

Herbert Paukert
Schulmathematik in 8 Bänden
Version 6.0, 2016

MATHE 4

Differenzialrechnung

MATHE, Band 1

Arithmetik - Unterstufe

MATHE, Band 2

Geometrie - Unterstufe

MATHE, Band 3

**Logik
Zahlenmengen
Algebra**

MATHE, Band 4

Differenzialrechnung

MATHE, Band 5

Integralrechnung

MATHE, Band 6

**Matrizenrechnung
Statistik
Wahrscheinlichkeit**

MATHE, Band 7

Trigonometrie

MATHE, Band 8

**Analytische Geometrie
Kegelschnittslinien
Geometrische Abbildungen**

Inhaltsverzeichnis

(1) Mathematische Funktionen	Seite 05
(2) Folgen und Reihen	Seite 33
(3) Differenzialrechnung, Teil 1	Seite 61
(4) Differenzialrechnung, Teil 2	Seite 79
(5) Wirtschaftliches Rechnen	Seite 93

Hinweis: In Dezimalzahlen wird anstelle eines Kommas ein Dezimalpunkt geschrieben.

Hinweis: Auf seiner Homepage www.paukert.at stellt der Autor viele weitere Lernhilfen aus unterschiedlichen Fachgebieten zur Verfügung.

FUNKTIONEN

Allgemeine Definition von Funktionen	[06]
Darstellung verschiedener Funktionen	[12]
Exponential- und Logarithmus-Funktion	[17]
Ungebremste Wachstumsprozesse	[23]
Gebremste Wachstumsprozesse	[26]

Allgemeine Definition von Funktionen

Eine Funktion f ist eine eindeutige Zuordnung von Elementen y einer Wertemenge W zu Elementen x einer Definitionsmenge D . Jedem Argument x ist genau ein Funktionswert y zugeordnet. Die Zuordnung ist festgelegt durch eine Zuordnungsvorschrift, meistens in Form einer Gleichung $y = f(x)$. Man sagt "f von x".

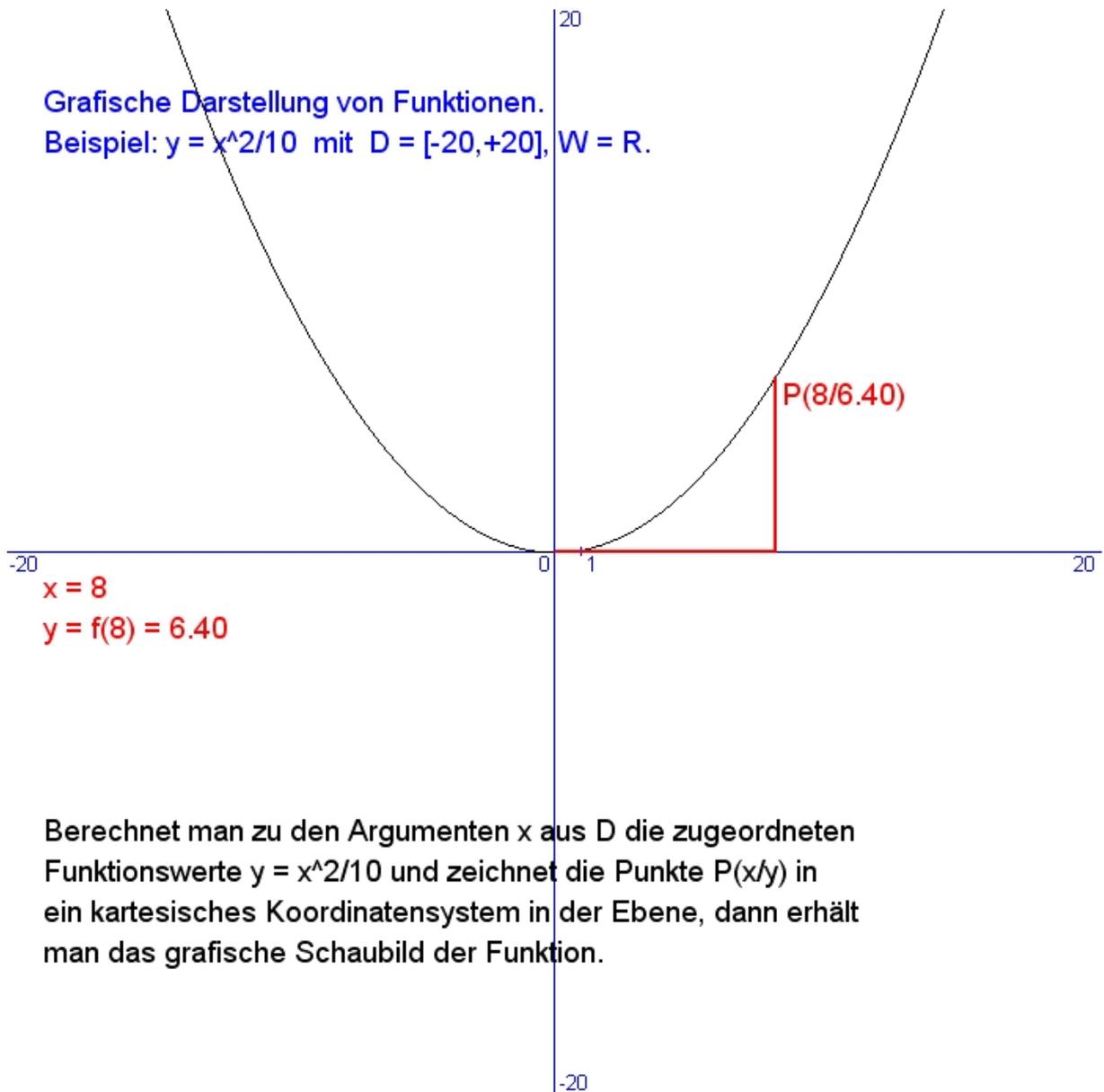
Beispiel: $D =$ reelle Zahlen \mathbb{R} , $W = \mathbb{R}$, $y = f(x) = 2 \cdot x$.
Jeder reellen Zahl x wird ihr doppelter Wert zugeordnet.
z.B. $f(-3) = -6$, $f(0) = 0$, $f(4.5) = 9$, usw.

Beispiel: $D =$ positive Zahlen \mathbb{R}^+ , $W = \mathbb{R}^+$, $y = f(x) = \sqrt{x}$.
Jeder positiven reellen Zahl x wird ihre Wurzel zugeordnet.
Würden wir alle reellen Zahlen als Wertemenge W zulassen, dann wäre diese Zuordnung zweideutig, weil $(+y)^2 = (-y)^2$ ist.
z.B. $f(1) = +1$, $f(2) = +1.41\dots$, $f(9) = +3$, usw.

Zwei elementare Funktionen:

$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$, $y = f(x) = c$. Konstante Funktion $y = c(x)$.
Hier wird jedem Argument x eine feste Zahl c zugeordnet.

$D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$, $y = f(x) = x$. Identische Funktion $y = i(x)$.
Hier wird jedes Argument x auf sich selbst abgebildet.



Zusammensetzung von Funktionen

Gegeben sind Funktionen auf der gleichen Definitionsmenge. Erzeugt man eine neue Funktion, indem man die gegebenen Funktionen addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert, dann spricht man von einer zusammengesetzten Funktion. Beispielsweise $h(x) = f(x) + g(x)$.

Verkettung von Funktionen

Gegeben sind zwei Funktionen f und g in der Weise, dass die Wertemenge der ersten Funktion in der Definitionsmenge der zweiten Funktion liegt. Wird der Funktionswert von f zum Argument von g , dann erhält man eine verkettete Funktion. $h(x) = g(f(x))$ mit f als "innerer" und g als "äußerer" Funktion.

Umkehrung von Funktionen

Wenn eine gegebene Funktion $y = f(x)$ eineindeutig ist, d.h. jedem Funktionswert y entspricht genau ein Argument x , dann existiert eine Funktion $x = g(y)$ in der Weise, dass die Verkettung $g(f(x)) = i(x)$ die identische Funktion ist. Diese Funktion g heißt Umkehrfunktion von f . Beispielsweise ist $x = y/2$ die Umkehrfunktion von $y = 2 \cdot x$, weil $(2 \cdot x)/2 = x$ ist.

Definitionsmenge und Wertemenge seien immer die reellen Zahlen.

Beispiel einer Zusammensetzung von Funktionen:

$$f: y = f(x) = x^2$$

$$g: y = g(x) = 3x - 1$$

$$h: y = h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x - 1$$

Beispiel einer Verkettung von Funktionen:

$$f: y = f(x) = x^2$$

$$g: y = g(x) = 3x - 1$$

$$h: y = h(x) = g(f(x)) = 3x^2 - 1$$

Der Funktionswert von f wird zum Argument von g .

Beispiel einer Umkehrung von Funktionen:

$$f: y = f(x) = x^2$$

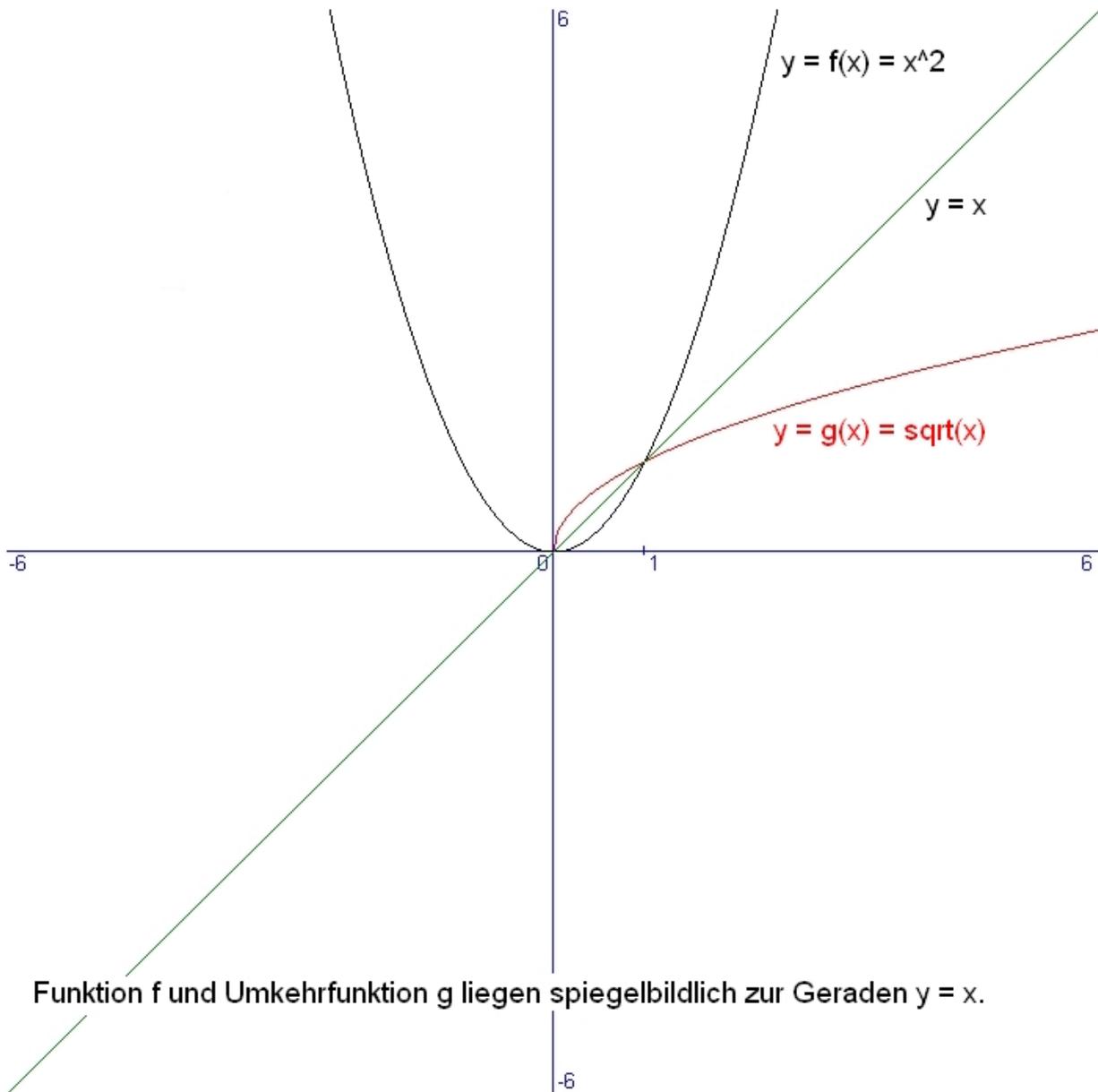
$$g: x = g(y) = \sqrt{y}$$

Namenstausch von x und y :

$$g: y = g(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{Verkettung } g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x = i(x)$$

Die Verkettung einer Funktion f mit ihrer Umkehrfunktion g ergibt immer die identische Funktion.



Klassifizierung der Funktionen:

Lineare Funktionen: $y = k \cdot x + d$ mit konstanten k und d aus \mathbb{R} .

Potenzfunktionen: $y = k \cdot x^n$ mit Hochzahlen n aus \mathbb{N} .

Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten $a(0), a(1), \dots, a(n)$:

$$y = a(n) \cdot x^n + a(n-1) \cdot x^{(n-1)} + \dots + a(2) \cdot x^2 + a(1) \cdot x + a(0).$$

Die größte Hochzahl n aus \mathbb{N} heißt der Grad des Polynoms.

Rationale Funktionen als Quotient zweier Polynomfunktionen
 $h(x) = f(x) / g(x)$, wobei $h(x)$ in den Nullstellen des Nennnerpolynoms $g(x)$ nicht definiert oder Unendlich ist. Man spricht dann von Lücken oder Polstellen der Funktion.

Rationale Funktionen kann man sich als Zusammensetzung aus der konstanten und der identischen Funktion vorstellen.

Wurzelfunktionen $y = x^{(1/n)}$ mit Hochzahlen n aus \mathbb{N} .

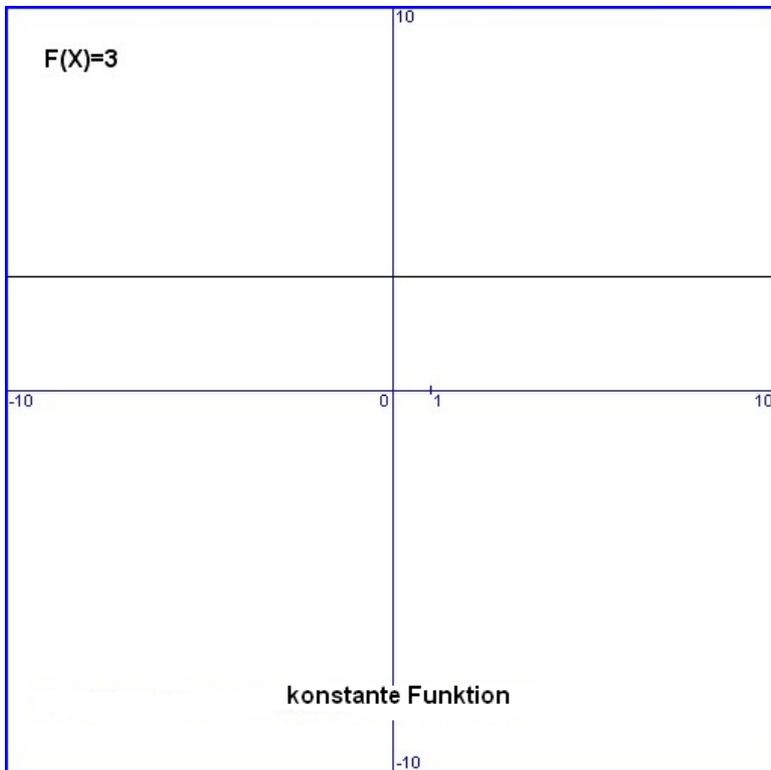
Sie sind die Umkehrungen der Potenzfunktionen $y = x^n$.

Trigonometrische- und Arcus-Funktionen.

Exponential- und Logarithmus-Funktionen.

Weitere besondere Funktionen.

Darstellung verschiedener Funktionen

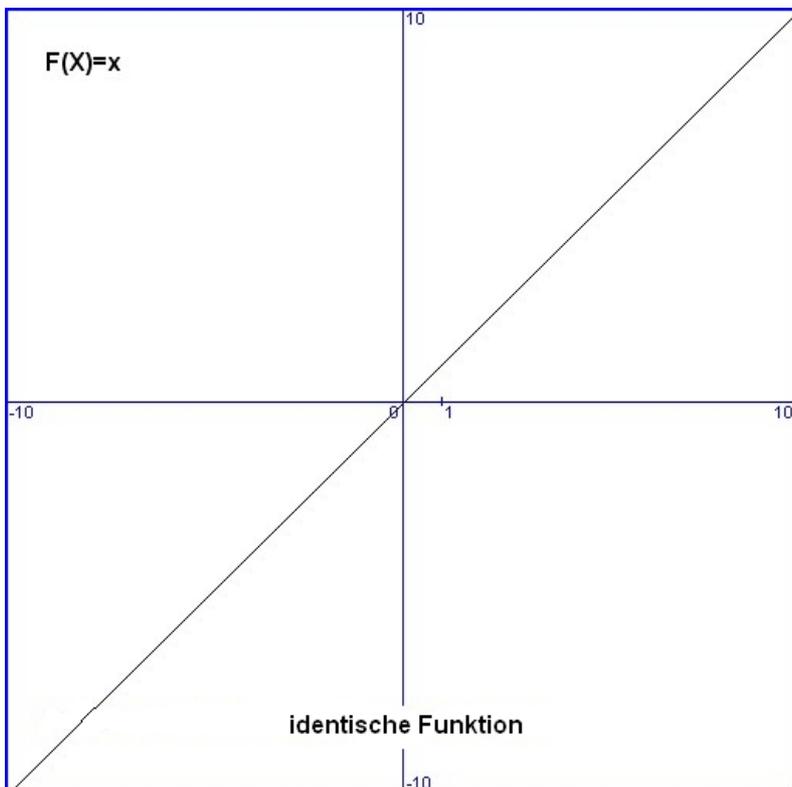


$$F(x) = 3$$

Wertetabelle

x $y=F(x)$

-5	3
-4	3
-3	3
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3
3	3
4	3
5	3

