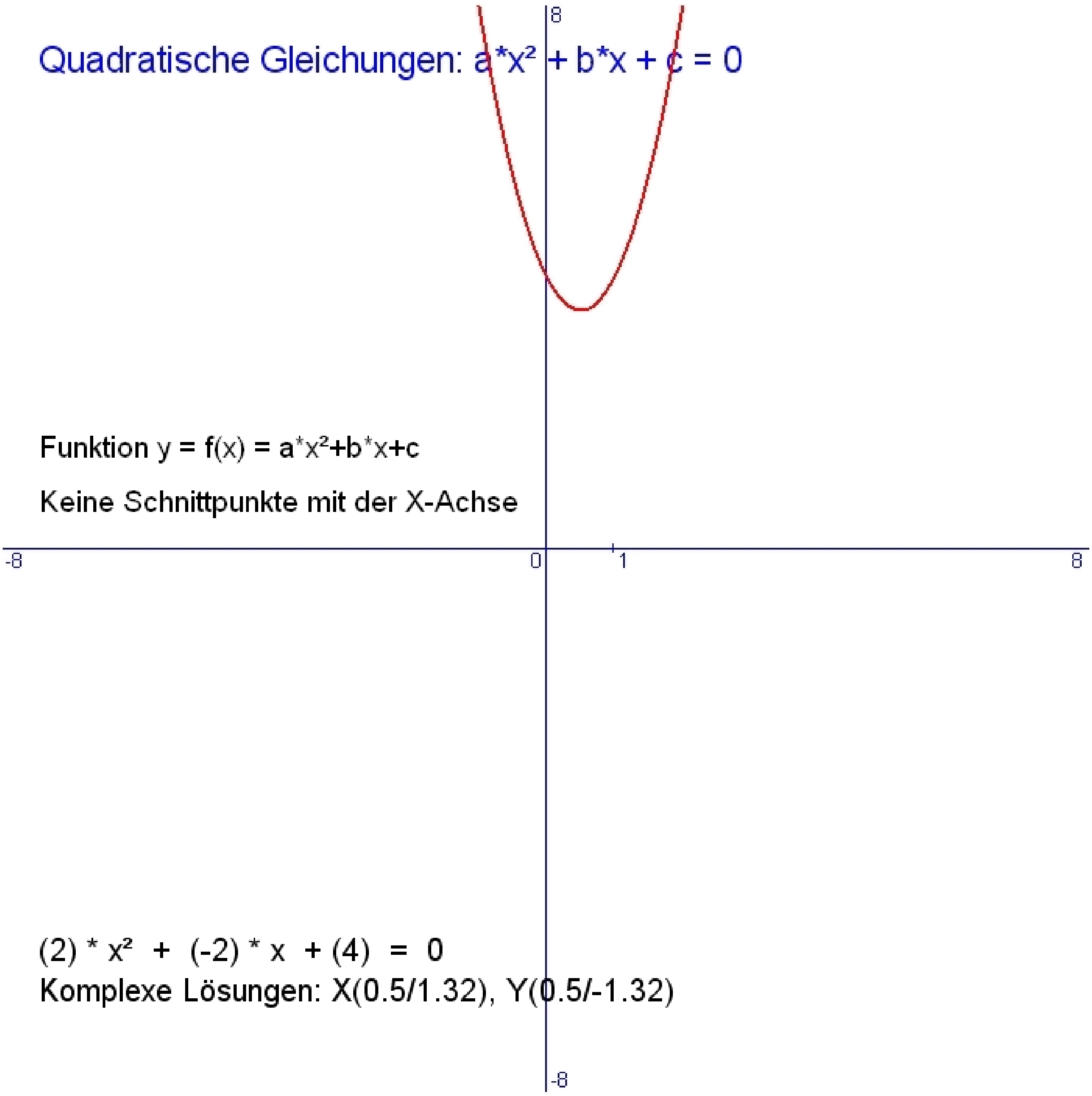
Diese Formel liefert zwei Lösungen der Gleichung.
Der Wurzelausdruck $d = (b^2 - 4*a*c)$ heißt Diskriminante.