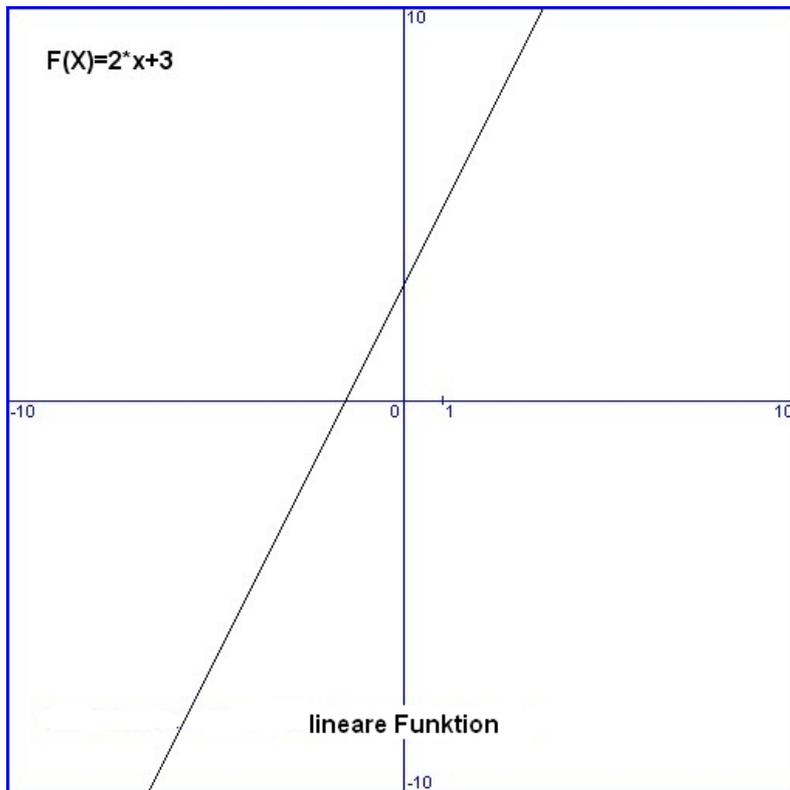


$$F(x) = x$$

Wertetabelle

x $y=F(x)$

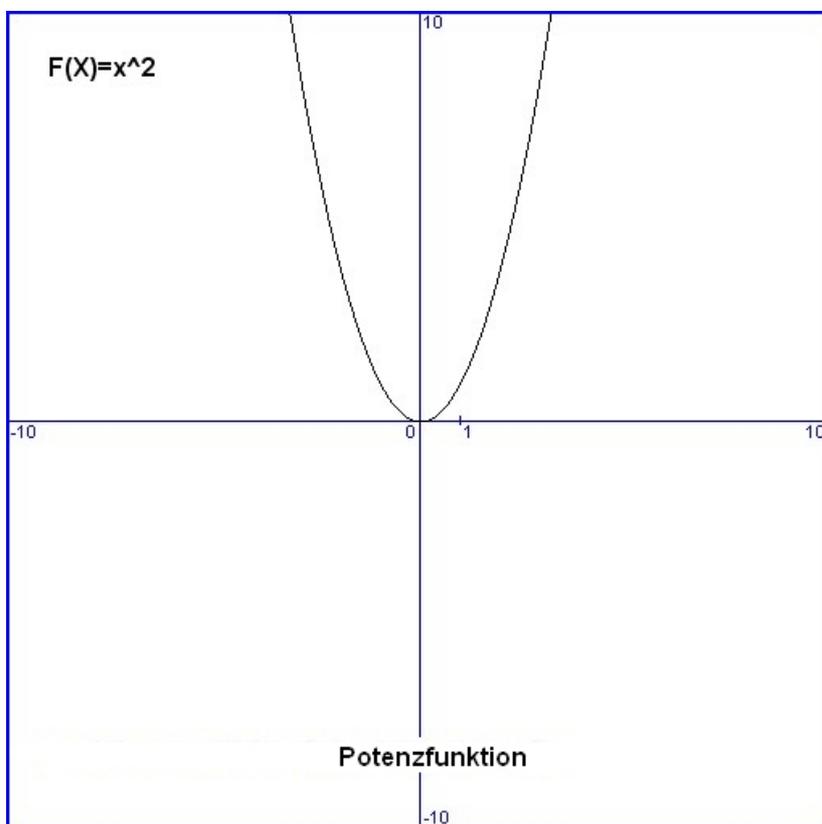
-5	-5
-4	-4
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5



$$F(x) = 2 \cdot x + 3$$

Wertetabelle

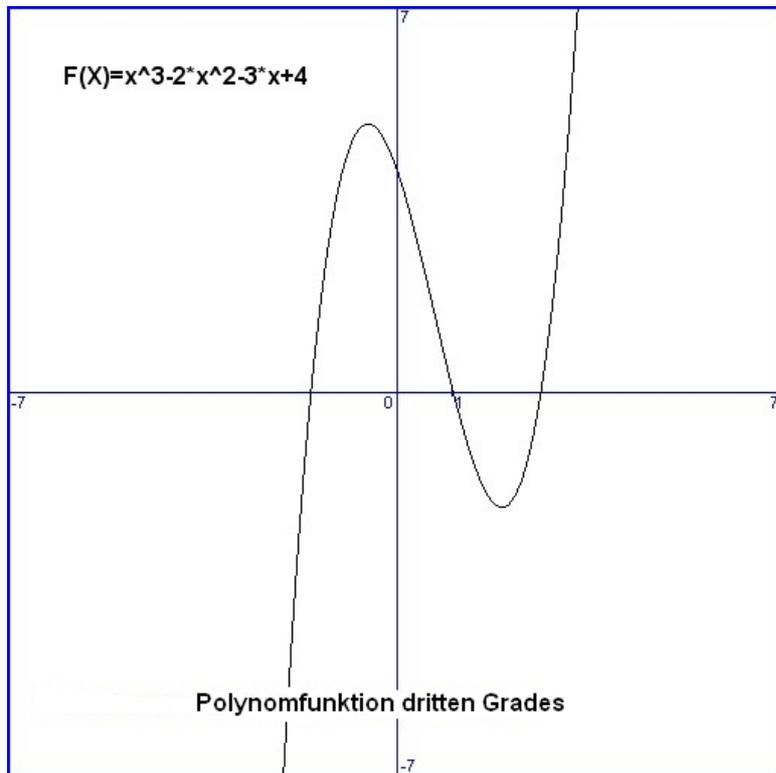
x	y=F(x)
-5	-7
-4	-5
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13



$$F(x) = x^2$$

Wertetabelle

x	y=F(x)
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

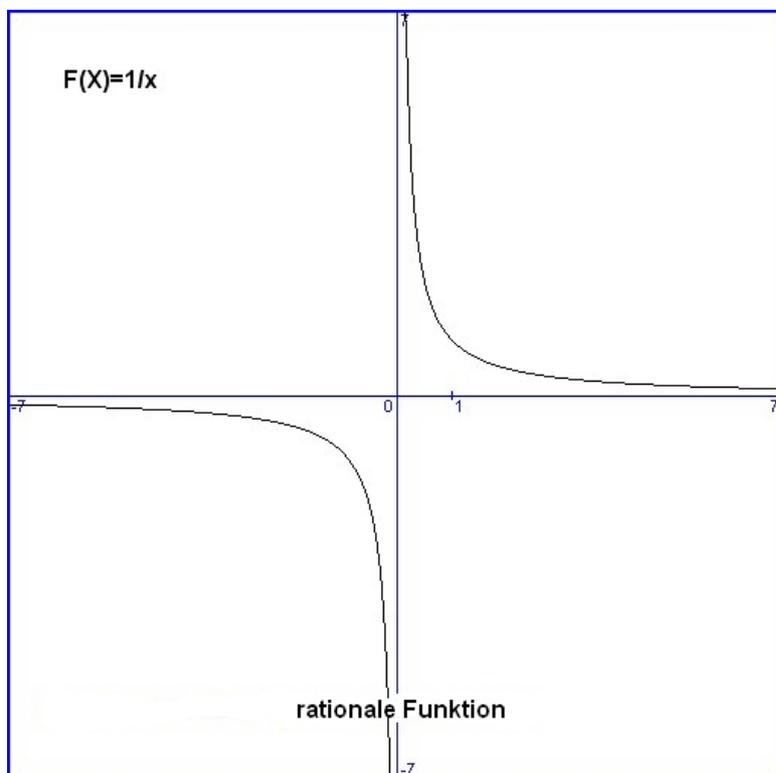


$$F(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Wertetabelle

x y=F(x)

-5	-96
-4	-40
-3	-8
-2	6
-1	8
0	4
1	0
2	2
3	16
4	38
5	104

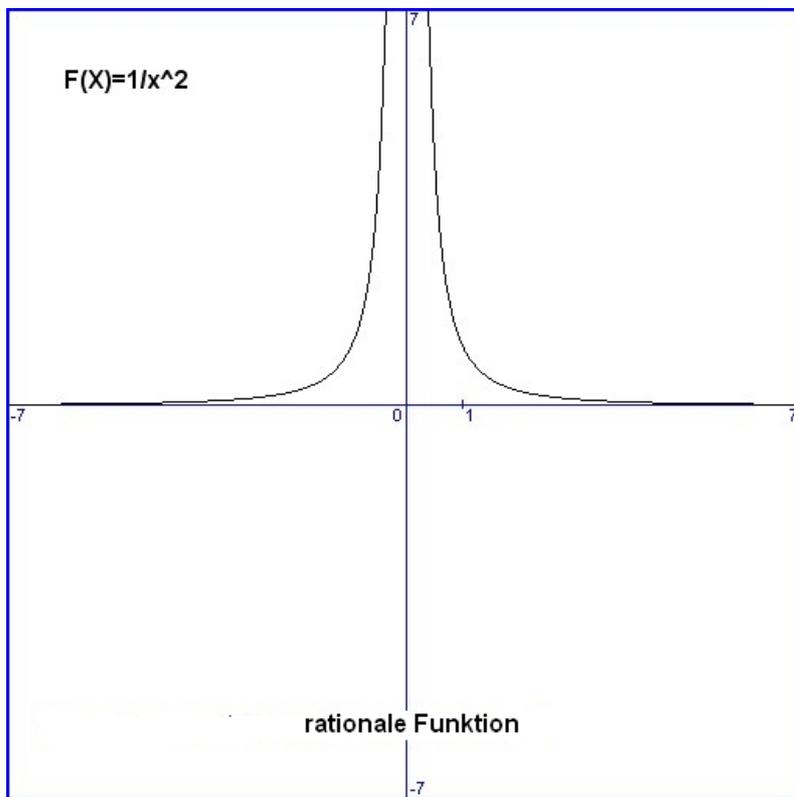


$$F(x) = 1/x$$

Wertetabelle

x y=F(x)

-5	-0.20
-4	-0.25
-3	-0.33
-2	-0.50
-1	-1.00
0	undefiniert
1	1
2	0.50
3	0.33
4	0.25
5	0.20

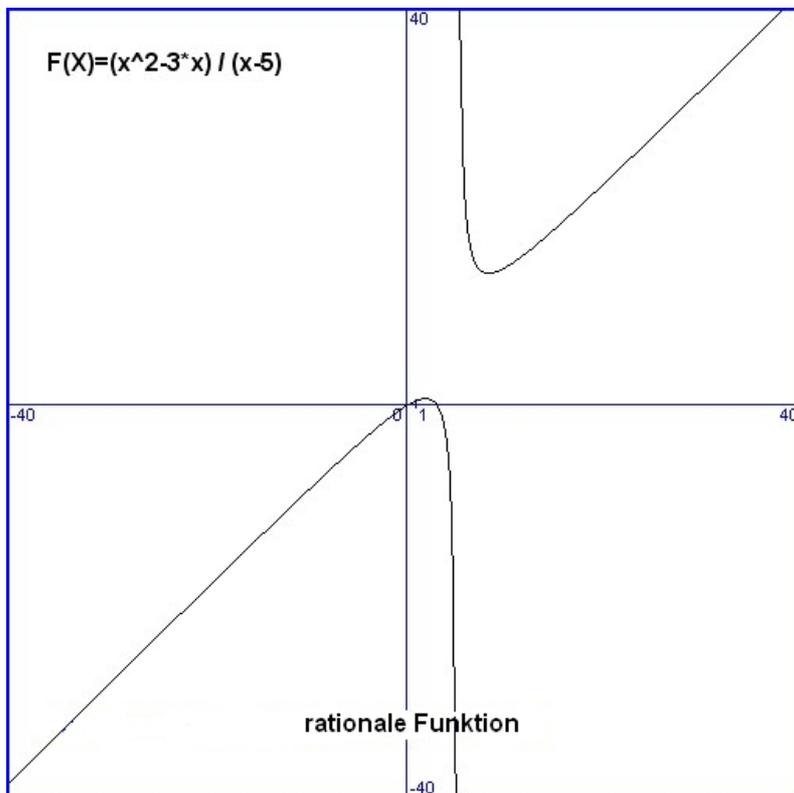


$$F(x) = 1/x^2$$

Wertetabelle

x y=F(x)

-5	0.04
-4	0.06
-3	0.11
-2	0.25
-1	1.00
0	undefiniert
1	1.00
2	0.25
3	0.11
4	0.06
5	0.04

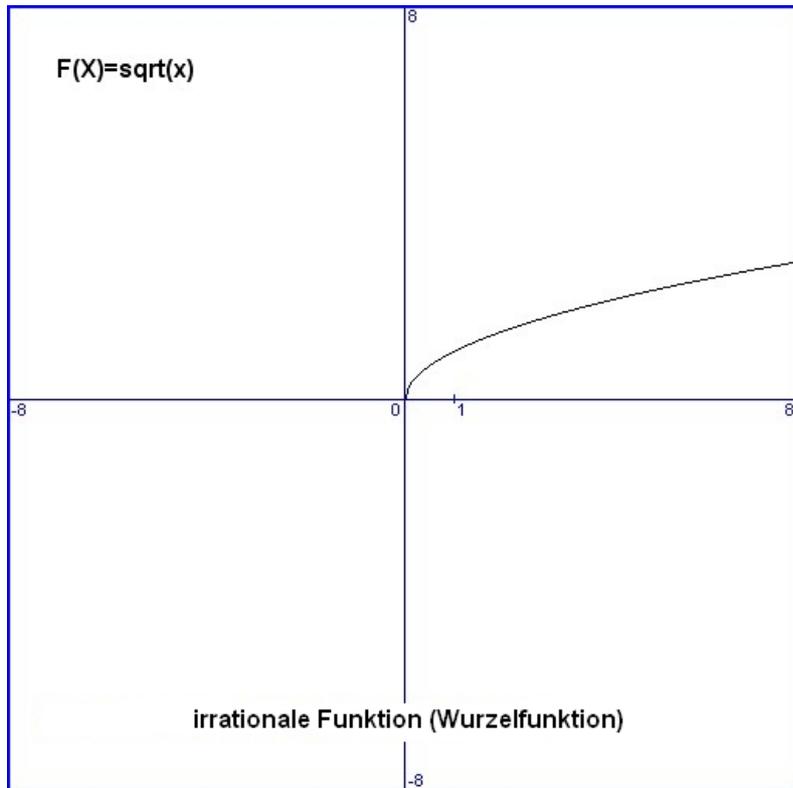


$$F(x) = (x^2 - 3x) / (x - 5)$$

Wertetabelle

x y=F(x)

-7	-5.83
-6	-4.91
-5	-4.00
-4	-3.11
-3	-2.25
-2	-1.43
-1	-0.67
0	0.00
1	0.50
2	0.67
3	0.00
4	-4.00
5	undefiniert
6	18.00
7	14.00

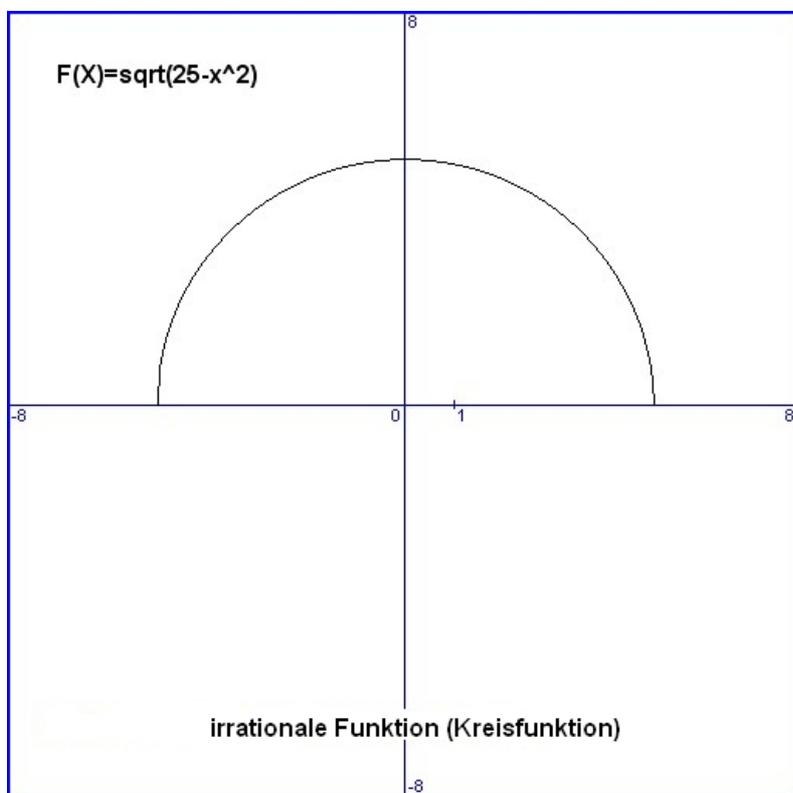


$$F(x) = \sqrt{x}$$

Wertetabelle

x y=F(x)

-5	undefiniert
-4	undefiniert
-3	undefiniert
-2	undefiniert
-1	undefiniert
0	0.00
1	1.00
2	1.41
3	1.73
4	2.00
5	2.24



$$F(x) = \sqrt{25-x^2}$$

Wertetabelle

x y

-7	undefiniert
-6	undefiniert
-5	0.00
-4	3.00
-3	4.00
-2	4.58
-1	4.90
0	5.00
1	4.90
2	4.58
3	4.00
4	3.00
5	0.00
6	undefiniert
7	undefiniert

Exponential- und Logarithmus-Funktionen

Exponential- und Logarithmus-Funktion

Ist in einer Potenz die Grundzahl (Basis) a eine feste reelle, positive Zahl und die Hochzahl (Exponent) x eine beliebig veränderliche reelle Zahl, dann heißt die entstehende Funktion $y = a^x$ eine Exponentialfunktion. Ein besonderer Fall ist die natürliche Exponentialfunktion, deren Basis die Eulersche Zahl e ist: $y = e^x = \exp(x)$ mit $e = 2.718\dots$

Der Logarithmus c ist jene Hochzahl mit der man eine Basis a potenzieren muss, um eine gegebene Zahl b zu erhalten, d.h. wenn $b = a^c$, dann schreibt man $c = a \log(b)$ und sagt dazu: " c ist der Logarithmus von b zur Basis a ".

$$3 \log(81) = 4, \text{ weil } 3^4 = 81$$

$$10 \log(100) = 2, \text{ weil } 10^2 = 100$$

$$10 \log(0.01) = -2, \text{ weil } 10^{-2} = 1/100 = 0.01$$

Wird die Potenz b als Variable x genommen, erhält man eine Logarithmusfunktion $y = a \log(x)$ mit $x = a^y = a^{(a \log(x))}$. So ist der Logarithmus die Umkehrung der Exponentialfunktion. Bei $a = e$ spricht man vom natürlichen Logarithmus $y = \ln(x)$. Bei $a = 10$ spricht man vom dekadischen Logarithmus $y = \lg(x)$. Alle Logarithmen sind nur für positive reelle Zahlen definiert.

Rechnen mit Logarithmen

Weil Logarithmen nichts anderes als Hochzahlen sind, gelten auf Grund der Potenzregeln folgende logarithmische Rechenregeln:

Es sind $x = a^r$ und $y = a^s$, d.h. $r = \log(x)$ und $s = \log(y)$.

Es gilt: $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, weil $x \cdot y = a^r \cdot a^s = a^{(r + s)}$.

Es gilt: $\log(x / y) = \log(x) - \log(y)$, weil $x / y = a^r / a^s = a^{(r - s)}$.

Es gilt: $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$, weil $x^n = (a^r)^n = a^{(n \cdot r)}$.

Beispiel: Zusammenfassen von Logarithmen mit gleicher Basis

$$2 \cdot \log(5) + 3 \cdot \log(a) - (\log(b) + \log(c)) / 2 =$$

$$\log(25) + \log(a^3) - \log(b \cdot c) / 2 =$$

$$\log(25 \cdot a^3) - \log(\sqrt{b \cdot c}) =$$

$$\log(25 \cdot a^3 / \sqrt{b \cdot c})$$

Beispiel: Umwandeln von Logarithmen mit verschiedener Basis

$$b \log(x) / b \log(a) = a \log(x)$$

Beweis: $x = a^{(a \log(x))}$, beidseitiges Logarithmieren ergibt

$$b \log(x) = b \log(a^{(a \log(x))}) = a \log(x) \cdot b \log(a)$$

$$b \log(x) / b \log(a) = a \log(x)$$

Logarithmus-Gleichungen

Gleichungen, bei denen die Unbekannte x im Logarithmus vorkommt, nennt man Logarithmusgleichungen. Diese können mit Hilfe der logarithmischen Rechenregeln gelöst werden.

$$\text{Beispiel: } \ln(3) + \ln(x + 4) - \ln(2^x - 8) = 1$$

$$\ln\left(\frac{3(x + 4)}{2^x - 8}\right) = \ln(e)$$

$$3(x + 4) / (2^x - 8) = e$$

$$3^x + 12 = 2^x e^x - 8^x e$$

$$(3 - 2^x e)^x = -8^x e - 12$$

$$x = (8^x e + 12) / (2^x e - 3) = 13.85$$

$$\text{Probe: } \ln(3.00) + \ln(17.85) - \ln(19.70) = 1$$

Exponential-Gleichungen

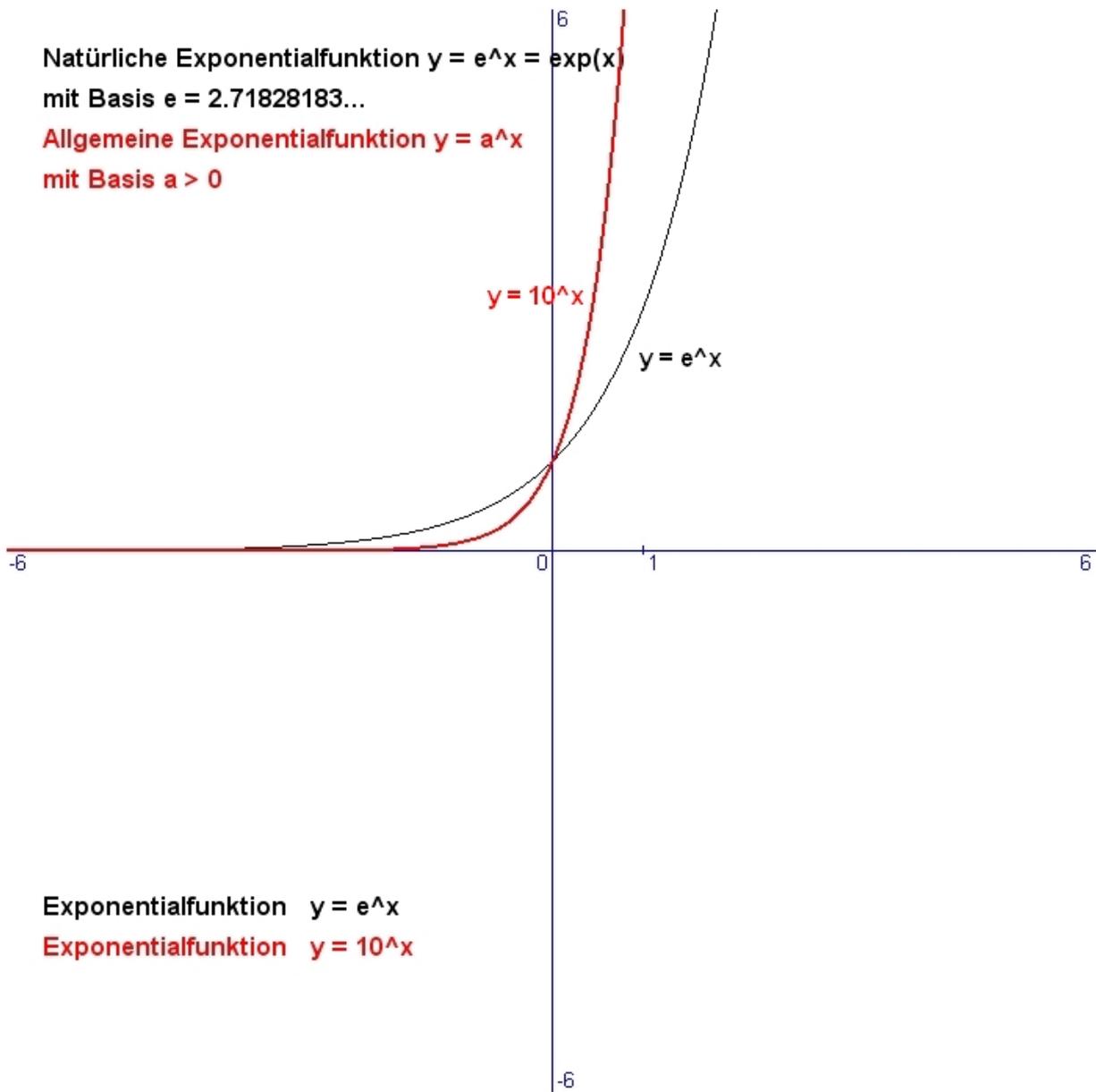
Gleichungen, bei denen die Unbekannte x im Exponenten vorkommt, nennt man Exponentialgleichungen. Diese können durch beidseitiges Logarithmieren gelöst werden.

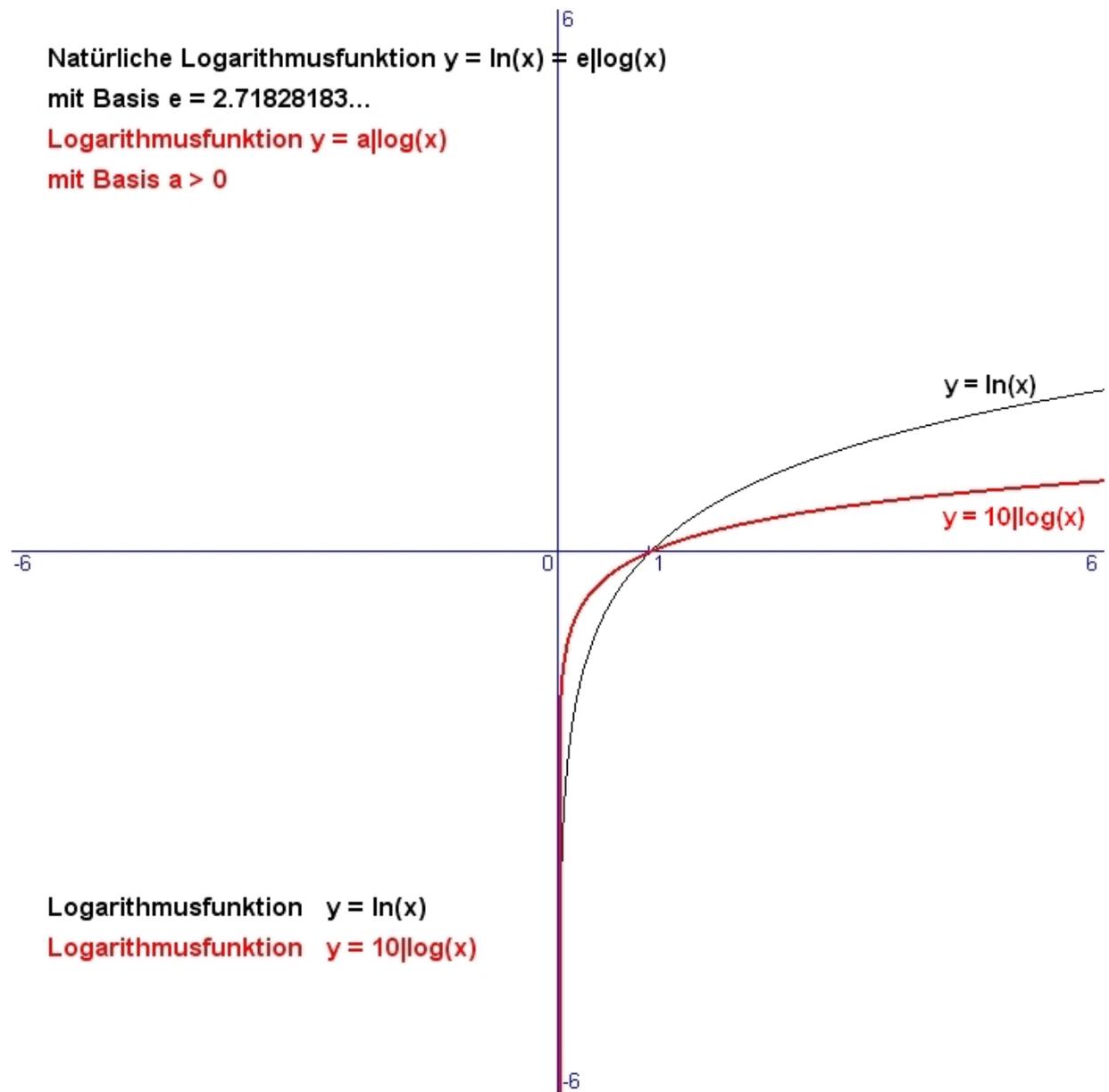
$$\text{Beispiel: } 3^{(2^x+1)} = 5$$

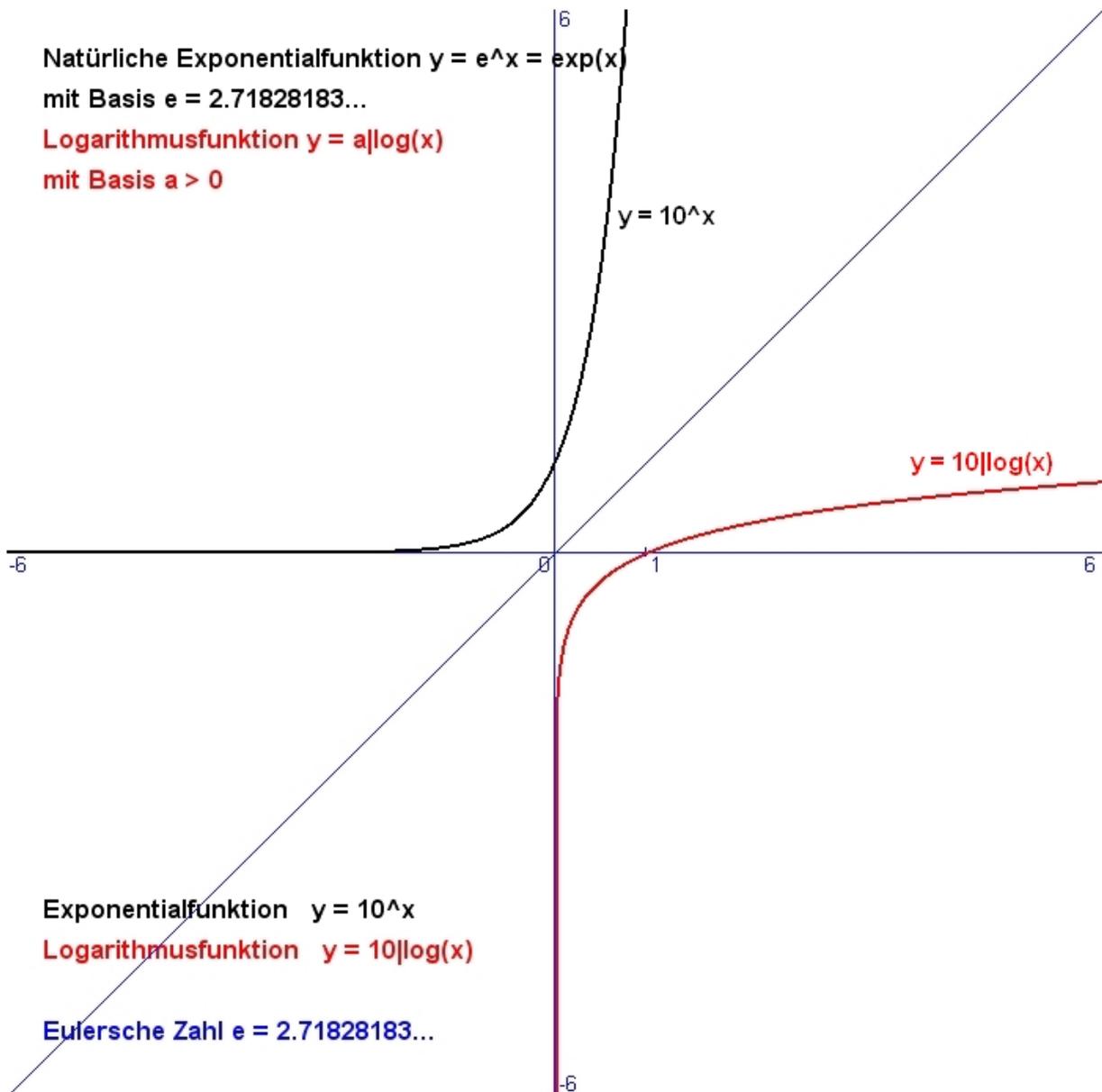
$$(2^x+1) \cdot \ln(3) = \ln(5)$$

$$2^x+1 = \ln(5) / \ln(3) = 1.46$$

$$\text{Daraus folgt } x = 0.23, \text{ und die Probe ergibt } 3^{1.46} = 5$$







Ungebremste Wachstumsprozesse

Ungebremstes Wachstum

Ungebremstes Wachstum kann durch folgende Formel beschrieben werden: $y = a \cdot \exp(k \cdot x)$. Dabei ist a der Anfangswert, y der Endwert nach der Zeit x , und k ist der Wachstumsfaktor. Dieser beschreibt die Geschwindigkeit des Wachstums, d.h. die Wertzunahme in der Zeiteinheit. Der Wachstumsfaktor kann sowohl positiv als auch negativ sein.

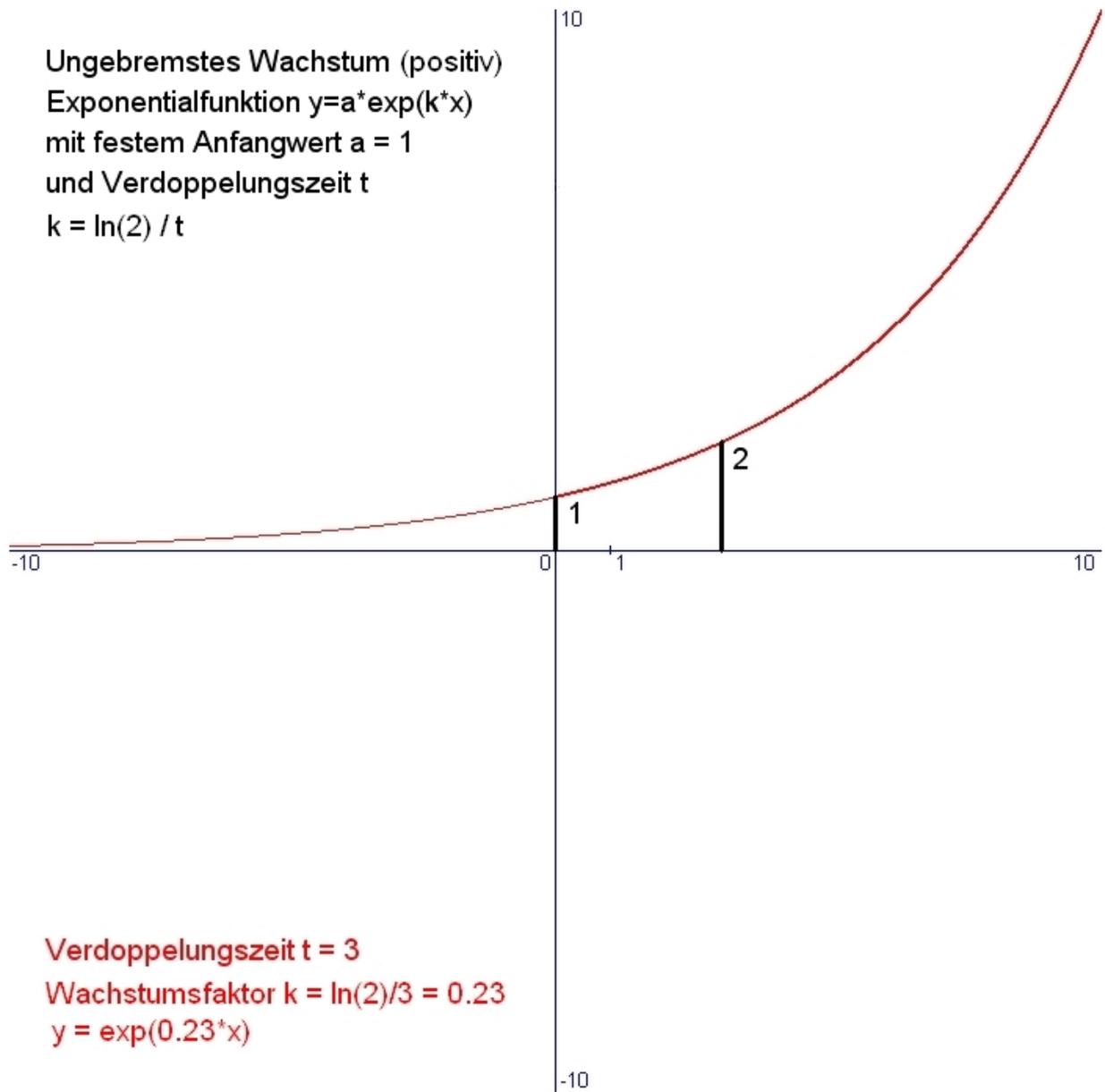
In der Praxis geht man dabei folgendermaßen vor: Aus empirischen Messungen wird die Verdoppelungszeit oder Halbwertszeit t eines sich stetig ändernden Wertes bestimmt.