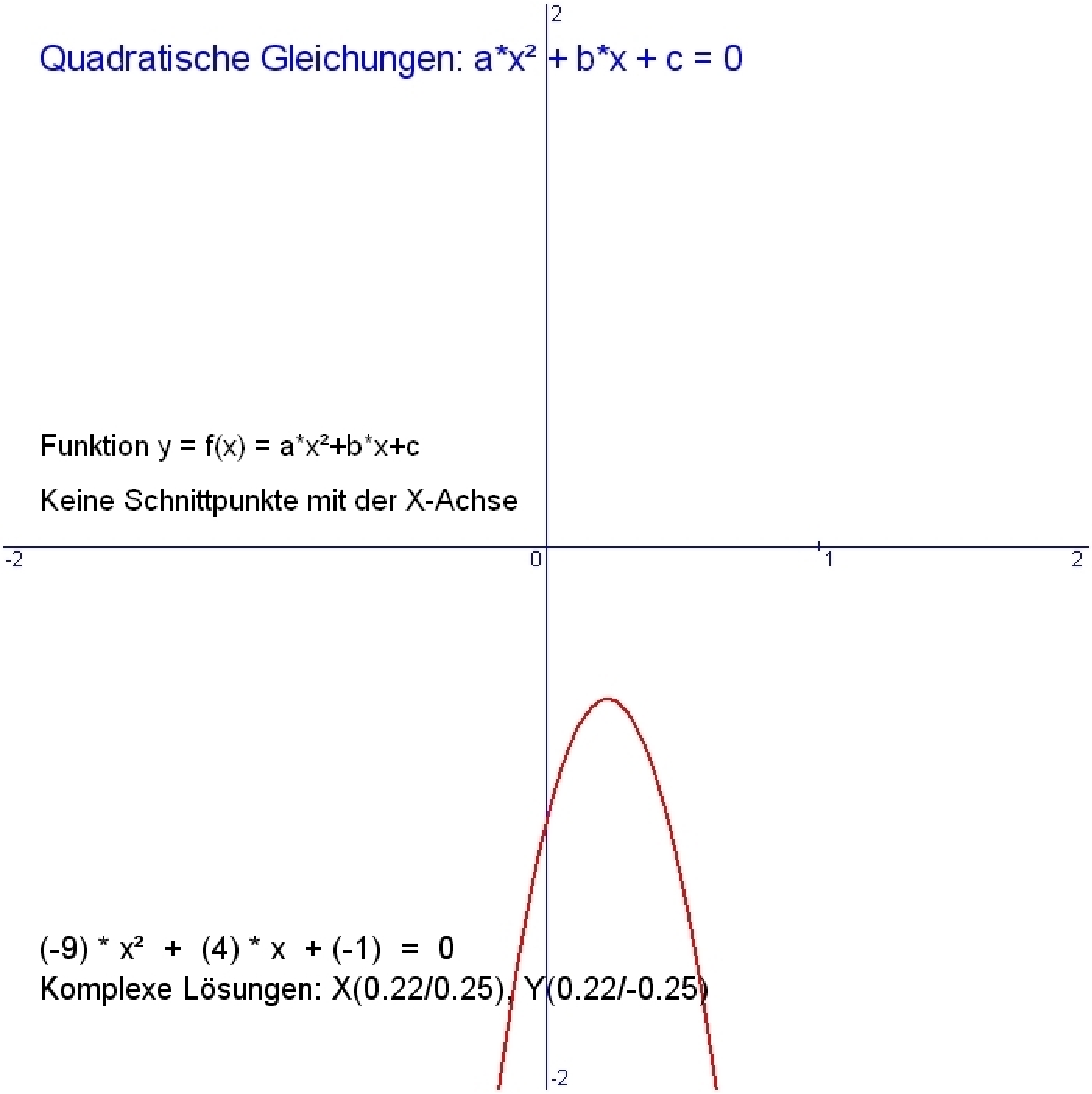
Bei $d > 0$ gibt es zwei verschiedene reelle Lösungen.
Bei $d = 0$ gibt es zwei identische reelle Lösungen.
Bei $d < 0$ gibt es zwei konjugierte komplexe Lösungen.


Quadratische Gleichungen: a*x² + b*x + c = 0
Funktion y = f(x) = a*x² + b*x + c
4
-2
-0.33
-4
0
1
4
(3) * x² + (7) * x + (2) = 0
Reelle Lösungen: -2 und -0.33
Zwei Schnittpunkte mit der X-Achse
-4



Quadratische Gleichungen: a*x² + b*x + c = 0
Funktion y = f(x) = a*x² + b*x +c
6
-1.60
0.00
-6
0
1
6
(-5) * x² + (-8) * x + (0) = 0
Reelle Lösungen: -1.60 und 0.00
Zwei Schnittpunkte mit der X-Achse
-6


Quadratische Gleichungen: a*x² + b*x + c = 0
Funktion y = f(x) = a*x²+b*x+c
Keine Schnittpunkte mit der X-Achse
8
-8
0
1
8
-8
(2) * x² + (-2) * x + (4) = 0
Komplexe Lösungen: X(0.5/1.32), Y(0.5/-1.32)



Quadratische Gleichungen: a*x² + b*x + c = 0
Funktion y = f(x) = a*x²+b*x+c
Keine Schnittpunkte mit der X-Achse
2
-2
0
1
2
-2
(-9) * x² + (4) * x + (-1) = 0
Komplexe Lösungen: X(0.22/0.25), Y(0.22/-0.25)

Der Fundamentalsatz der Algebra

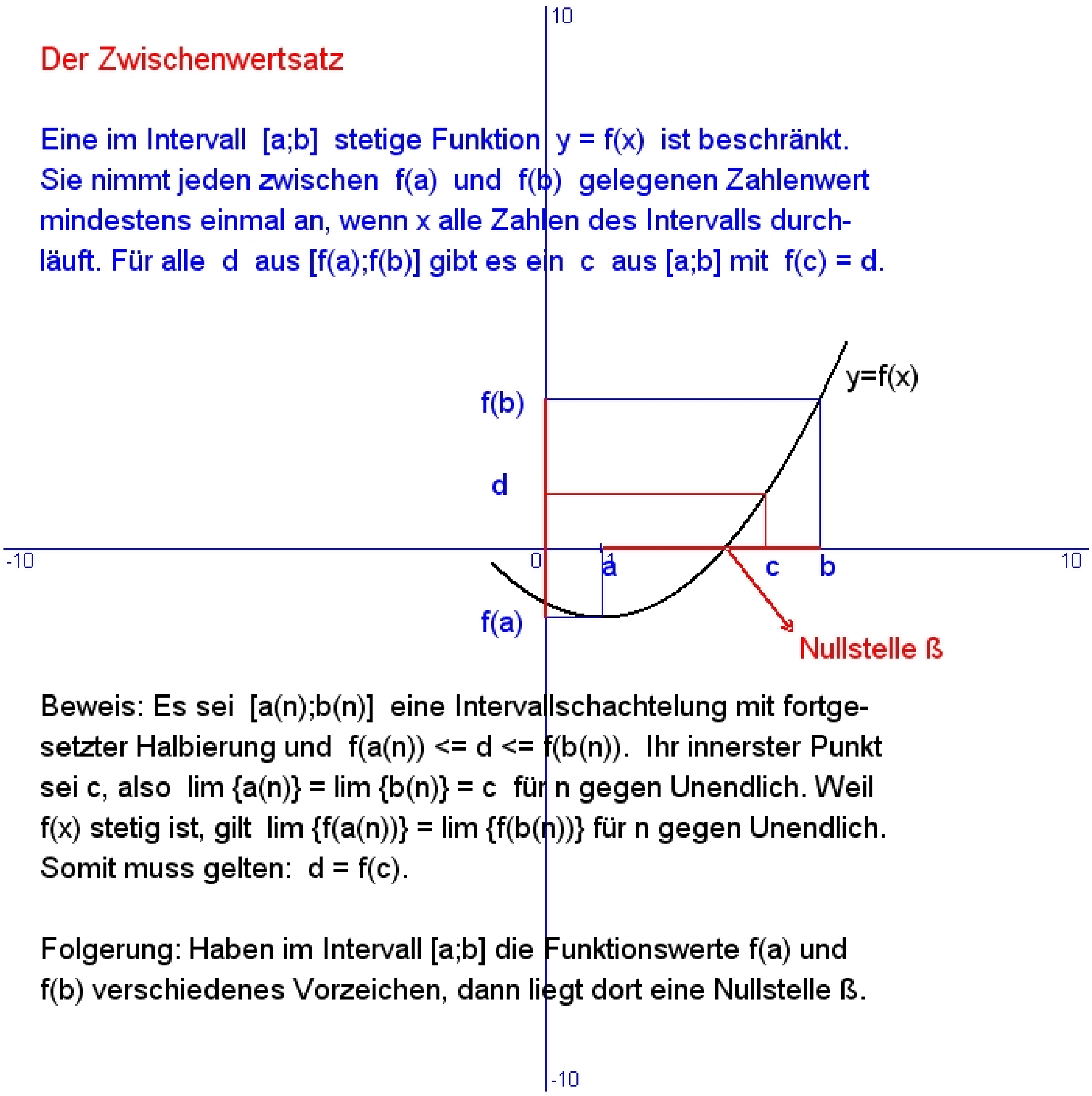
Ausgehend vom Fundamentalsatz der Algebra werden in diesem Kapitel einige grundlegende Lehrsätze der Algebra beschrieben und - wenn nicht zu schwierig - teilweise auch bewiesen. Zuerst eine kleine Inhaltsübersicht:

Der Fundamentalsatz der Algebra

Die Funktion f(x) = a(n)*x^n + a(n-1)*x^(n-1) + . . . + a(1)*x + a(0) mit reellen Koeffizienten a(i) heißt auch Polynomfunktion vom Grad n und man schreibt f(x) = p(n,x). Setzt man sie Null, dann erhält man die Gleichung f(x) = 0. Die Lösungen davon heißen "Nullstellen" der Funktion und können reelle oder komplexe Zahlen sein.