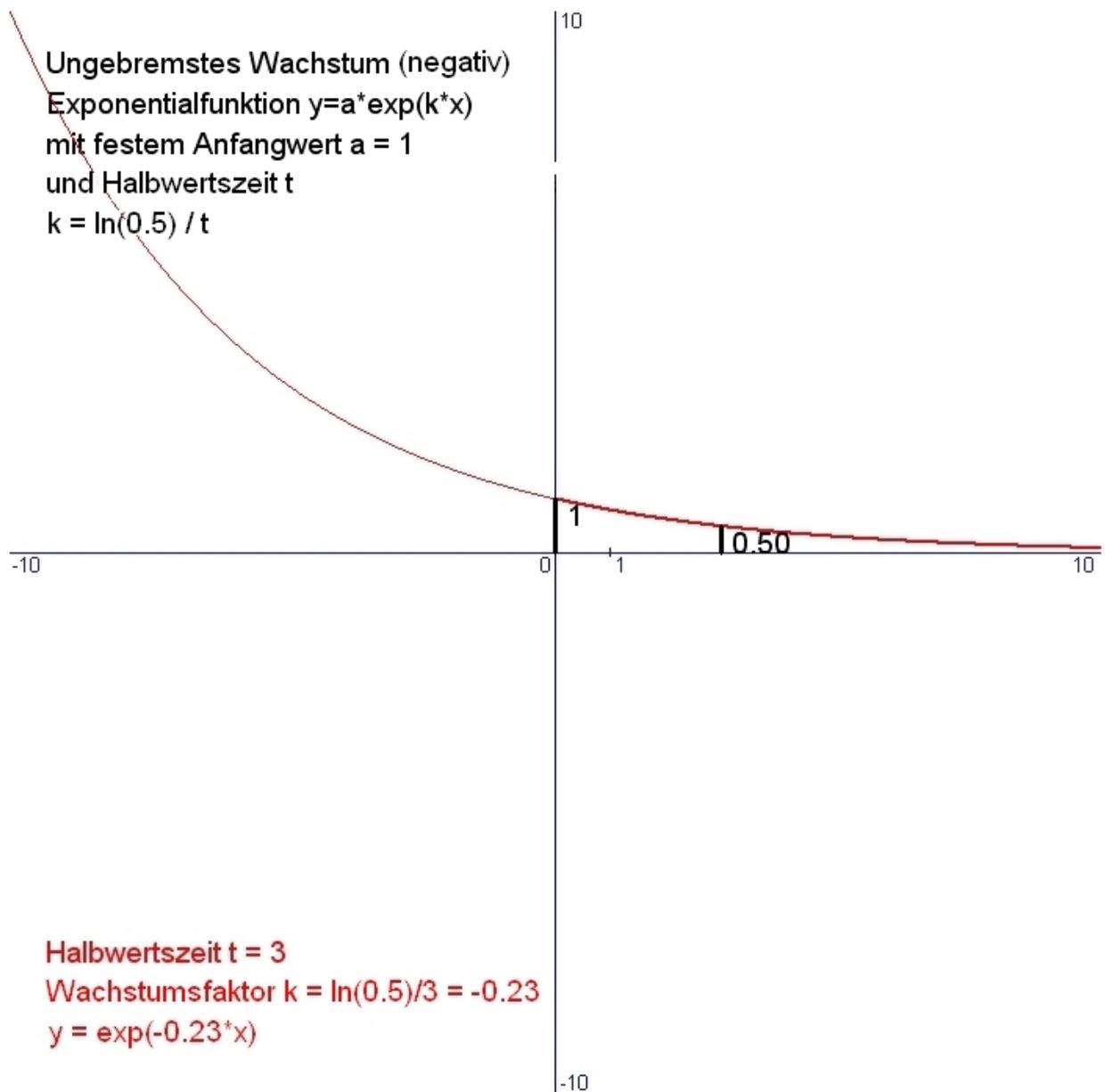
Der Wachstumsfaktor k kann dann ermittelt werden.

Bei Zunahme: $2 \cdot a = a \cdot \exp(k \cdot t)$, $k = \ln(2) / t$

Bei Abnahme: $a/2 = a \cdot \exp(k \cdot t)$, $k = \ln(0.5) / t$

Verschiedene Werte für k in obiger Formel führen zu verschiedenen Kurvenverläufen des ungebremsten positiven oder negativen Wachstums.





Gebremste Wachstumsprozesse

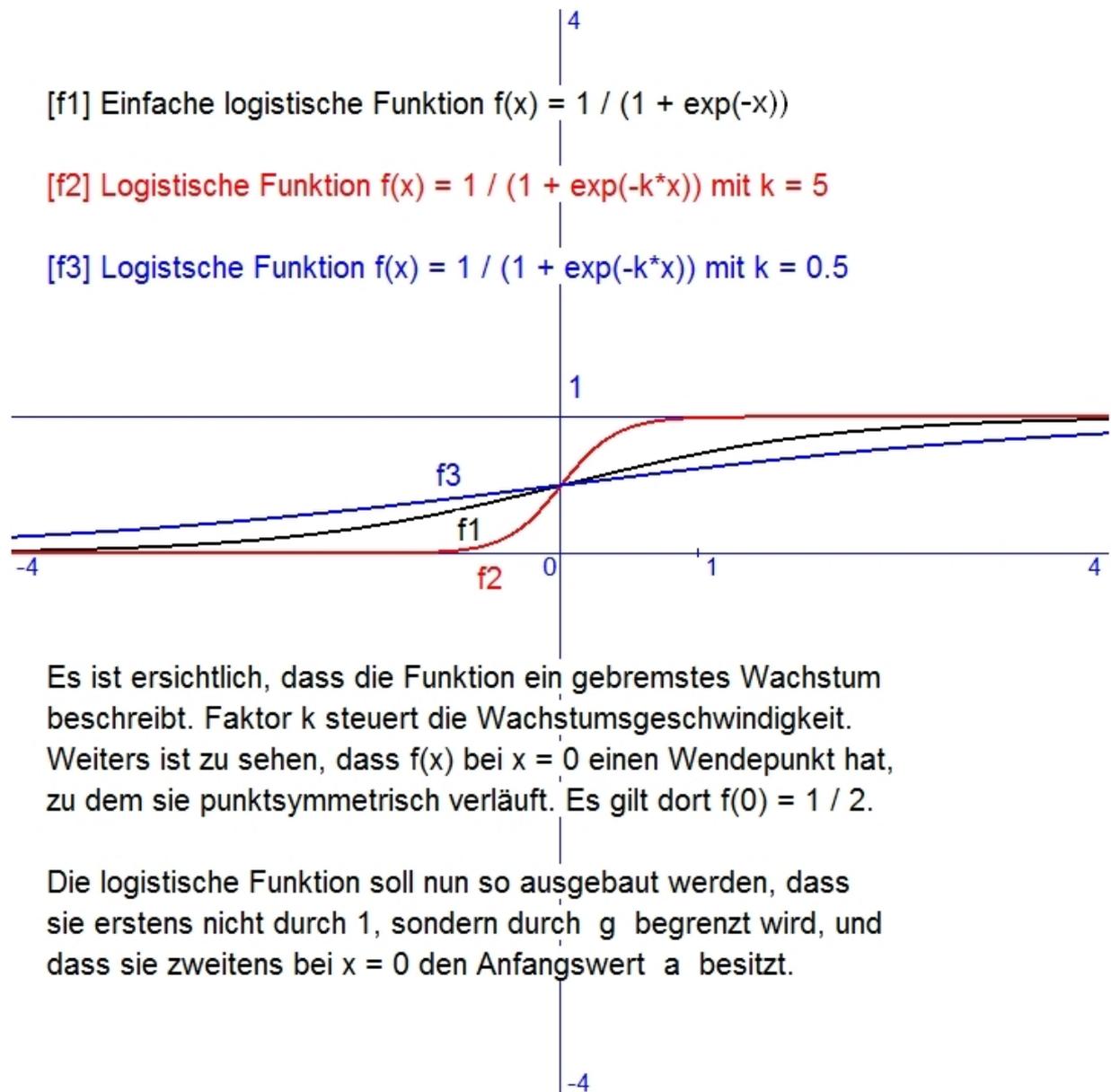
Gebremstes Wachstum

Ungebremstes Wachstum eines Merkmals wird durch die Formel beschrieben: $f(x) = a \cdot \exp(k \cdot x)$. a ist der Anfangswert, $f(x)$ der Endwert nach der Zeit x , und k ist der Wachstumsfaktor. Dieser Faktor k beschreibt die Geschwindigkeit des exponentiellen Wachstums.

Die meisten realen Wachstumsprozesse sind aber nicht ungebremst, weil nur begrenzte Ressourcen vorhanden sind. z.B. Bakterien auf einem Nährboden, Lebewesen in einem Territorium oder Produkte auf dem Markt.

Die Wachstumsgeschwindigkeit ist dabei zuerst langsam, dann schnell und schließlich wieder langsam. Weil eine Begrenzung vorliegt, muss das stetige Wachsen von $\exp(x)$ gestoppt werden. Das kann durch eine Division durch den Ausdruck $(1 + \exp(x))$ erfolgen. Dadurch strebt die so gebildete Funktion $f(x)$ gegen 1, wenn x gegen "+" Unendlich strebt. Sie wird hingegen 0, wenn x zu "-" Unendlich wird. Die Funktion nennt man "einfache logistische Funktion":

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{(1 + \exp(x))} = \frac{1}{(1 + \exp(-x))}$$



Zunächst können wir im Zähler statt 1 die Grenze g setzen und noch eine Konstante b einführen. Diese soll nun so bestimmt werden, dass $f(0) = a$ der Anfangswert ist.

$$f(x) = \frac{g}{(1 + b \cdot \exp(-k \cdot x))}$$

Es sei $f(0) = g / (1 + b) = a$. Daraus folgt $b = (g - a) / a$. Soll die Wachstumsgeschwindigkeit k in Bezug zur Grenze g angegeben werden, kann statt k auch $g \cdot k$ genommen werden. Setzt man b in die Funktion ein, erhält man nach Umformung:

$$f(x) = \frac{g \cdot a}{(a + (g - a) \cdot \exp(-k \cdot g \cdot x))}$$

So haben wir unsere endgültige logistische Funktion erhalten, die ein gebremstes Wachstum optimal beschreibt. Dabei sind g die Wachstumsgrenze, a der Anfangswert, k die Wachstumsgeschwindigkeit.

Eine nachfolgende Grafik veranschaulicht diese Sachverhalte. Zuvor sollen aber noch die Ableitungen gebildet werden.

Logistische Funktion: $f(x) = \frac{g \cdot a}{a + (g-a) \cdot \exp(-k \cdot g \cdot x)}$

Mit Hilfe der Differenzialregeln und Umformungen erhält man:

$$(I) \quad f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (g - f(x)), \quad 1. \text{ Ableitung}$$

$$(II) \quad f''(x) = k \cdot f'(x) \cdot (g - 2 \cdot f(x)), \quad 2. \text{ Ableitung}$$

Für den Wendepunkt $W(w/f(w))$ gilt: $f''(w) = 0$

$$f''(w) = k \cdot f'(w) \cdot (g - 2 \cdot f(w)) = 0$$

$$g - 2 \cdot f(w) = 0$$

$$g = 2 \cdot f(w)$$

$$f(w) = g / 2$$

Im Wendepunkt erreicht $f(x)$ die halbe Sättigungsgrenze g .

$$\text{Daher gilt: } g / 2 = \frac{g \cdot a}{a + (g-a) \cdot \exp(-k \cdot g \cdot w)}$$

Durch schrittweises Umformen erhält man schließlich:

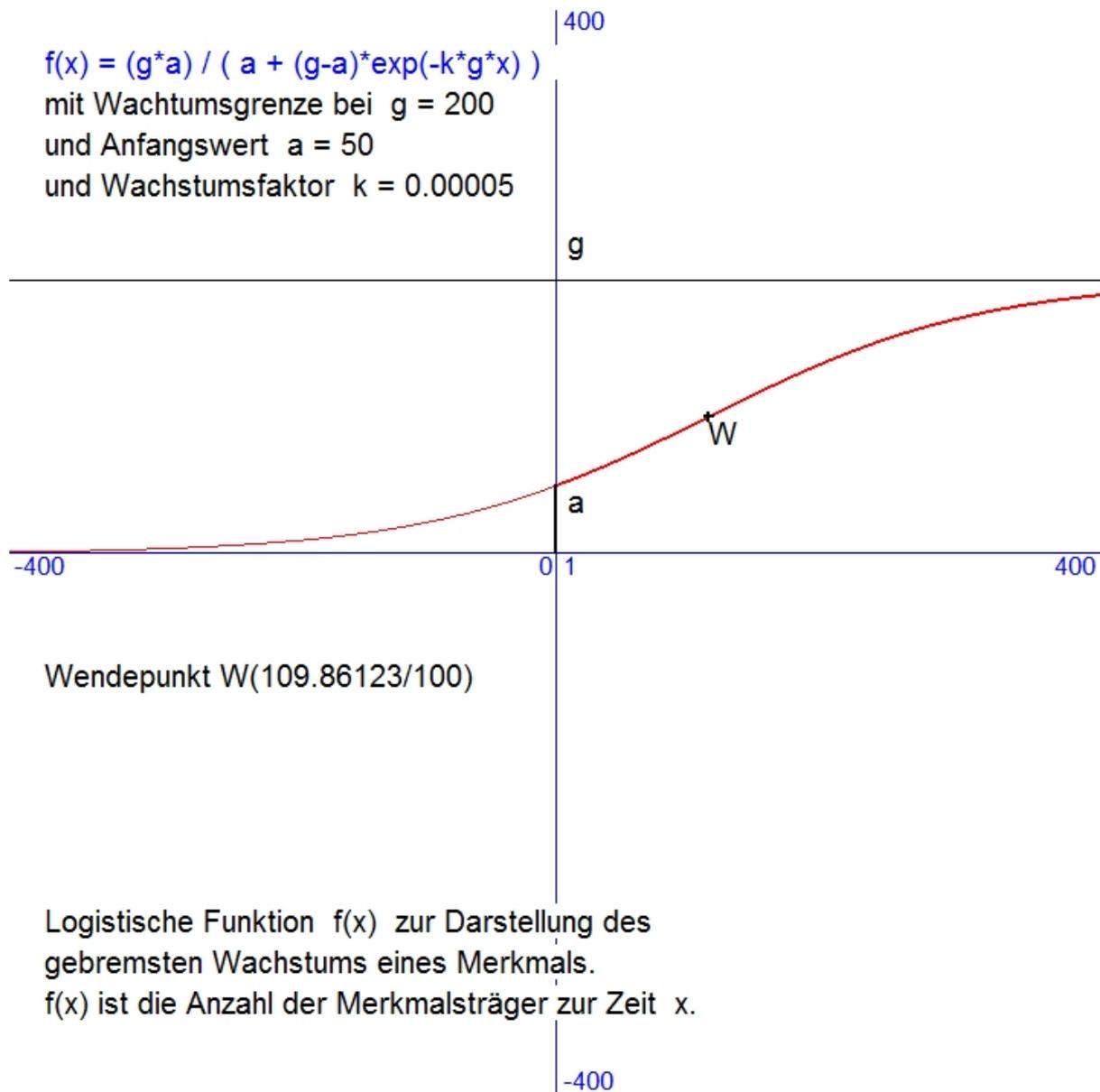
$$w = \ln((g-a)/a) / (k \cdot g)$$

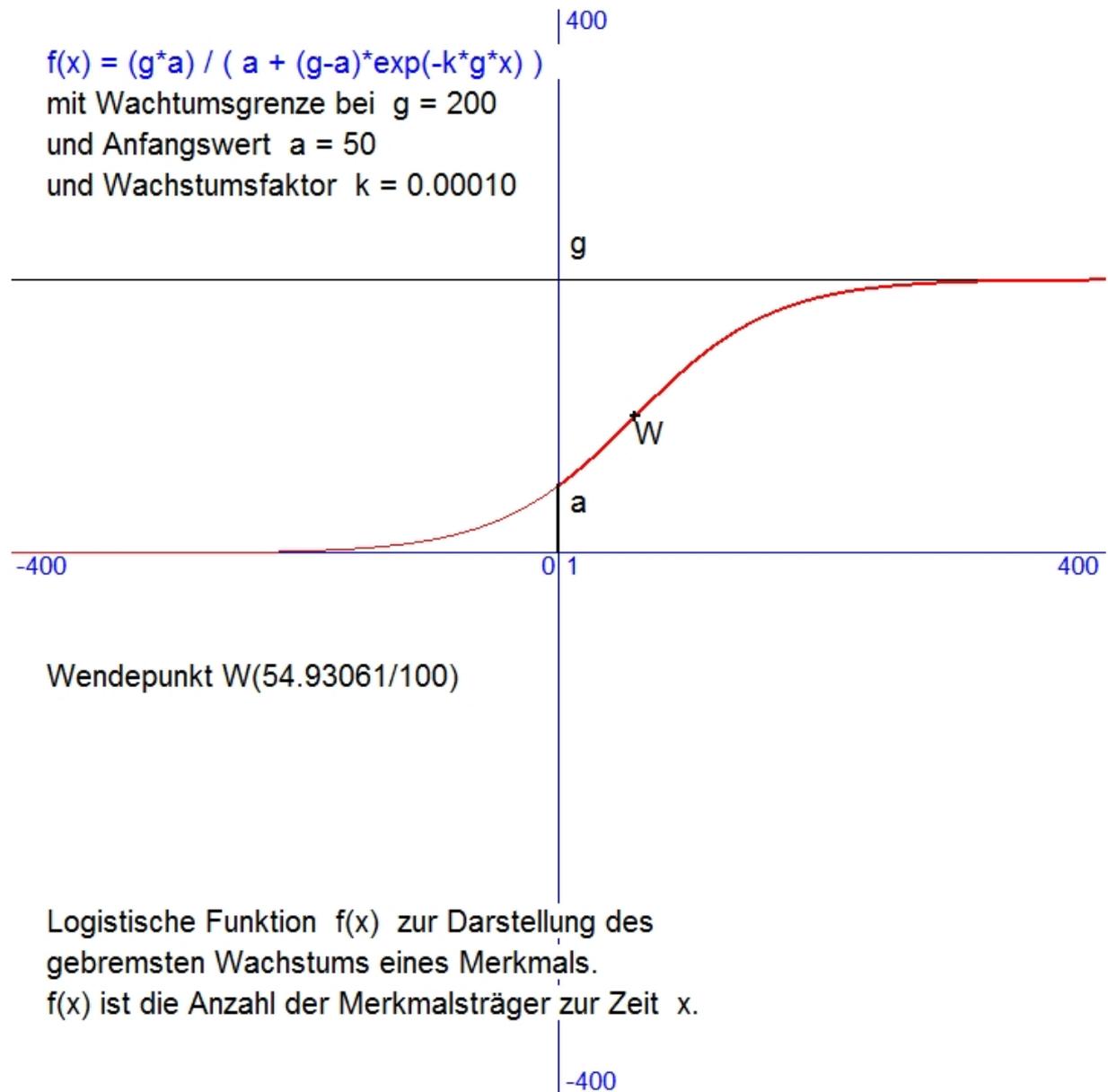
Wendepunkt $W(w/f(w))$: $w = \ln((g-a)/a) / (k \cdot g)$ und $f(w) = g / 2$

Damit ist die logistische Funktion vollständig diskutiert.

Erwähnenswert ist, dass die erste Ableitung (Gleichung I), die ja die Änderungsgeschwindigkeit einer Funktionen darstellt, direkt proportional ist zum Wachstumsfaktor k , zur Menge $f(x)$, und zur noch verbleibenden Restmenge $g - f(x)$.

Drei Beispiele





FOLGEN und REIHEN (Infinitesimalrechnung)

Allgemeine Definition von Folgen	[34]
Grenzwert und Konvergenz	[38]
Rechenregeln für Grenzwerte	[40]
Acht Beispiele von Folgen	[42]
Folgen und Reihen	[46]
Arithmetische und geometrische Reihen	[47]
Fünf Beispiele von geometrischen Reihen	[50]
Intervallschachtelungen	[53]
Berechnung der Ludolfschen Zahl "pi"	[55]
Zinsen und Zinseszinsen	[57]
Augenblicksverzinsung und Eulersche Zahl "e"	[58]

Definition von Folgen

Eine Folge ist eine Menge von nummerierten Elementen $a(n)$, d.h. jedem Element a wird eine natürliche Zahl n als Nummer zugeordnet. Wenn die Elemente a reelle Zahlen sind, dann spricht man von Zahlenfolgen. Die Folgen können entweder aus endlich oder aus unendlich vielen Elementen bestehen.

Beispiel: 2, 4, 8, 16, 32,
 $a(1) = 2$, $a(2) = 4$, $a(3) = 8$, usw.

Wie kann man für unser Beispiel das n -te Glied $a(n)$ der Folge ermitteln? Gibt es dazu ein Bildungsgesetz?

Offenkundig sind die Glieder der Folge fortlaufende Potenzen von 2. Also gilt $a(n) = 2^n$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
 Hier wird $a(n)$ durch eine direkte Funktionsvorschrift gebildet.