Jede Polynomfunktion p(n,x) besitzt mindestens eine Nullstelle.

Der Beweis des Fundamentalsatzes ist für Polynome mit **geradem Grad** schwierig. Für Polynome mit **ungeradem Grad** kann der Beweis mithilfe des **Zwischenwertsatzes** sehr leicht geführt werden. Der Grad eines Polynoms ist durch die größte Hochzahl **n** des Polynoms **p(n,x)** gegeben.



Jede Polynomfunktion **f(x) = p(n,x)** ist stetig, weil sie nur aus stetigen Potenzfunktionen zusammengesetzt ist. Der Grad **n** von **p(n,x)** sei **ungerade**. Dividiert man das Polynom durch den Koeffizienten **a(n)**, dann erhält man das normierte Polynom **g(x) = x^n + p(n-1,x)**, das die gleichen Nullstellen hat. Wählt man eine Zahl **c** mit **c^n > |p(n-1,c)|**, dann gilt offensichtlich: **g(c) > 0** und **g(-c) < 0**. Nach dem Zwischenwertsatz, muss es dann eine Nullstelle **ß** zwischen **–c** und **+c** geben.

Der Zerfällungssatz

Ist ß eine Nullstelle der Polynomfunktion f(x) = p(n,x), dann
zerfällt die Funktion in das Produkt p(n,x) = (x - ß) * p(n-1,x).

Beweis: [I] p(n,x) = a(n)*x^n + a(n-1)*x^(n-1) + . . . + a(0).
p(n,ß) = 0, d.h. [II] a(n)*ß^n + a(n-1)*ß^(n-1) + . . . + a(0) = 0.
[I] - [II] ergibt: p(n,x) = a(n)*(x^n - ß^n) + . . . + a(1)*(x - ß).
Der Linearfaktor (x - ß) teilt alle (x^k - ß^k) und man erhält
(x^k - ß^k) / (x - ß) = (x^(k-1) + x^(k-2)*ß + . . . + ß^(k-1)).
Nach Herausheben des Faktors (x - ß) erhält man schließlich
ein Polynom vom Grad (n-1).
Also gilt p(n,x) = (x - ß) * p(n-1,x).

Wir können nun den Fundamentalsatz und den bewiesenen
Zerfällungssatz auf das Polynom p(n-1,x) anwenden, usw.
Daraus folgt, dass jedes Polynom n-ten Grades genau n
Nullstellen hat und in ein Produkt von n Linearfaktoren zerfällt.

Kommt in dieser vollständigen Zerfällung eine Nullstelle ß
mit dem Faktor (x - ß)^k vor, dann hat diese Nullstelle die
Vielfachheit k.

Der Satz von der komplexen Nullstelle

Ist ß = a + i*b eine komplexe Nullstelle von p(n,x), dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl ß1 = a - i*b eine Nullstelle.

Beweis: Wenn (a + i*b)^n = c + i*d, dann (a - i*b)^n = c - i*d.
Wenn p(n,ß) = c + i*d, dann p(n,ß1) = c - i*d. Nun ist p(n,ß) = 0, also c = 0 und d = 0. Daraus folgt, dass auch p(n,ß1) = 0 ist.
Folgerung: Jede Polynomfunktion von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Ein Satz über die Vielfachheit von Nullstellen

Hat die Funktion p(n,x) eine Nullstelle ß mit der Vielfachheit k, dann ist ß eine Nullstelle der ersten Ableitungsfunktion p(n,x)' mit der Vielfachheit (k-1).

Beweis: p(n,x) = (x - ß)^k * p(n-k,x).
p(n,x)' = k*(x - ß)^(k-1)*p(n-k,x) + (x - ß)^k*p(n-k,x)'.
p(n,x)' = (x - ß)^(k-1) * [k*p(n-k,x) + (x - ß)*p(n-k,x)'].

Folgerung: ß ist Nullstelle aller Ableitungsfunktionen bis zur k-ten Stufe. ß ist aber keine Nullstelle der (k+1)-ten Ableitung.
Folgerung: Ist ß eine reelle Nullstelle von ungerader Vielfachheit, dann liegt ein Scheitelpunkt vor, bei gerader Vielfachheit liegt ein Wendepunkt vor.

Ein Schrankensatz für reelle Nullstellen

Es ist p(n,x) ein normiertes Polynom (a(n) = 1) und s ist das
Maximum von { 1, |a(n-1)|, |a(n-2)|, . . . ,|a(0)| }, dann gilt für
alle reellen Nullstellen ß von p(n,x), dass |ß| <= (s + 1) ist.