Die Folge kann aber auch rekursiv beschrieben werden:

(1) $a(1) = 2$, das erste Glied ist 2.
 (2) $a(n) = 2 \cdot a(n-1)$, ein Glied ist das Doppelte des Vorgängers.

"rekursiv" heißt dabei "rücklaufend", und (1) nennt man den Rekursionsanfang und (2) heißt die Rekursionsvorschrift.

Die Glieder einer Folge können somit durch eine Funktion oder durch eine Rekursion gebildet werden. In den Beispielen soll das Bildungsgesetz der Folge gefunden und damit das jeweils 5-te Glied $a(5)$ berechnet werden.

{F1}: 1, 3, 5, 7,

{F2}: 3, 9, 27, 81,

{F3}: -1, 2, -3, 4,

{F4}: 1, 0.5, 0.25, 0.125,

{F5}: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{16}$,

{F1}: $a(1) = 1$, $a(n) = a(n-1) + 2$, $a(5) = 9$

{F2}: $a(n) = 3^n$, $a(5) = 3^5 = 243$

{F3}: $a(n) = (-1)^n \cdot n$, $a(5) = -5$

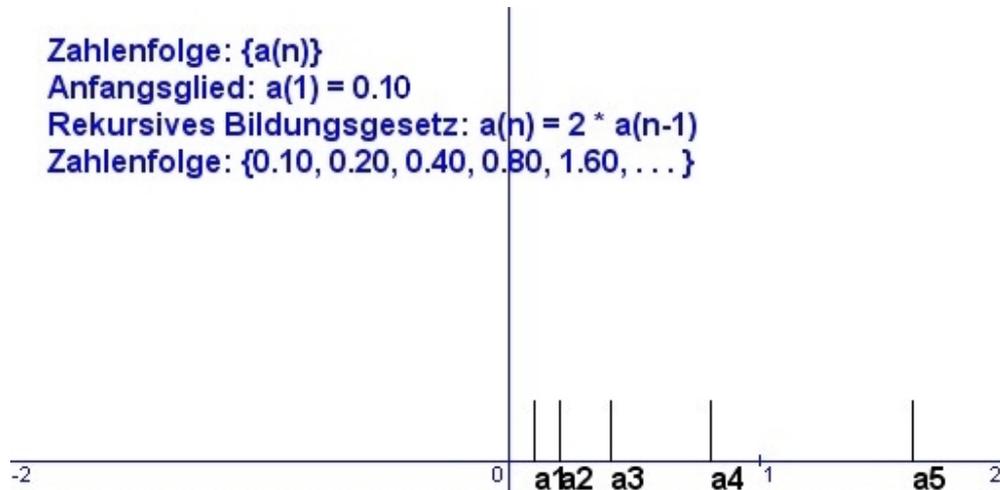
{F4}: $a(1) = 1$, $a(n) = a(n-1) / 2$, $a(5) = 0.0625$

{F5}: $a(n) = n / 2^n$, $a(5) = 5/32$

Um das Bildungsgesetz von Zahlenfolgen zu ermitteln, ist es oft sinnvoll, die Differenz oder den Quotienten von aufeinander folgenden Gliedern zu betrachten.

In den nachfolgenden Beispielen werden Zahlenfolgen rekursiv oder funktional angegeben und die ersten zehn Glieder der Folge am Zahlenstrahl eingezeichnet.

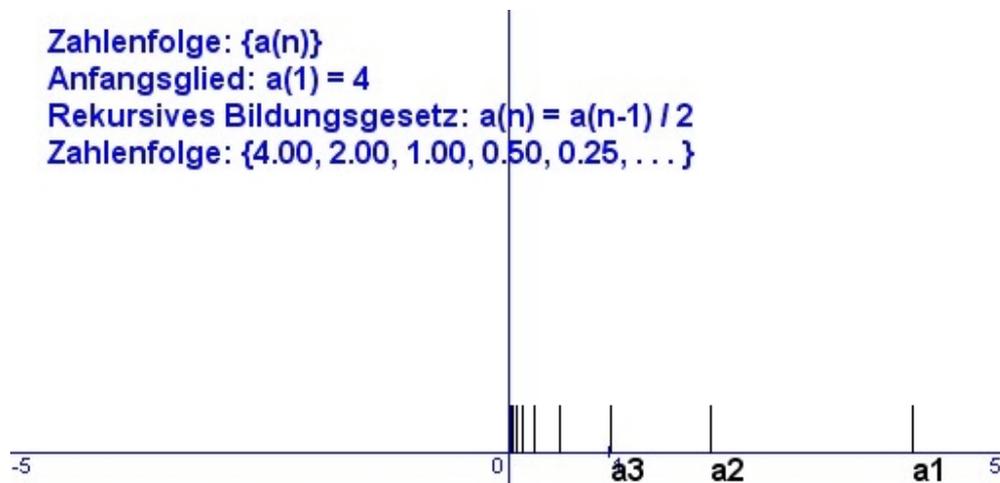
Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Anfangsglied: $a(1) = 0.10$
 Rekursives Bildungsgesetz: $a(n) = 2 * a(n-1)$
 Zahlenfolge: $\{0.10, 0.20, 0.40, 0.80, 1.60, \dots\}$



$$a(10) = 51.20000000$$

Die Folge ist wachsend und unbeschränkt.

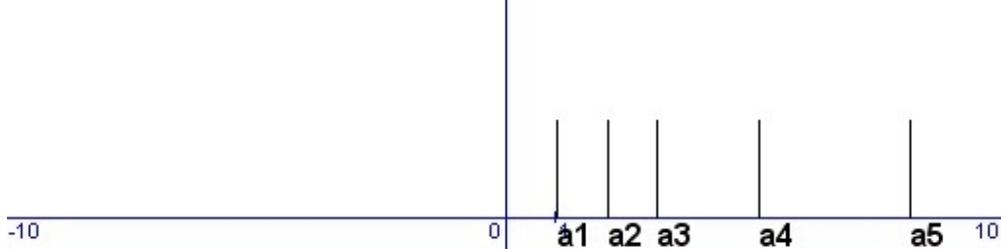
Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Anfangsglied: $a(1) = 4$
 Rekursives Bildungsgesetz: $a(n) = a(n-1) / 2$
 Zahlenfolge: $\{4.00, 2.00, 1.00, 0.50, 0.25, \dots\}$



$$a(10) = 0.00781250$$

Die Folge ist fallend und beschränkt.

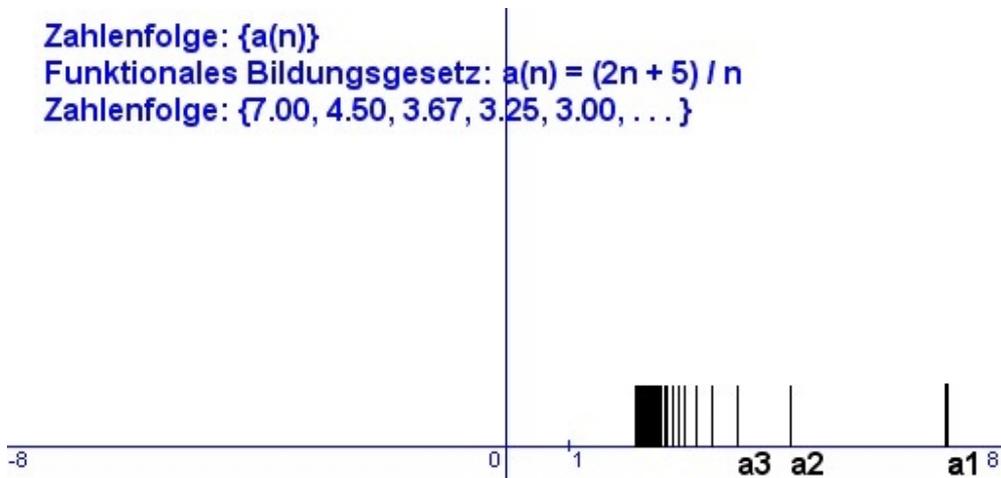
Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Anfangsglied: $a(1) = 1, a(2) = 2$
 Rekursives Bildungsgesetz: $a(n) = a(n-2) + a(n-1)$
 Zahlenfolge: $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$



$$a(10) = 89$$

Die Folge ist wachsend und unbeschränkt.

Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (2n + 5) / n$
 Zahlenfolge: $\{7.00, 4.50, 3.67, 3.25, 3.00, \dots\}$



$$a(100) = 2.05000000$$

Die Folge ist fallend und beschränkt.

Die MONOTONIE einer Folge

Eine Folge heißt monoton steigend, wenn ihre Glieder zunehmen oder gleichbleiben: $a(n+1) \geq a(n)$ für alle n .
Sie heißt streng monoton steigend, wenn $a(n+1) > a(n)$.

Eine Folge heißt monoton fallend, wenn ihre Glieder abnehmen oder gleichbleiben: $a(n+1) \leq a(n)$ für alle n .
Sie heißt streng monoton fallend, wenn $a(n+1) < a(n)$.

Die BESCHRÄNKTHEIT einer Folge

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl S gibt, so dass $a(n) \leq S$ für alle n . Die kleinste obere Schranke heißt Supremum SUP.

Eine Folge heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl S gibt, so dass $a(n) \geq S$ für alle n . Die größte untere Schranke heißt Infimum INF.

Eine Folge heißt beidseitig beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Um die Monotonie oder die Beschränktheit einer gegebenen Folge nachzuweisen, nimmt man sie zuerst als richtig an und versucht dann durch passende Äquivalenzumformungen eine wahre Aussage herzuleiten.

Beispiel $\{a(n)\}$: $a(n) = (2^n + 5) / n$

Nachweis für "streng monoton fallend": $a(n+1) < a(n)$.

$$\begin{aligned} (2^{n+1} + 5) / (n + 1) &< (2^n + 5) / n \\ (2^{n+1} + 5) \cdot n &< (2^n + 5) \cdot (n + 1) \\ 2^{n+1}n + 5n &< 2^n n + 5n + 2^n + 5 \\ 2^{n+1}n &< 2^n n + 2^n + 5 \\ 2^n n &< 2^n + 5 \\ 0 &< 5, \text{ wahre Aussage für alle } n. \end{aligned}$$

Nachweis für "nach unten beschränkt": $2 =$ untere Schranke.

$$\begin{aligned} 2 &< (2^n + 5) / n \\ 2^n &< 2^n + 5 \\ 0 &< 5, \text{ wahre Aussage für alle } n. \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil beendet. Im zweiten Teil werden der Grenzwert und die Konvergenz von Folgen beschrieben.

Grenzwert und Konvergenz

Unendliche Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (2n + 5) / n$
 Zahlenfolge: $\{7.00, 4.50, 3.67, 3.25, 3.00, \dots\}$

$$a(1000) = 2.00500000$$

Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt.



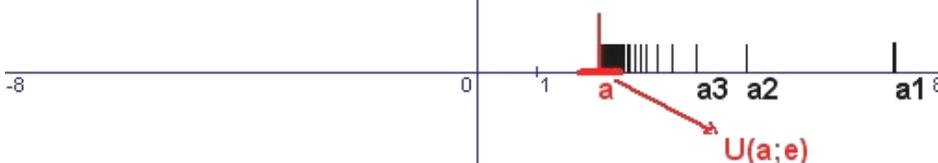
Man kann einfach zeigen, dass $2 < a(n)$ für alle n gilt, d.h. die Zahl $a = 2$ ist eine untere Schranke. Außerdem kommen die Glieder der Folge dieser Zahl beliebig nahe, d.h. in einer BELIEBIG KLEINEN Umgebung der Zahl a liegen FAST ALLE Glieder der Folge.

FAST ALLE bedeutet dabei ALLE bis auf ENDLICH viele. Eine solche Zahl a nennt man den GRENZWERT (limes) der Folge und schreibt: $\lim a(n) = a$, wenn die Nummern n der Glieder gegen Unendlich streben.

Unendliche Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (2n + 5) / n$
 Zahlenfolge: $\{7.00, 4.50, 3.67, 3.25, 3.00, \dots\}$

Grenzwert der Folge: $\lim a(n) = a$ für n gegen Unendlich.

Es sei e eine beliebig kleine Länge, dann ist $U(a;e)$ eine Umgebung der Zahl a mit der Umgebungslänge e . Fast alle Folgenglieder $a(n)$ liegen in dieser Umgebung und dafür gilt: $a - e < a(n) < a + e$ oder $|a - a(n)| < e$.



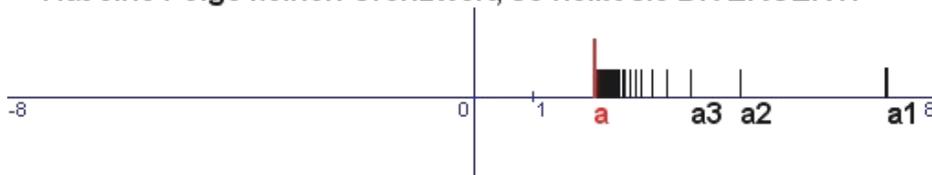
Wenn also a der Grenzwert der Folge $\{a(n)\}$ ist, dann liegen fast alle Glieder beliebig nahe bei a , d.h. alle Glieder ab einer Grenznummer N , die natürlich von der Umgebungslänge e abhängt. Je kleiner e ist, umso größer wird N sein.

Die Zahl a ist der Grenzwert einer Folge, wenn es zu jeder Länge $e > 0$ eine Nummer N gibt, so dass ab dieser Nummer alle Folgenglieder weniger als e von a entfernt sind.

Unendliche Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (2n + 5) / n$
 Zahlenfolge: $\{7.00, 4.50, 3.67, 3.25, 3.00, \dots\}$

Grenzwert der Folge: $\lim a(n) = a$ für n gegen Unendlich.

Wegen der Definition des Grenzwertes kann eine Folge nur einen Grenzwert haben. Man nennt sie dann **KONVERGENT**.
 Hat eine Folge keinen Grenzwert, so heißt sie **DIVERGENT**.



Die vorliegende Folge ist monoton fallend und außerdem nach unten beschränkt. Offensichtlich muss dann die größte untere Schranke (Infimum) der Grenzwert der Folge sein.

Erstes Kriterium: Eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Zweites Kriterium: Eine monoton steigende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

Die Zahl a ist Grenzwert der Folge $\{a(n)\}$, wenn fast alle Folgenglieder $a(n)$ beliebig nahe bei a liegen, d.h. die Differenzen $|a - a(n)|$ streben gegen Null, wenn n gegen Unendlich strebt. Diese Differenzen bilden daher eine so genannte Nullfolge.

Häufungswerte einer Folge

Wenn in einer beliebig kleinen Umgebung $U(a; \epsilon)$ von der Zahl a unendlich viele Glieder einer Folge liegen, dann heißt diese Zahl Häufungswert der Folge. Im Gegensatz zum Grenzwert können dann außerhalb der Umgebung auch unendlich viele Glieder der Folge liegen. Aus dieser Definition folgt:

Eine Folge kann mehrere Häufungswerte haben.

Ein Häufungswert muss nicht notwendig Grenzwert sein.

Der Grenzwert einer Folge ist immer auch Häufungswert.

Damit ist der zweite Teil beendet. Im dritten Teil werden Rechenregeln für Grenzwerte hergeleitet und Verfahren beschrieben, wie Grenzwerte von Folgen ermittelt werden.

Rechenregeln für Grenzwerte

Wiederholung: Der Grenzwert

Die Zahl a ist Grenzwert der Folge $\{a(n)\}$, wenn fast alle Folgenglieder $a(n)$ beliebig nahe bei a liegen, d.h. die Differenzen $|a - a(n)|$ streben gegen Null, wenn n gegen Unendlich strebt. Diese Differenzen bilden daher eine Nullfolge, d.h. $\lim |a - a(n)| = 0$ für n gegen Unendlich.

Zusammengesetzte Folgen

Gegeben seien zwei konvergente Folgen $\{a(n)\}$ und $\{b(n)\}$.
Es seien $a = \lim a(n)$ und $b = \lim b(n)$ für n gegen Unendlich.
Man kann die Folgen gliedweise zu einer neuen Folge $\{c(n)\}$ zusammensetzen, wenn man beispielsweise entsprechende Glieder miteinander addiert: $c(n) = a(n) + b(n)$.

Für den Grenzwert von zusammengesetzten Folgen gelten die fünf Lehrsätze [G1] bis [G5]:

- [G1] $\lim (k \cdot a(n)) = k \cdot a$, wenn k eine konstante Zahl ist.
- [G2] $\lim (a(n) + b(n)) = a + b$.
- [G3] $\lim (a(n) - b(n)) = a - b$.
- [G4] $\lim (a(n) \cdot b(n)) = a \cdot b$.
- [G5] $\lim (a(n) / b(n)) = a / b$, wenn $\{b(n)\}$ keine Nullfolge ist.

[G1]: $\lim (k \cdot a(n)) = k \cdot a$ für n gegen Unendlich.

Es gilt $|k \cdot a(n) - k \cdot a| = |k \cdot (a(n) - a)| \leq |k| \cdot |a(n) - a|$,
wegen der allgemeinen Betrags-Ungleichung $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$.
Weil $a = \lim a(n)$, ist $|a(n) - a|$ eine Nullfolge.
Weil k konstant, ist auch $|k| \cdot |a(n) - a|$ eine Nullfolge.
Daher ist $|k \cdot a(n) - k \cdot a|$ ein Nullfolge und $\lim (k \cdot a(n)) = k \cdot a$.

[G2,G3]: $\lim (a(n) \pm b(n)) = a \pm b$ für n gegen Unendlich.

Es gilt $|(a(n) \pm b(n)) - (a \pm b)| \leq |(a(n) - a) \pm (b(n) - b)|$,
wegen der allgemeinen Dreiecks-Ungleichung $|x \pm y| \leq |x| + |y|$.
Weil $|a(n) - a|$ und $|b(n) - b|$ Nullfolgen sind, ist auch
 $|(a(n) \pm b(n)) - (a \pm b)|$ eine Nullfolge und alles ist bewiesen.

[G4]: $\lim (a(n) \cdot b(n)) = a \cdot b$ für n gegen Unendlich.

$|(a(n) \cdot b(n)) - (a \cdot b)| = |a(n) \cdot b(n) - a(n) \cdot b + a(n) \cdot b - a \cdot b| \leq$
 $|a(n)| \cdot |b(n) - b| + |b| \cdot |a(n) - a|$. Dieser Ausdruck ist eine
Nullfolge, daher ist auch $|(a(n) \cdot b(n)) - (a \cdot b)|$ eine Nullfolge.
Damit ist wieder alles bewiesen.

[G5]: $\lim (a(n) / b(n)) = a / b$ für n gegen Unendlich.
Das gilt nur wenn $b(n)$ und b nicht Null werden.

$|1/b(n) - 1/b| = |(b - b(n)) / (b \cdot b(n))| \leq |b(n) - b| \cdot |1/(b \cdot b(n))|$.
Das strebt gegen Null und daher ist $\lim (1/b(n)) = 1/b$. Somit gilt
 $\lim (a(n) / b(n)) = \lim (a(n) \cdot 1/b(n)) = \lim a(n) \cdot \lim(1/b(n)) = a / b$.

Mit Hilfe dieser nun bewiesenen Rechenregeln können die Grenzwerte von einer Vielzahl von Folgen ermittelt werden. Das soll nun an einem Beispiel demonstriert werden.