Indirekter Beweis (Annahme des Gegenteils der Behauptung):
p(n,x) = x^n + a(n-1)*x^(n-1) + a(n-2)*x^(n-2) + . . . + a(1)*x + a(0).
p(n,ß) = 0 mit |ß| > (s + 1), d.h. es gilt 1/|ß| < 1/(s+1) < 1.

Wir bilden die Hilfsfunktion g(x) = (p(n,x) - x^n) / x^n
| g(ß) | = | a(n-1)/ß + a(n-2)/ß^2 + . . . + a(0)/ß^n |
| g(ß) | <= | a(n-1)/ß | + | a(n-2)/ß^2 | + . . . + | a(0)/ß^n |
| g(ß) | <= s/|ß|+s/|ß^2|+...+s/|ß^n| = s/|ß|*(1+1/|ß|+...+1/|ß^n|)
| g(ß) | <= s/|ß| * (1 + 1/|ß| + . . . + 1/|ß^n| + 1/|ß^(n+1)| + . . .)

Der rechte Klammerausdruck in der letzten Zeile ist eine
konvergente geometrische Reihe, weil der Faktor 1/|ß| < 1.
Die unendliche Reihensumme ist 1 / (1 - 1/|ß|) = |ß| / (|ß| - 1).
| g(ß) | <= s / (|ß| - 1) < 1, wegen Annahme |ß| > (s + 1).

Daraus folgt p(n,ß) = ß^n * (g(ß) + 1) <> 0, weil | g(ß) | < 1.
p(n,ß) <> 0 ist aber ein Widerspruch zu p(n,ß) = 0.
Damit ist der Satz bewiesen.

Eine Anzahlschätzung für reelle Nullstellen (Vorzeichenregel von Boudan-Fourier)

Die Anzahl der positiven reellen Nullstellen N(+) von einer Funktion p(n,x), wobei jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt wird, ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von p(n,x) oder um eine gerade Zahl kleiner.

Die Anzahl der negativen reellen Nullstellen N(-) von einer Funktion p(n,x) wird abgeschätzt durch Anwendung dieser Vorzeichenregel auf p(n,-x).

Ein Beweis für diesen Lehrsatz wird hier nicht angegeben, hingegen ein einfaches Beispiel:

p(3,x) = 2*x^3 + 8*x^2 - 6*x - 4.
Vorzeichenfolge der Koeffizienten: + + - -. N(+) = 1.
p(3,-x) = -2*x^3 + 8*x^2 + 6*x - 4.
Vorzeichenfolge der Koeffizienten: - + + -. N(+) = 2 oder 0.

Polynomnormierung: q(3,x) = x^3 + 4*x^2 - 3*x - 2.
Schrankenbestimmung: s = Maximum von { 1, 4, 3, 2 } = 4.
Alle reellen Nullstellen (1 oder 3) liegen zwischen -5 und +5.

Der Lehrsatz von Vieta

Es sei p(n,x) eine normierte Polynomfunktion n-ten Grades:
p(n,x) = x^n + a(n-1)*x^(n-1) + . . . + a(0).
p(n,x) = (x - ß1) * (x - ß2) * . . . * (x - ßn).
Dabei sind ßi die n Nullstellen von p(n,x). (Zerfällungssatz).

Multipliziert man alle Linearfaktoren des zerfällten Polynoms,
dann erhält man: p(n,x) = x^n - (ß1 + ß2 + . . . + ßn)*x^(n-1) +
+ (ß1*ß2 + ß1*ß3 + . . . + ß(n-1)*ßn)*x^(n-2) - (ß1*ß2*ß3 + . . .) + . . .

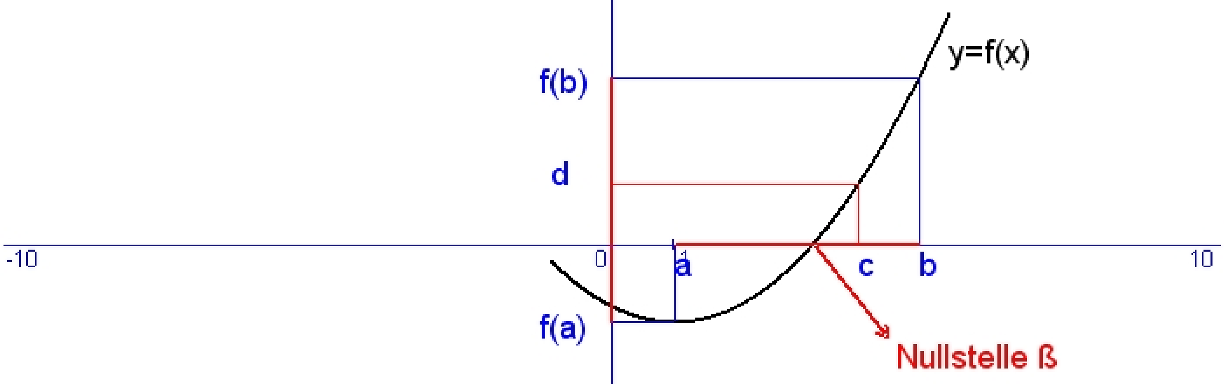
Vergleicht man nun die Koeffizienten des ursprünlichen Polynoms mit den Koeffizienten des ausmultiplizierten Polynoms,
dann gilt:

- a(n-1) = ß1 + ß2 + . . . + ßn.
+a(n-2) = ß1*ß2 + ß1*ß3 + . . . + ß(n-1)*ßn.
. . . .
(-1)^n*a(0) = ß1*ß2* . . . *ßn.

Dieser Lehrsatz von Vieta beschreibt den Zusammenhang
der Nullstellen und der Koeffizienten von p(n,x).
Folgerung: Ganzzahlige Nullstellen sind Teiler vom absoluten
Glied a(0) des normierten Polynoms p(n,x).

Der Zwischenwertsatz

Eine im Intervall [a;b] stetige Funktion y = f(x) ist beschränkt. Sie nimmt jeden zwischen f(a) und f(b) gelegenen Zahlenwert mindestens einmal an, wenn x alle Zahlen des Intervalls durchläuft. Für alle d aus [f(a);f(b)] gibt es ein c aus [a;b] mit f(c) = d.



Beweis: Es sei [a(n);b(n)] eine Intervallschachtelung mit fortgesetzter Halbierung und f(a(n)) <= d <= f(b(n)). Ihr innerster Punkt sei c, also lim {a(n)} = lim {b(n)} = c für n gegen Unendlich. Weil f(x) stetig ist, gilt lim {f(a(n))} = lim {f(b(n))} für n gegen Unendlich. Somit muss gelten: d = f(c).

Folgerung: Haben im Intervall [a;b] die Funktionswerte f(a) und f(b) verschiedenes Vorzeichen, dann liegt dort eine Nullstelle ß.

Intervallschachtelungen

Näherungverfahren für reelle Nullstellen
(Intervallschachtelungen)

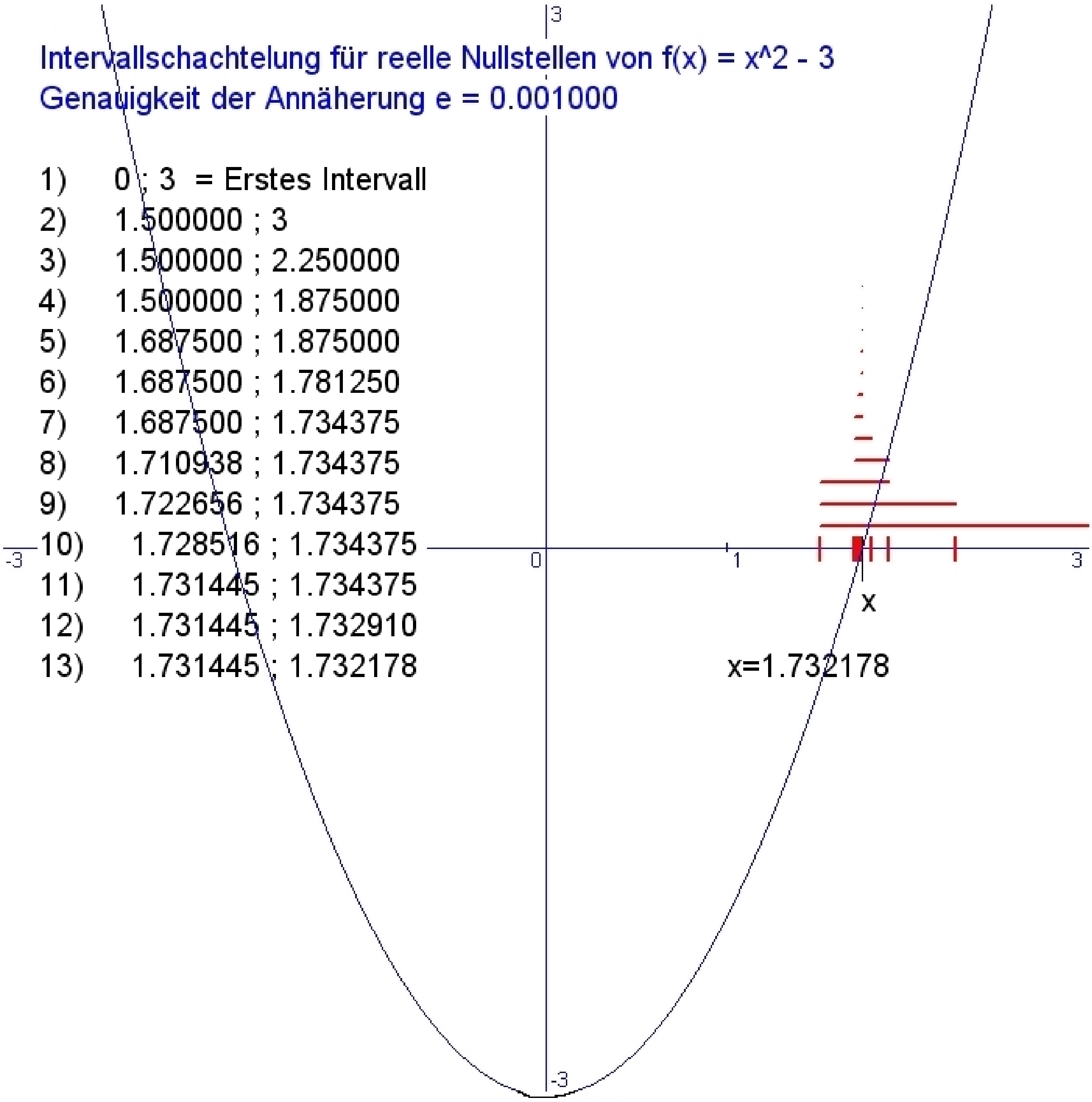
Eine Intervallschachtelung IS ist eine Folge von Intervallen [a(n) ; b(n)] in der reellen Zahlenmenge R. Der Index n durchläuft dabei die natürlichen Zahlen 0,1,2, ... Es liegt jedes Intervall zur Gänze im vorangehenden Intervall, d.h. es gilt:

Die linken Ränder a(n) sind eine monoton wachsende Folge.
Die rechten Ränder b(n) sind eine monoton fallende Folge.
Die Intervall-Längen l(n) = b(n) - a(n) bilden eine Nullfolge.

Somit konvergiert eine Intervallschachtelung genau auf einen innersten Punkt, der in allen Intervallen liegt.

Die Intervallschachtelungen sind ein wichtiges Verfahren zur schrittweisen Ermittlung von gesuchten Zahlenwerten. Weit verbreitet ist dabei die Bisektion, bei welcher die Längen der Intervalle fortlaufend halbiert werden.

Im Folgenden sollen zuerst mittels Intervallschachtelungen reelle Nullstellen der Funktion y = x^2 - d gesucht werden.
Dann werden reelle Nullstellen beliebiger Funktionen ermittelt.



Intervallschachtelung für reelle Nullstellen von f(x) = x^2 - 3
Genauigkeit der Annäherung e = 0.001000
1) 0 ; 3 = Erstes Intervall
2) 1.500000 ; 3
3) 1.500000 ; 2.250000
4) 1.500000 ; 1.875000
5) 1.687500 ; 1.875000
6) 1.687500 ; 1.781250
7) 1.687500 ; 1.734375
8) 1.710938 ; 1.734375
9) 1.722656 ; 1.734375
10) 1.728516 ; 1.734375
11) 1.731445 ; 1.734375
12) 1.731445 ; 1.732910
13) 1.731445 ; 1.732178
x=1.732178
x
3
-3
0
1
3
-3