Unendliche Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (2n + 5) / n$
Zahlenfolge: $\{7.00, 4.50, 3.67, 3.25, 3.00, \dots\}$

Zuerst kürzen wir den Bruch durch die höchste Potenz von n .
 $a(n) = (2 + 5/n) / 1$. Dann betrachten wir die Folge $\{a(n)\}$ als eine Zusammensetzung von Folgen und wenden die Rechenregeln für Grenzwerte an: $\lim a(n) = \lim 2 + \lim 5/n = 2$, weil die Folge $\{2\}$ konstant ist und $\{5/n\}$ gegen 0 strebt, wenn n gegen Unendlich strebt.

Ergebnis: Der Grenzwert der Folge $\{(2n + 5)/n\}$ ist 2.

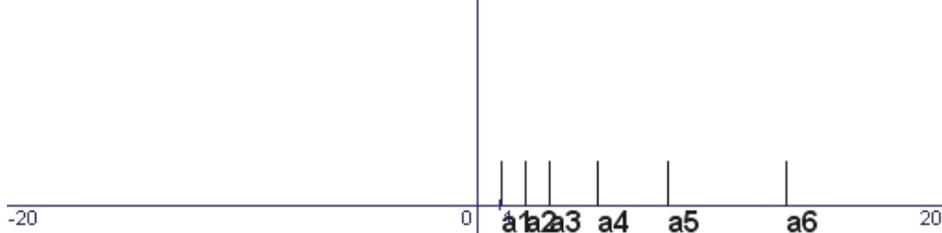
Acht Beispiele von Folgen

Zahlenfolge: $\{a(n)\}$

Anfangsglieder: $a(1) = 1, a(2) = 2$

Rekursives Bildungsgesetz: $a(n) = a(n-2) + a(n-1)$

Zahlenfolge: $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$



$a(10) = 89$

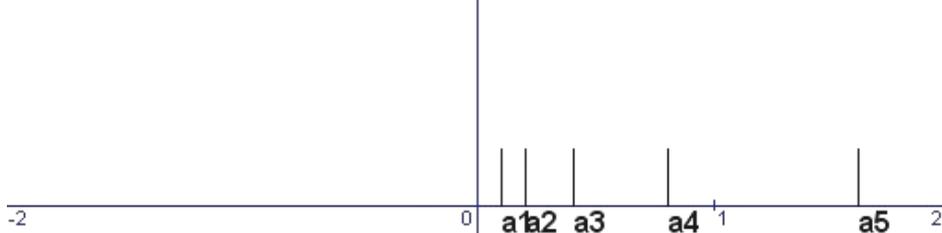
Die Folge ist monoton wachsend,
sie ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.
Die Folge strebt gegen Unendlich.
Sie ist divergent.

Zahlenfolge: $\{a(n)\}$

Anfangsglied: $a(1) = 0.1$

Rekursives Bildungsgesetz: $a(n) = 2 * a(n-1)$

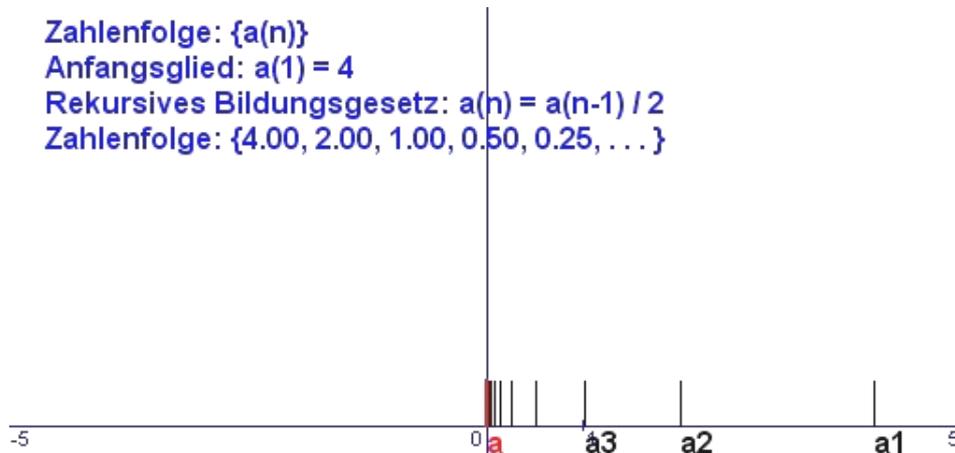
Zahlenfolge: $\{0.10, 0.20, 0.40, 0.80, 1.60, \dots\}$



$a(10) = 51.20000000$

Die Folge ist monoton wachsend,
sie ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.
Die Folge strebt gegen Unendlich.
Sie ist divergent.

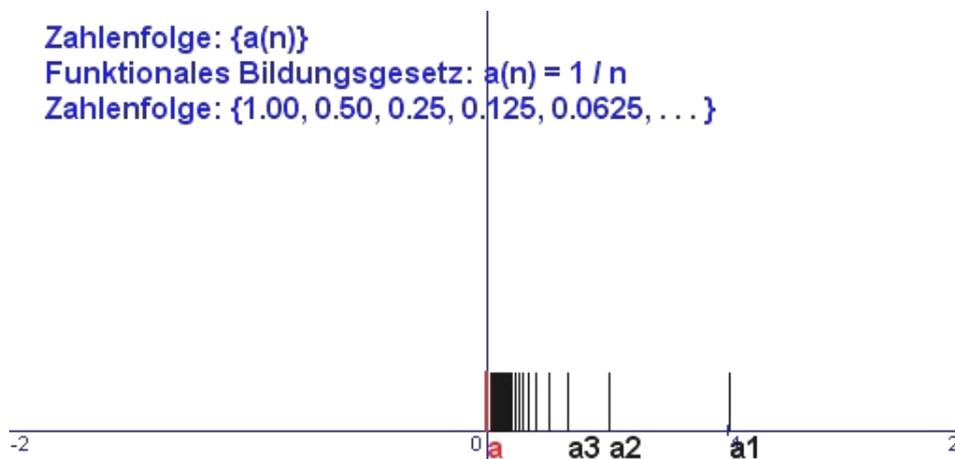
Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Anfangsglied: $a(1) = 4$
 Rekursives Bildungsgesetz: $a(n) = a(n-1) / 2$
 Zahlenfolge: $\{4.00, 2.00, 1.00, 0.50, 0.25, \dots\}$



$$a(10) = 0.00781250$$

Die Folge ist monoton fallend,
 sie ist nach unten beschränkt und nach oben beschränkt.
 Die Folge strebt gegen den Grenzwert $a = 0$.
 Sie ist konvergent (Nullfolge).

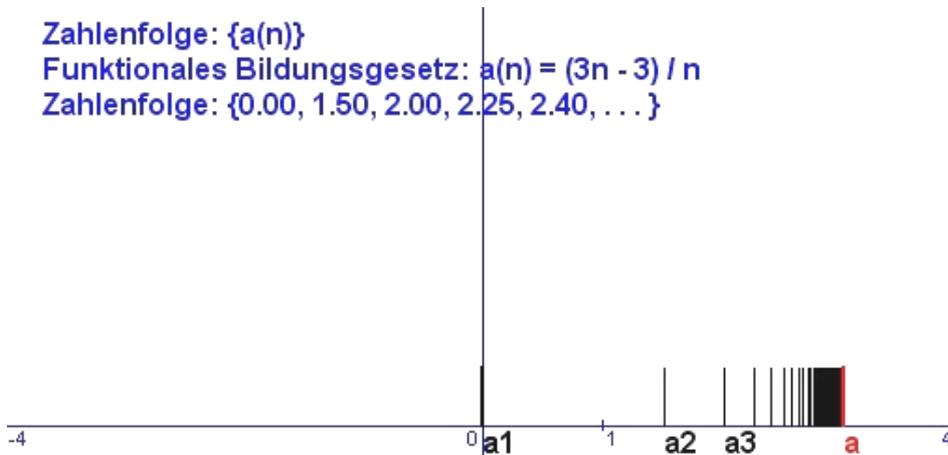
Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = 1 / n$
 Zahlenfolge: $\{1.00, 0.50, 0.25, 0.125, 0.0625, \dots\}$



$$a(100) = 0.01000000$$

Die Folge ist monoton fallend,
 sie ist nach unten beschränkt und nach oben beschränkt.
 Die Folge strebt gegen den Grenzwert $a = 0$.
 Sie ist konvergent (Nullfolge).

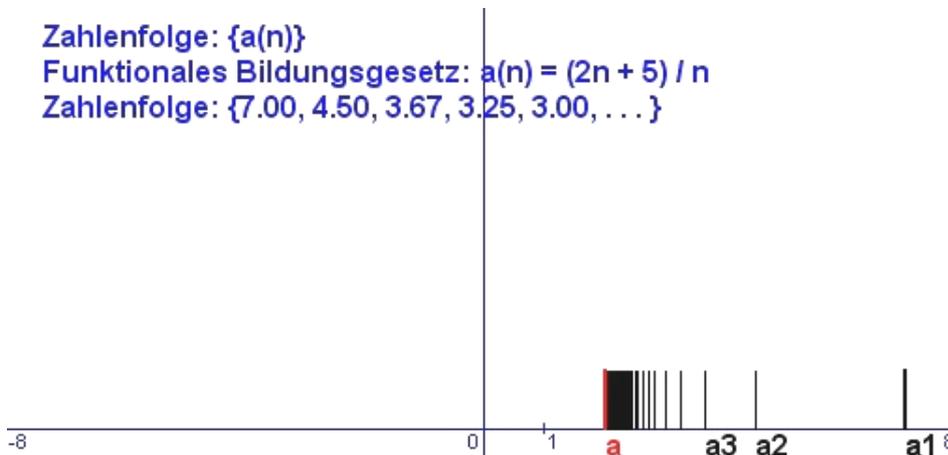
Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (3n - 3) / n$
 Zahlenfolge: $\{0.00, 1.50, 2.00, 2.25, 2.40, \dots\}$



$$a(100) = 2.97000000$$

Die Folge ist monoton wachsend,
 sie ist nach unten beschränkt und nach oben beschränkt.
 Die Folge strebt gegen den Grenzwert $a = 3$.
 Sie ist konvergent.

Zahlenfolge: $\{a(n)\}$
 Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (2n + 5) / n$
 Zahlenfolge: $\{7.00, 4.50, 3.67, 3.25, 3.00, \dots\}$



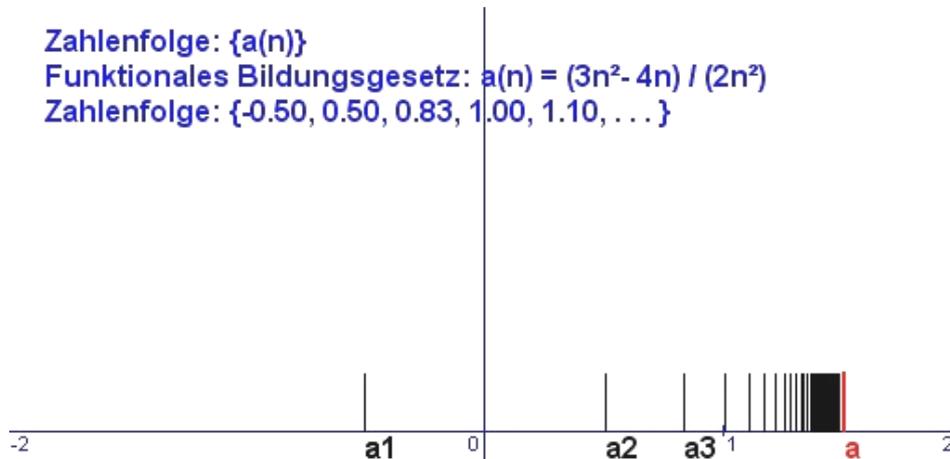
$$a(100) = 2.05000000$$

Die Folge ist monoton fallend,
 sie ist nach unten beschränkt und nach oben beschränkt.
 Die Folge strebt gegen den Grenzwert $a = 2$.
 Sie ist konvergent.

Zahlenfolge: $\{a(n)\}$

Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (3n^2 - 4n) / (2n^2)$

Zahlenfolge: $\{-0.50, 0.50, 0.83, 1.00, 1.10, \dots\}$



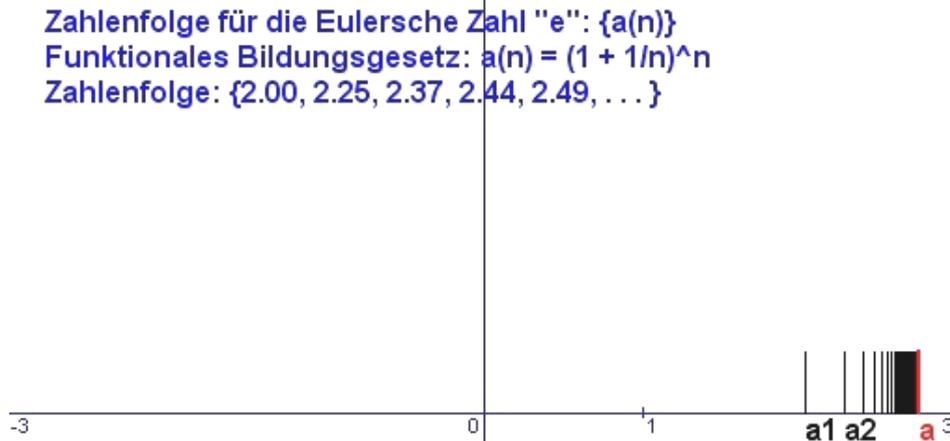
$$a(100) = 1.48000000$$

Die Folge ist monoton wachsend,
 sie ist nach unten beschränkt und nach oben beschränkt.
 Die Folge strebt gegen den Grenzwert $a = 1.50$.
 Sie ist konvergent.

Zahlenfolge für die Eulersche Zahl "e": $\{a(n)\}$

Funktionales Bildungsgesetz: $a(n) = (1 + 1/n)^n$

Zahlenfolge: $\{2.00, 2.25, 2.37, 2.44, 2.49, \dots\}$



$$a(100) = 2.70481383$$

Die Folge ist monoton wachsend,
 sie ist nach unten beschränkt und nach oben beschränkt.
 Die Folge strebt gegen den Grenzwert $e = 2.718281828459\dots$
 Sie ist konvergent.

Folgen und Reihen

Gegeben sei eine unendliche Zahlenfolge $\{a(i)\}$.
Wir bilden nun die Summe der ersten n Glieder
und bezeichnen sie als n -te Teilsumme $s(n)$.

$$s(n) = a(1) + a(2) + \dots + a(n-1) + a(n)$$

Wir fassen die Teilsummen $s(n)$ nun als Folge auf
und bezeichnen diese als REIHE.

Die Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert s ,
wenn die Folge der Teilsummen gegen s konvergiert.
Man schreibt dann $s = \lim s(n)$ für n gegen Unendlich.

Die Teilsumme $s(n) = a(1) + a(2) + \dots + a(n-1) + a(n)$
wird hier auch mit dem Symbol $\text{SUM}(a(n))$ bezeichnet.

Wenn eine Reihe $\{s(n)\}$ konvergiert, dann müssen die
Glieder $a(n)$ eine Nullfolge bilden.

Beweis: $s = \lim s(n)$. Für beliebig kleine Längen ϵ gilt,
dass $|s - s(n)| < \epsilon$ ist, für n ab einer Grenznummer N .
Weiters gilt $s(n) = s(n-1) + a(n)$ und $|s(n) - s(n-1)| < |s - s(n)|$.
 $|a(n)| = |s(n) - s(n-1)| < |s - s(n)| < \epsilon$. Also wird $a(n)$ beliebig
klein und bildet somit eine Nullfolge.

Die Majorante einer Reihe

Wenn für fast alle Glieder $a(n)$ einer Reihe gilt $|a(n)| \leq |b(n)|$
dann nennt man die Reihe $\{b(n)\}$ eine Majorante von $\{a(n)\}$.
Wegen $|a(n)| \leq |b(n)|$ gilt auch $\text{SUM}(a(n)) \leq \text{SUM}(b(n))$.
Daraus folgt: Wenn eine Majorante einen Grenzwert hat,
dann hat auch die Reihe einen Grenzwert (Majorantensatz).

Die Minorante einer Reihe

Wenn für fast alle Glieder $a(n)$ einer Reihe gilt $|a(n)| \geq |b(n)|$
dann nennt man die Reihe $\{b(n)\}$ eine Minorante von $\{a(n)\}$.
Wegen $|a(n)| \geq |b(n)|$ gilt auch $\text{SUM}(a(n)) \geq \text{SUM}(b(n))$.
Daraus folgt: Wenn eine Minorante keinen Grenzwert hat,
dann hat auch die Reihe keinen Grenzwert (Minorantensatz.)

Mit konvergenten Majoranten und divergenten Minoranten als
Vergleichsreihen können somit Konvergenz oder Divergenz
einer gegebenen Reihe ermittelt werden.

Damit sei der allgemeine Teil über Reihen beendet. In den
letzten Teilen werden dann arithmetische und geometrische
Reihen beschrieben.

Arithmetische Folgen und Reihen

Bei einer arithmetischen Folge $\{a(i)\}$ ist die Differenz d von zwei benachbarten Gliedern immer konstant: $a(i+1) - a(i) = d$.
Es sei $a(1)$ das Anfangsglied, dann gilt: $a(i) = a(1) + (i-1) \cdot d$.

Für die arithmetische Reihe $s(n) = \text{SUM}(a(n))$ gilt:
 $s(n) = a(1) + (a(1)+1 \cdot d) + (a(1)+2 \cdot d) + \dots + (a(1)+(n-1) \cdot d)$.
 $s(n) = n \cdot a(1) + d \cdot (1+2+3+\dots+(n-1))$.

Die Summe $1+2+3+\dots+(n-1)$ wird einfach dadurch berechnet, dass fortlaufend i und $(n-i)$ addiert werden. Das ist immer n , und zwar genau $(n-1)/2$ Mal. Also ist diese Summe $n \cdot (n-1)/2$.

Für die arithmetische Reihe gilt: $s(n) = n \cdot a(1) + d \cdot n \cdot (n-1)/2$.
 $s(n) = \text{SUM}(a(n)) = n/2 \cdot (2 \cdot a(1) + d \cdot (n-1))$
 Eine unendliche arithmetische Reihe ist immer divergent.

Beispiel für eine arithmetische Folge: $1, 3, 5, 7, \dots$
 Hier gilt: $a(1) = 1$ und $d = 2$ und $s(n) = n/2 \cdot (2+2 \cdot (n-1)) = n^2$,
 d.h. die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2 .

Geometrische Folgen und Reihen

Bei einer geometrischen Folge $\{b(i)\}$ ist der Quotient q von zwei benachbarten Gliedern immer konstant: $b(i+1) / b(i) = q$.
Es sei $b(1)$ das Anfangsglied, dann gilt: $b(i) = b(1) \cdot q^{(i-1)}$.

Für die geometrische Reihe $s(n) = \text{SUM}(b(n))$ gilt:
 $s(n) = b(1) + (b(1) \cdot q^1) + (b(1) \cdot q^2) + \dots + (b(1) \cdot q^{(n-1)})$.
 $s(n) = b(1) \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{(n-1)})$.

$h = 1 + q + q^2 + \dots + q^{(n-1)}$ wird einfach berechnet:

$$h = 1 + q + q^2 + \dots + q^{(n-1)}$$

$$q \cdot h = q + q^2 + \dots + q^{(n-1)} + q^n$$

$$h - q \cdot h = 1 - q^n, \text{ daraus folgt: } h = (1 - q^n) / (1 - q).$$

$$s(n) = \text{SUM}(b(n)) = b(1) \cdot (1 - q^n) / (1 - q).$$

Beispiel für eine geometrische Folge: $1, 2, 4, 8, 16, \dots$
 Hier gilt: $b(1) = 1$ und $q = 2$ und $s(n) = 1 \cdot (1-2^n)/(1-2)$.
 Die Summe der ersten n Zweierpotenzen ist: $s(n) = (2^n - 1)$.