Reelle Nullstellen

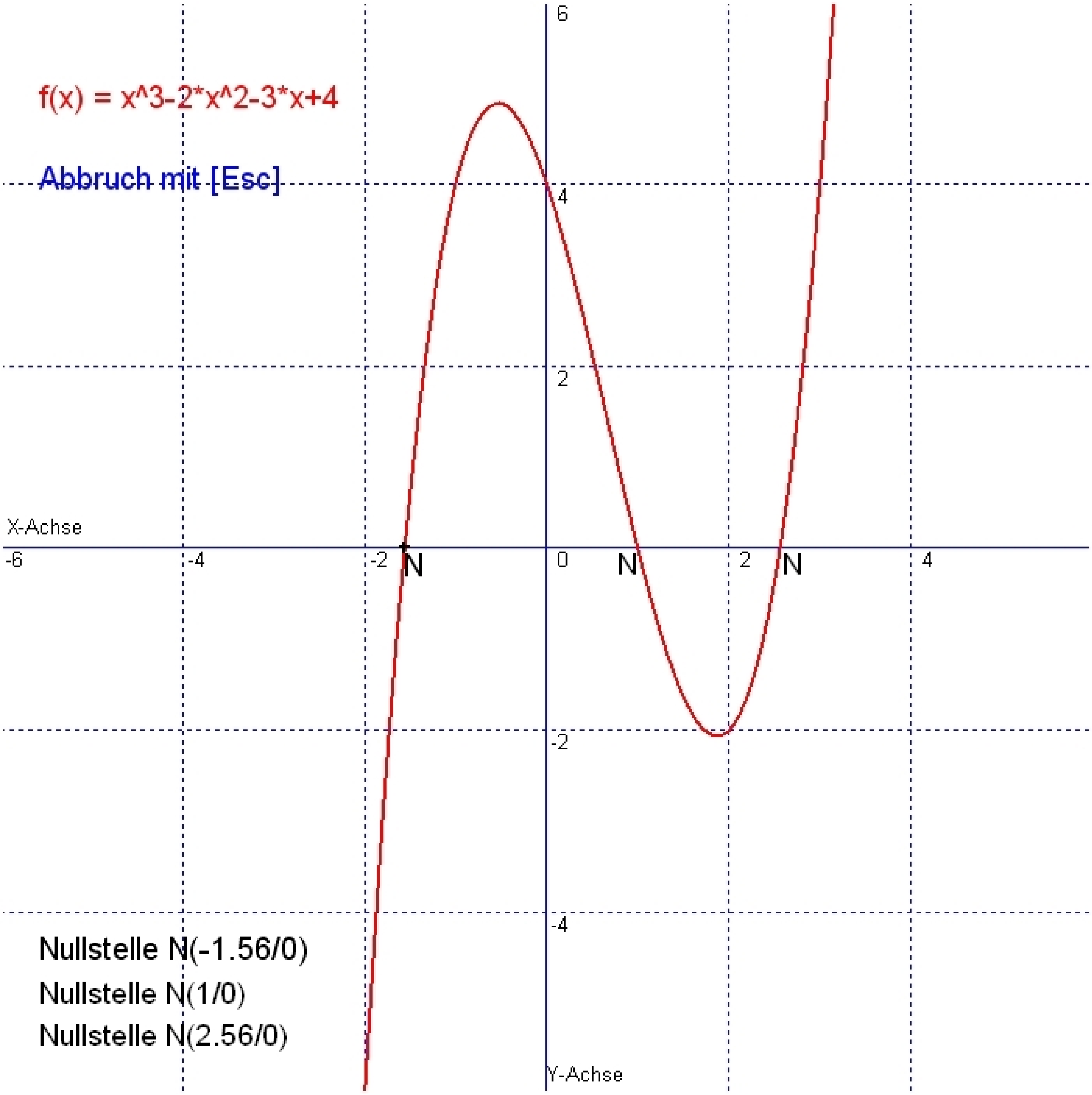
Reelle Nullstellen einer Funktion f(x)

Gesucht sind die rellen Lösungen der Gleichung f(x) = 0.
Die Funktion y = f(x) sei dabei stetig auf dem Intervall [a,b].

Sind die Vorzeichen von f(a) und f(b) ungleich, dann muss es in [a,b] eine Zahl c geben mit f(c) = 0. Das gilt deswegen, weil eine stetige Funktion keine Lücken hat (Zwischenwertsatz). Diese Zahl c nennt man eine Nullstelle von f(x).

Im nachfolgenden Programm werden die reellen Nullstellen nach der Methode der Intervallschachtelung ermittelt.

Dabei sucht man zuerst ein Intervall [a,b], in welchem f(x) das Vorzeichen wechselt, sgn(f(a)) <> sgn(f(b)). Von diesem wird der Mittelpunkt m ermittelt, der das Intervall halbiert, und f(m) bestimmt. Nun nimmt man jenes Teilintervall heraus, in dem ein Vorzeichenwechsel von f(x) stattfindet. Beispielsweise, wenn f(a) < 0, f(m) < 0 und f(b) > 0 sind, wird das rechte Teilintervall [m,b] genommen. Dieses wird wieder halbiert und das Verfahren so lange fortgesetzt bis f(m) < e ist, wobei e eine vorgegebene Größe (Genauigkeit) ist. Die so ineinander geschachtelten Intervalle schrumpfen schrittweise auf die gesuchte Nullstelle der Funktion.



f(x) = x^3-2*x^2-3*x+4
Abbruch mit [Esc]
6
4
2
X-Achse
-6
-4
-2
N
0
N
2
N
4
-2
-4
Nullstelle N(-1.56/0)
Nullstelle N(1/0)
Nullstelle N(2.56/0)
Y-Achse

ENDE von MATHE 3