Unendliche geometrische Reihen

Reihe $\{b(n)\}$: $b(1) + b(1) \cdot q + b(1) \cdot q^2 + \dots + b(1) \cdot q^n + \dots$

Es wurde gezeigt, dass für die n -te Teilsumme $s(n)$ einer geometrischen Reihe gilt: $s(n) = b(1) \cdot (1 - q^n) / (1 - q)$.

Das Konvergenzverhalten der Reihe hängt offensichtlich vom Quotienten q ab.

Wenn $|q| \geq 1$ ist, so ist die geometrische Reihe unbeschränkt und streng monoton wachsend und daher divergent.

Wenn $|q| < 1$ ist, dann kann mit der Teilsummenformel $s(n)$ für n gegen Unendlich ein Grenzwert berechnet werden.

Für $|q| < 1$ ist die Folge $\{q^n\}$ eine Nullfolge. Also gilt:

$\lim s(n) = s = b(1) / (1 - q)$ für n gegen Unendlich.

Beispiel für eine geometrische Reihe: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$

Hier gilt: $b(1) = 1$ und $q = 1/2$. Die Reihe ist daher konvergent und ihre unendliche Reihensumme ist $s = 1 / (1 - 1/2) = 2$.

Unbedingt sei noch erwähnt, dass geometrische Reihen oft als Majoranten zur Konvergenzermittlung verwendet werden.

Es sollen nun drei besondere Reihen analysiert werden.

R1: $s(n) = 1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \dots + 1/(n \cdot (n+1))$

$a(n) = 1/(n \cdot (n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$

$s(n) = (1/1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + \dots + (1/n - 1/(n+1))$

$s(n) = 1 - 1/(n+1)$

$\lim s(n) = 1$ für n gegen Unendlich. Reihe R1 ist konvergent.

R2: $s(n) = 1 + 1/4 + 1/9 + \dots + 1/n^2$

$a(n) = 1/n^2 = 1/(n \cdot n) < 1/((n-1) \cdot n)$

Daher ist die Reihe R1 eine Majorante.

Weil diese konvergiert, konvergiert auch die Reihe R2.

R3: $s(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$

$s(n) = 1 + 1/2 + (1/3+1/4) + (1/5+1/6+1/7+1/8) + (1/9+ \dots+1/16) + \dots$

$> 1 + 1/2 + (1/4+1/4) + (1/8+1/8+1/8+1/8) + (1/16+ \dots+1/16) + \dots$

$s(n) > 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots$

Die so erhaltene Vergleichsreihe ist eine Minorante zur Reihe R3.

Sie ist offensichtlich divergent. So ist auch Reihe R3 divergent.

Zum Schluss soll das Quotientenkriterium bewiesen werden.

Hinreichend für die Konvergenz einer Reihe $\text{SUM}(a(n))$ ist, dass für fast alle Glieder die Bedingung $a(n+1) / a(n) < 1$ gilt.

Beweis: Ab einer Grenznummer N gibt es eine Zahl q derart, dass $a(n+1) / a(n) < q < 1$ für alle $n > N$ gilt.

$$\begin{aligned} a(N+1) &< a(N) \cdot q \\ a(N+2) &< a(N+1) \cdot q < a(N) \cdot q^2 \\ a(N+3) &< a(N+2) \cdot q < a(N+1) \cdot q^2 < a(N) \cdot q^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(N+n) &= a(1) + a(2) + \dots + a(N) + a(N+1) + a(N+2) + \dots + a(N+n) \\ s(N+n) &= s(N) + a(N+1) + a(N+2) + \dots + a(N+n) \\ s(N+n) &< s(N) + a(N) \cdot q + a(N) \cdot q^2 + \dots + a(N) \cdot q^n \end{aligned}$$

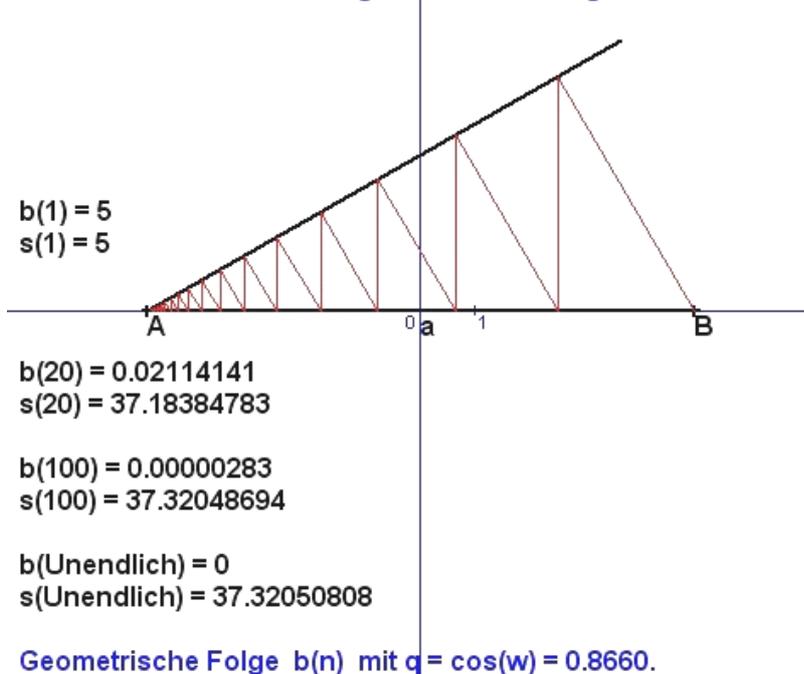
Daher gibt es zur gegebenen Reihe eine geometrische Reihe als konvergente Majorante, weil $q < 1$ ist.

Nach dem Majorantensatz ist auch die Reihe konvergent.

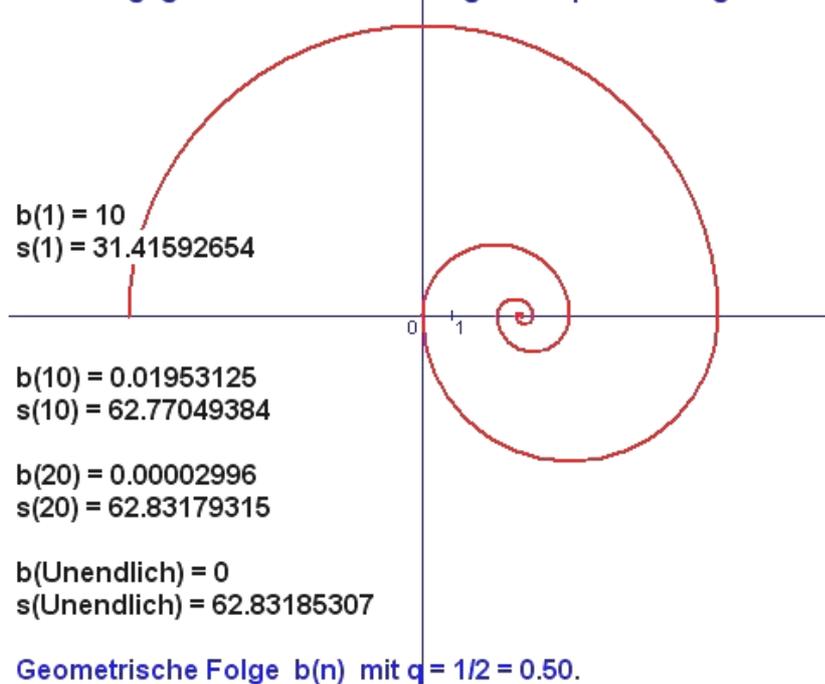
Umgekehrt ist es offensichtlich, dass eine Reihe $\text{SUM}(a(n))$ divergiert, wenn $a(n+1) / a(n) > 1$ für fast alle n gilt.

Fünf Beispiele von geometrischen Reihen

Einem Winkel wird eine Zick-Zack-Linie eingeschrieben.
Winkel w und Anfangsstrecke a können eingegeben werden.
Gesucht ist die Gesamtlänge s des Linienzuges.



Halbkreise mit jeweils halbem Radius werden so aneinander
gefügt, dass sie eine Spirale ergeben. Der erste Radius b
kann eingegeben werden. Die Länge der Spirale s ist gesucht.



Kreise mit jeweils halbem Radius werden so einander eingeschrieben, dass ihre Mittelpunkte nebeneinander auf einem Durchmesser liegen. Der erste Radius b wird eingegeben und die Summe aller Kreisflächen s ist gesucht.

$$b(1) = 10$$

$$s(1) = 314.15926536$$

$$b(10) = 0.01953125$$

$$s(10) = 418.87862100$$

$$b(20) = 0.00029961$$

$$s(20) = 628.31793151$$

$$b(\text{Unendlich}) = 0$$

$$s(\text{Unendlich}) = 628.31853072$$

Geometrische Folge $b(n)$ mit $q = 1/2 = 0.50$.

Gleichseitige Dreiecke werden so ineinander geschachtelt, dass der Inkreis des äußeren Dreiecks zugleich der Umkreis des inneren Dreiecks ist. Die erste Seite b wird eingegeben. Die Summe aller Dreiecksflächen s ist gesucht.

$$b(1) = 10$$

$$s(1) = 43.30127019$$

$$b(10) = 0.01953125$$

$$s(10) = 57.73497186$$

$$b(20) = 0.00000953674316$$

$$s(20) = 57.73502691891006$$

$$b(\text{Unendlich}) = 0$$

$$s(\text{Unendlich}) = 57.73502691896257$$

Geometrische Folge $b(n)$ mit $q = 1/2 = 0.50$.

Quadrate werden so ineinander geschachtelt, dass der Inkreis des äußeren Quadrates zugleich der Umkreis des inneren Quadrates ist. Die erste Seite b wird eingegeben und die Summe aller Quadratflächen s ist gesucht.

$$b(1) = 10$$

$$s(1) = 100$$

$$b(20) = 0.01381068$$

$$s(20) = 199.99980927$$

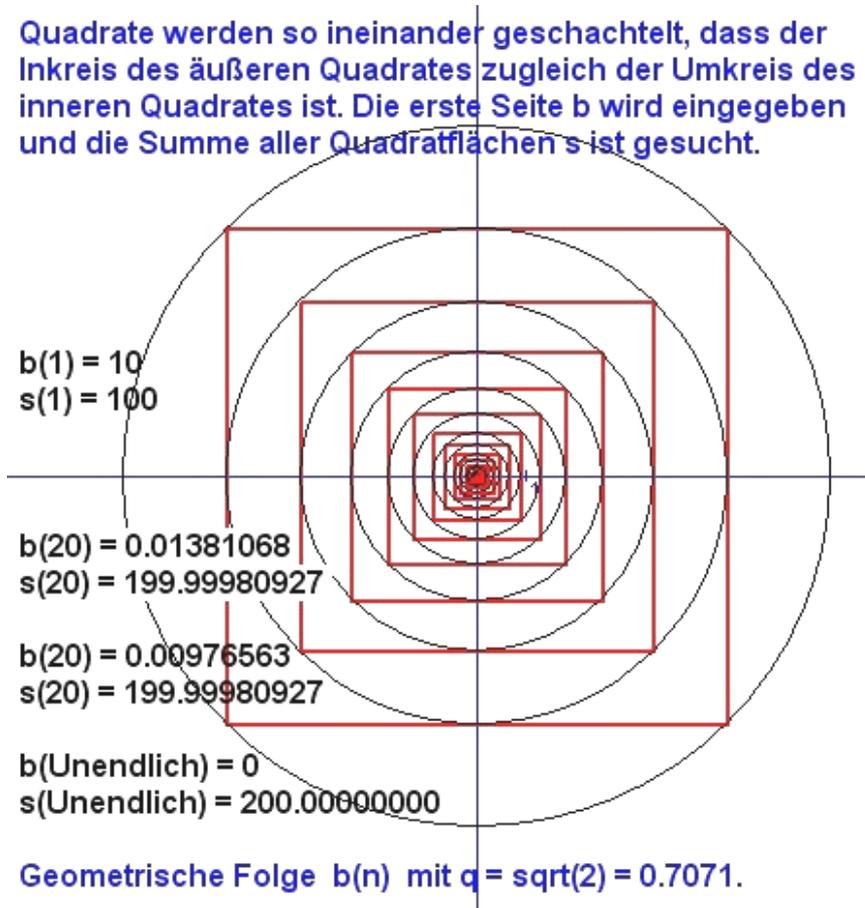
$$b(\infty) = 0$$

$$s(\infty) = 200.00000000$$

$$b(\text{Unendlich}) = 0$$

$$s(\text{Unendlich}) = 200.00000000$$

Geometrische Folge $b(n)$ mit $q = \sqrt{2} = 0.7071$.



Intervallschachtelungen

Eine Intervallschachtelung IS ist eine Folge von Intervallen $[a(n), b(n)]$ auf der reellen Zahlengerade. Dabei liegt jedes Intervall zur Gänze im vorangehenden Intervall, d.h. es gilt:

Die linken Ränder $a(n)$ sind eine monoton wachsende Folge.
Die rechten Ränder $b(n)$ sind eine monoton fallende Folge.
Die Intervall-Längen $l(n) = b(n) - a(n)$ bilden eine Nullfolge.

Somit konvergiert eine Intervallschachtelung genau auf einen innersten Punkt, der in allen Intervallen liegt.

Die Intervallschachtelung ist ein wichtiges Verfahren zur schrittweisen Ermittlung von gesuchten Zahlenwerten. Weit verbreitet ist dabei die Bisektion, bei welcher die Längen der Intervalle forlaufend halbiert werden.

Zwei praktische Beispiele sollen die Anwendung der IS demonstrieren. Erstens die Berechnung der Quadratwurzel von beliebigen reellen Zahlen. Zweitens die Ermittlung reeller Nullstellen von stetigen Funktionen. Dieses Beispiel findet man auch im Projekt "Zahlenmengen und Algebra" beschrieben.

Im Folgenden soll im Zahlenbereich \mathbb{Q} der rationalen Zahlen die Quadratwurzel aus 2 schrittweise angenähert werden.

In der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen $\{x = m/n : m, n \text{ aus } \mathbb{Z}\}$ ist das Quadrieren lückenlos ausführbar, d.h. $y = x^2$ ist immer eine Bruchzahl. Die Umkehroperation $y = \sqrt{x}$ hingegen ist nur lückenhaft ausführbar. Wir wollen zuerst zeigen, dass die Quadratwurzel aus einer Primzahl p keine Bruchzahl ist.

Behauptung: Für eine Primzahl p ist \sqrt{p} keine Bruchzahl.

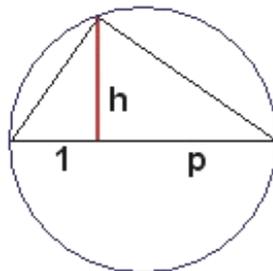
Wir beweisen die Behauptung indirekt, indem wir genau das Gegenteil der Behauptung annehmen und aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten. Wenn dies gelingt, dann muss die ursprüngliche Behauptung wahr sein.

Gegenteil der Behauptung: $\sqrt{p} = m/n$ mit ganzen Zahlen m und n , welche teilerfremd sind (d.h. nicht weiter kürzbar).

$\sqrt{p} = m/n$, $p = m^2/n^2$, $m^2 = p \cdot n^2$, d.h. p teilt m^2 .
Wenn p nun m^2 teilt, dann muss p auch m teilen.
Also gilt $p \cdot z = m$. Einsetzen in $p = m^2/n^2$ liefert:
 $p = p^2 \cdot z^2 / n^2$, $p \cdot n^2 = p^2 \cdot z^2$, $n^2 = p \cdot z^2$, d.h. p teilt n^2 .
Wenn p nun n^2 teilt, dann muss p auch n teilen.

Ergebnis: p teilt m und n . Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass m und n teilerfremd sind.

Wir haben bewiesen, dass die Wurzel aus einer Primzahl p keine Bruchzahl ist. Andererseits können wir ebenfalls zeigen, dass dieser Wurzel aus einer Primzahl immer ein Punkt auf der Zahlengerade entspricht. Dazu verwenden wir nur den Höhensatz von rechtwinkligen Dreiecken: $h^2 = p \cdot q$. Dabei nehmen wir die Primzahl p als ersten Hypotenusenabschnitt und $q = 1$ als zweiten Hypotenusenabschnitt. Für die Höhe h gilt dann: $h^2 = p \cdot 1$ und somit $h = \sqrt{p}$.

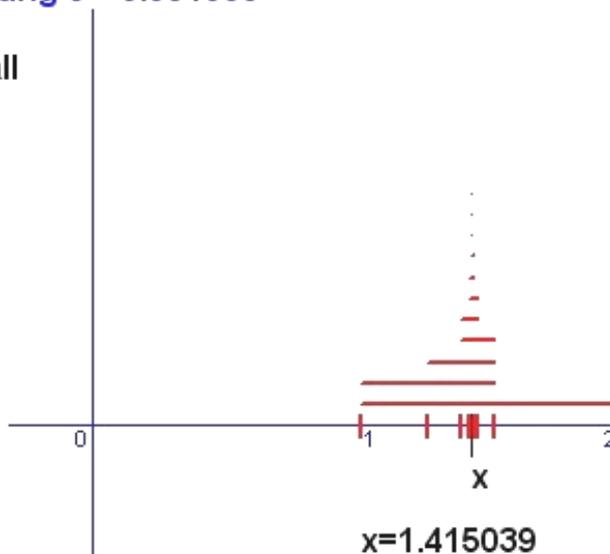


Diese Höhe kann mit dem Thales-Kreis konstruiert und dann am Zahlenstrahl vom Nullpunkt abgetragen werden. Damit ist bewiesen, dass \sqrt{p} einem Punkt auf der Zahlengerade entspricht. Früher haben wir aber bewiesen, dass \sqrt{p} keine Bruchzahl ist. Daraus erkennen wir nun: **Die Bruchzahlen erfüllen die Zahlengerade nur lückenhaft.** Mit Hilfe einer Intervallschachtelung in der Menge der Bruchzahlen kann \sqrt{p} schrittweise angenähert werden.

Intervallschachtelung für $x = \sqrt{2}$

Genauigkeit der Annäherung $\epsilon = 0.001000$

- 1) 0 ; 2 = Erstes Intervall
- 2) 1 ; 2
- 3) 1 ; 1.500000
- 4) 1.250000 ; 1.500000
- 5) 1.375000 ; 1.500000
- 6) 1.375000 ; 1.437500
- 7) 1.406250 ; 1.437500
- 8) 1.406250 ; 1.421875
- 9) 1.414063 ; 1.421875
- 10) 1.414063 ; 1.417969
- 11) 1.414063 ; 1.416016
- 12) 1.414063 ; 1.415039



Näherungsweise Berechnung der Zahl "pi"

Ein dem Kreis eingeschriebenes regelmäßiges N-Eck hat eine Seitenlänge a . Mit dem Lehrsatz von Pythagoras wird die Länge b des regelmäßigen $2N$ -Ecks berechnet:

$$b = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}} \quad \text{mit } r \text{ als Kreisradius.}$$

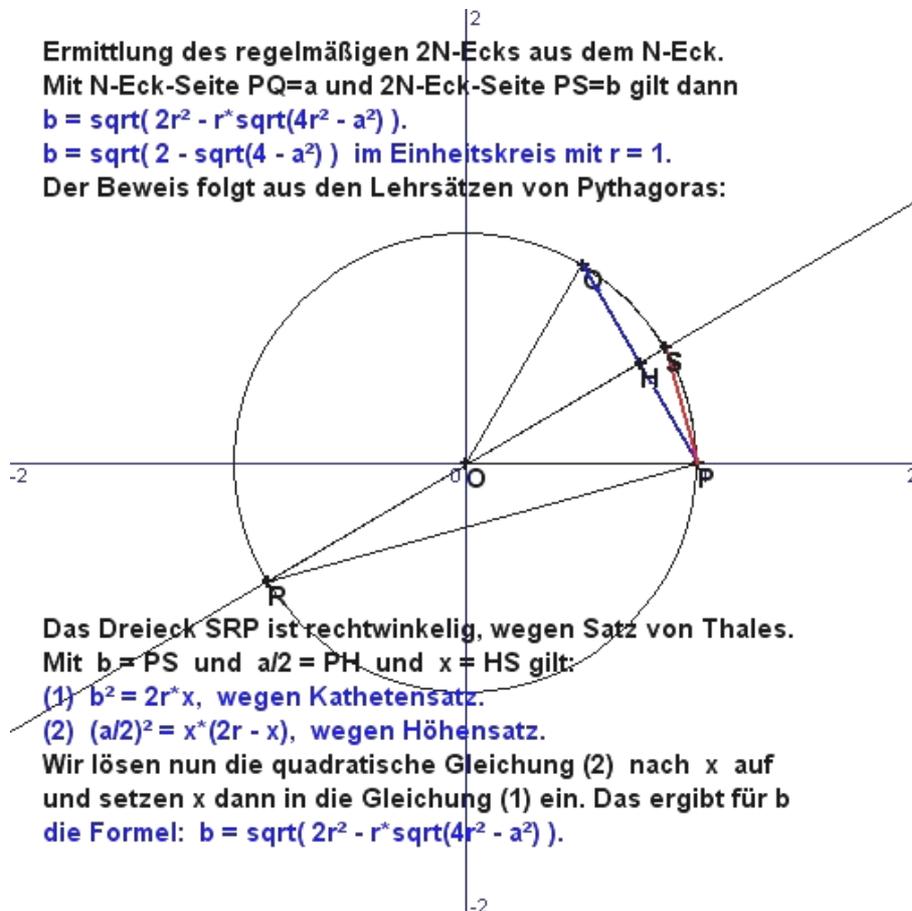
Je größer N ist, umso ähnlicher wird das Vieleck dem Kreis. Nimmt man den Umfang des N -Ecks $U = N \cdot a$ als Kreisumfang, dann erhält man für die Zahl "pi" folgenden Näherungswert x : Wegen $U = 2 \cdot r \cdot x = N \cdot a$ gilt $x = N \cdot a / (2 \cdot r)$.

Setzen wir nun den Radius $r = 1$ und beginnen mit dem Sechseck, d.h. $N = 6$ und $a = 1$ und $x = 6/2 = 3$. Nun verdoppeln wir N , d.h. N wird zu $2 \cdot N$, und berechnen die Seite des $2N$ -Ecks und den Näherungswert x .

Dieses Verfahren wird solange wiederholt bis ein vorgegebener Grenzwert G erreicht ist.

In der folgenden Grafik wird zuerst die Berechnung der Seite des 12-Ecks aus der Seite des 6-Ecks demonstriert. Dann wird "pi" näherungsweise berechnet.

Ermittlung des regelmäßigen $2N$ -Ecks aus dem N -Eck.
Mit N -Eck-Seite $PQ=a$ und $2N$ -Eck-Seite $PS=b$ gilt dann
 $b = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}}$.
 $b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$ im Einheitskreis mit $r = 1$.
Der Beweis folgt aus den Lehrsätzen von Pythagoras:

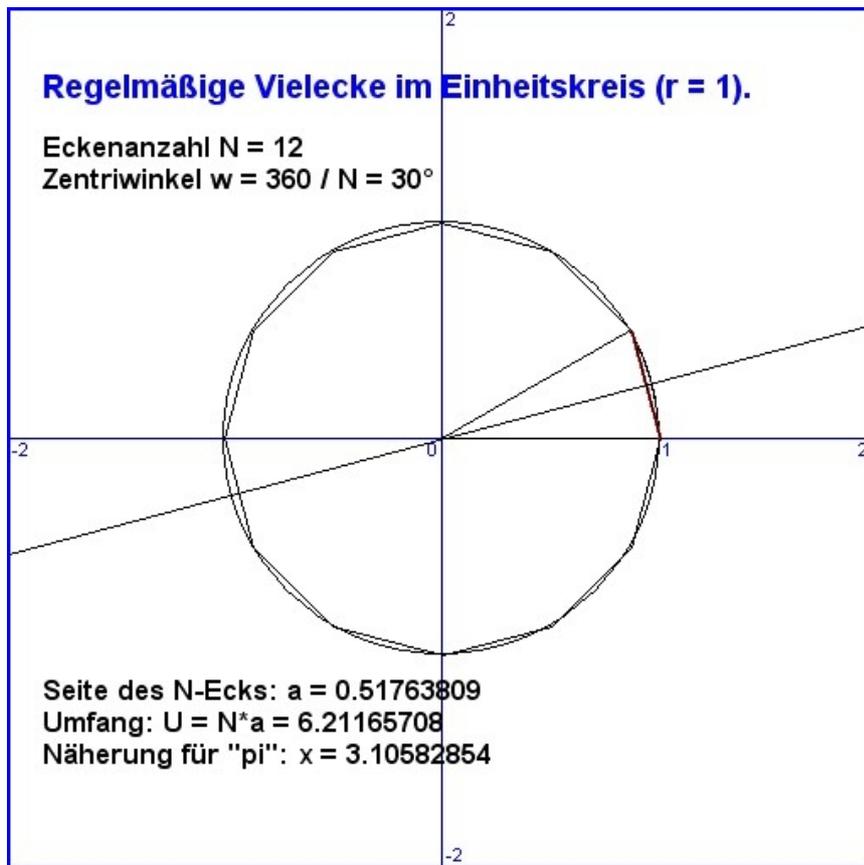


Das Dreieck SRP ist rechtwinklig, wegen Satz von Thales.
Mit $b = PS$ und $a/2 = PH$ und $x = HS$ gilt:

$$(1) \quad b^2 = 2r \cdot x, \quad \text{wegen Kathetensatz.}$$

$$(2) \quad (a/2)^2 = x \cdot (2r - x), \quad \text{wegen Höhensatz.}$$

Wir lösen nun die quadratische Gleichung (2) nach x auf und setzen x dann in die Gleichung (1) ein. Das ergibt für b die Formel: $b = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}}$.



Iterative Berechnung der Zahl "pi".
 (auf 8 Dezimalstellen gerundet)

6-Eck: "pi" = 3.00000000
 12-Eck: "pi" = 3.10582854
 24-Eck: "pi" = 3.13262861
 48-Eck: "pi" = 3.13935020
 96-Eck: "pi" = 3.14103195
 192-Eck: "pi" = 3.14145247
 384-Eck: "pi" = 3.14155761
 768-Eck: "pi" = 3.14158389
 1536-Eck: "pi" = 3.14159046
 3072-Eck: "pi" = 3.14159211
 6144-Eck: "pi" = 3.14159252
 12288-Eck: "pi" = 3.14159262
 24576-Eck: "pi" = 3.14159265
 49152-Eck: "pi" = 3.14159265

Zahlenwert von "pi" = 3.141592653590.....
 (auf 12 Dezimalstellen gerundet)

Für "pi" wird der griechische Buchstaben π geschrieben.

Zinsen und Zinseszinsen

Ein Anfangskapital A wird mit einem jährlichen Zinsfuß von $p\%$ verzinst. Die Jahreszinsen z sind dann der entsprechende Prozentanteil $z = A \cdot p/100$. Am Jahresende steht dann ein so genannter Endwert $E_1 = A + z = A + A \cdot p/100 = A \cdot (1+p/100)$ zur Verfügung.

Wird das Kapital nicht abgehoben sondern auch ein zweites Jahr weiter verzinst, so beträgt der Endwert nach diesem zweiten Jahr $E_2 = E_1 + E_1 \cdot p/100 = E_1 \cdot (1+p/100)$. Setzt man hier den Endwert des ersten Jahres ein, so ergibt das einen Endwert $E_2 = A \cdot (1+p/100) \cdot (1+p/100) = A \cdot (1+p/100)^2$.

Setzt man dieses Berechnungsverfahren für n Jahre fort, dann gilt für den Endwert E_n nach n Jahren: $E_n = A \cdot (1+p/100)^n$. Der konstante Klammerausdruck $(1+p/100)$ ist der Zinsfaktor q . Der Endwert $E_n = A \cdot q^n$ ist so eine einfache Potenzfunktion.

Weil die Zinsen immer an jedem Jahresende zum Kapital dazu gezählt werden und daher in den folgenden Jahren auch verzinst werden, spricht man von "Zinseszinsen".

Zinsen und Zinseszinsen

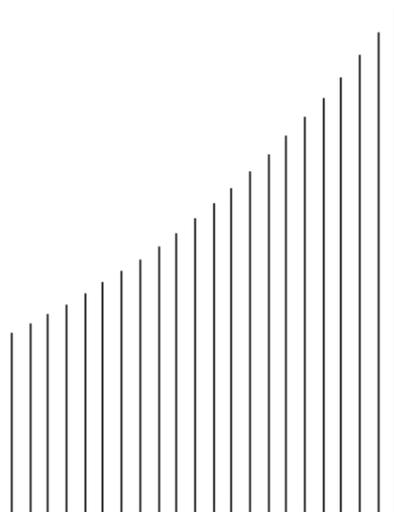
Ein Anfangskapital A wird mit einem jährlichen Zinsfuß von $p\%$ verzinst und nicht abgehoben. Wie groß ist der Endwert E nach genau n Jahren.

$$A = 100$$

$$p = 5$$

$$n = 20$$

$$E = 265.33$$



Die Grafik zeigt das stetige Anwachsen des Kapitals.

Augenblicksverzinsung und Eulersche Zahl

Wird ein Anfangskapital A mit Jahreszinssatz p n Jahre lang am Jahresende verzinst, so erhält man den Endwert $E = A \cdot (1 + p/100)^n$. Diese Formel ergibt sich aus der Berechnung des Zinseszinses.

Wenn das Kapital im Jahr k mal verzinst wird, dann erhält man den Endwert $E = A \cdot (1 + (p/k)/100)^{(n \cdot k)}$, weil die Anzahl der Verzinsungen k -fach anwächst.

Verwendet man x für $100 \cdot k/p$, dann kann man diese Formel mit $E = A \cdot ((1 + 1/x)^x)^{(p \cdot n/100)}$ schreiben.

Wird nun k bzw. x unendlich groß, dann strebt die Folge $(1 + 1/x)^x$ gegen einen festen Grenzwert und dieser wird Eulersche Zahl "e" genannt.

Im Folgenden soll für ein Kapital von $A = 100$ und einem jährlichen Zinsfuß von $p = 5\%$ der Endwert E nach genau $n = 10$ Jahren berechnet werden. Dabei wird dann schrittweise die Anzahl k verdoppelt und der jeweilige neue Endwert ermittelt. Zusätzlich wird die Eulersche Zahl "e" näherungsweise ermittelt.

1/k-tel jährliche Verzinsung vom Kapital $A = 100$ ergibt den Endwert E nach genau 10 Jahren mit $p = 5\%$ jährlichem Zinsfuß. Auch wird näherungsweise die Eulersche Zahl "e" berechnet.

1/1: $E = 162.88946268$, "e" = 2.65329771.
 1/2: $E = 163.86164403$, "e" = 2.68506384.
 1/4: $E = 164.36194635$, "e" = 2.70148494.
 1/8: $E = 164.61578224$, "e" = 2.70983558.
 1/16: $E = 164.74363853$, "e" = 2.71404664.
 1/32: $E = 164.80780345$, "e" = 2.71616121.
 1/64: $E = 164.83994539$, "e" = 2.71722076.
 1/128: $E = 164.85603125$, "e" = 2.71775110.
 1/256: $E = 164.86407792$, "e" = 2.71801642.
 1/512: $E = 164.86810218$, "e" = 2.71814911.
 1/1024: $E = 164.87011455$, "e" = 2.71821547.
 1/2048: $E = 164.87112079$, "e" = 2.71824865.
 1/4096: $E = 164.87162393$, "e" = 2.71826524.
 1/8192: $E = 164.87187550$, "e" = 2.71827353.
 1/16384: $E = 164.87200128$, "e" = 2.71827768.
 1/32768: $E = 164.87206418$, "e" = 2.71827975.
 1/65536: $E = 164.87209563$, "e" = 2.71828079.

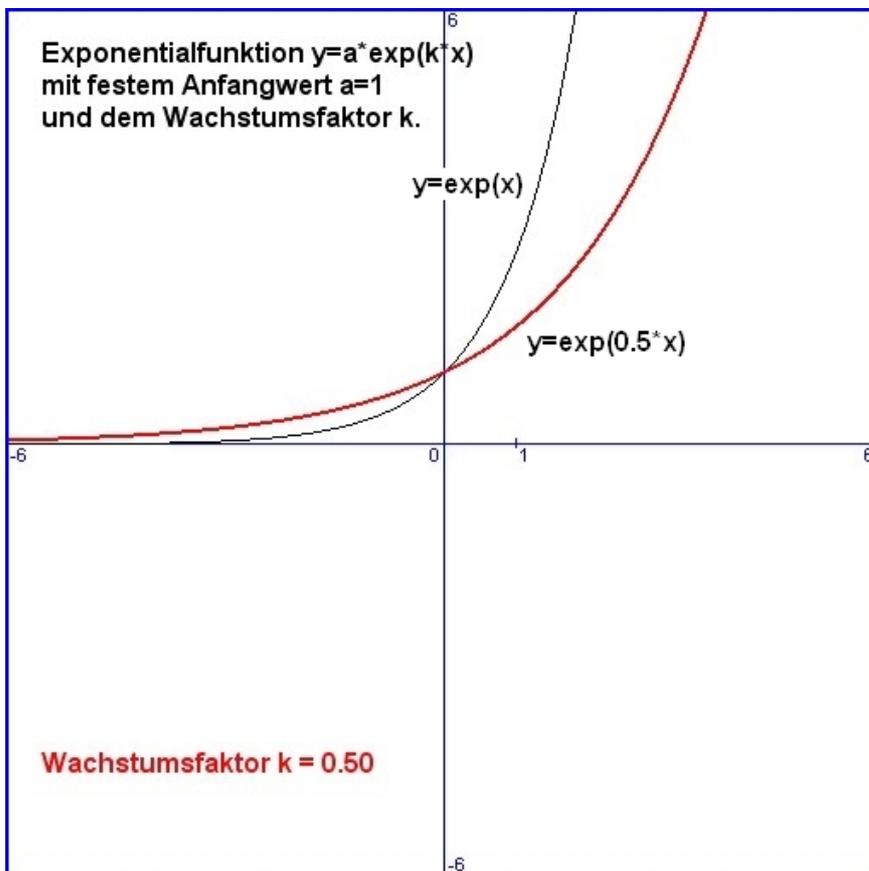
**Endwert bei Augenblicksverzinsung: $E = 164.87212707$.
 (Bei Augenblicksverzinsung strebt k gegen Unendlich)
 Eulersche Zahl: "e" = 2.71828183.....**

Wir haben gesehen, dass die Formel $E = A \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n \cdot p/100}$ den Endwert E eines Anfangswertes A nach genau n Jahren bei einer jährlichen Wachstumsrate von $p\%$ bedeutet. Dabei gibt die Zahl x die Anzahl der Werterhöhungen pro Jahr an. Wird x nun unendlich groß, dann spricht man von einer Augenblicksverzinsung.

Wir haben auch gesehen, dass dann die Folge $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ gegen einen festen Grenzwert strebt, der Eulerschen Zahl "e".

Somit wird die Formel dann zu $E = A \cdot e^{(n \cdot p/100)}$. Diese Formel beschreibt nun ganz allgemein stetige Wachstumsprozesse, wo in jedem Augenblick ein Wert sich vermehrt. n ist dabei die betrachtete Zeitspanne und p die Wachstumsrate pro Zeiteinheit. Funktionen der Form $y = e^x$ mit der Basis e werden als natürliche Exponentialfunktionen bezeichnet und man schreibt $y = \exp(x)$.

Setzen wir nun für $n = x$ und für $(p/100) = k$ und für $E = y$, so wird unsere Formel zu $y = a \cdot \exp(k \cdot x)$. In dieser Formel kann der Wachstumsfaktor k auch negativ sein. Dann handelt es sich nicht um eine stetige Zunahme sondern um eine stetige Abnahme.



Die Eulersche Zahl

$$e = 2.71828182845905 \dots$$

lässt sich als Grenzwert einer Folge und einer Reihe darstellen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Beweis

(i) Konvergenz der Reihe:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = 2^{1-n}$$

⇒ Majorisierung durch eine geometrische Reihe

⇒ Existenz des Grenzwerts

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(ii) Obere Abschätzung für die Folge:

Für $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

binomische Formel ⇒

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e$$

Grenzwertbildung $\rightsquigarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e$

(iii) Untere Abschätzung für die Folge:

Für $n > N$ mit N beliebig aber fest gewählt gilt

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n}\right)^N$$

Grenzwertbildung \rightsquigarrow

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}$$

$N \rightarrow \infty$: rechte Seite $\rightarrow e$, d.h. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq e$

(iv) Kombination der Abschätzungen:

bereits gezeigt

$$\underline{\lim} a_n \geq e, \quad e \geq \overline{\lim} a_n$$

Wegen $\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n$ folgt

$$\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$$

und damit $a_n \rightarrow e$.

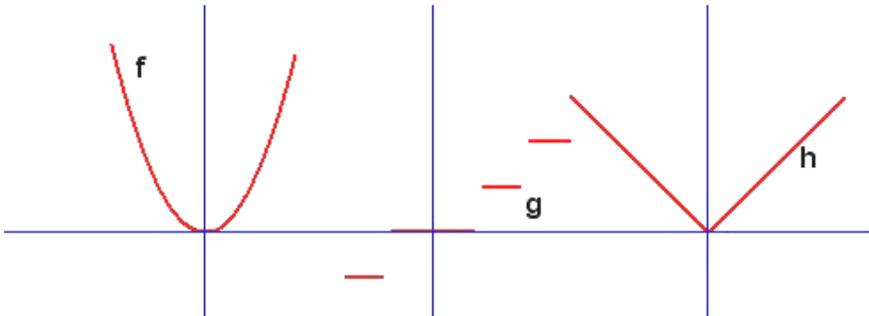
DIFFERENZIALRECHNUNG

Teil 1 (Theorie)

Die Stetigkeit von Funktionen	[62]
Definition des Differenzialquotienten	[66]
Beispiele von Ableitungsfunktionen	[71]
Einfache Ableitungsregeln	[72]
Logarithmus- und Sinus-Funktion	[76]

Stetigkeit von Funktionen

Gegeben ist eine reellwertige Funktion $y = f(x)$, d.h. den reellen Zahlen x eines Definitionsbereiches D werden in eindeutiger Weise reelle Zahlen y eines Wertebereiches W entsprechend einer Vorschrift f zugeordnet.

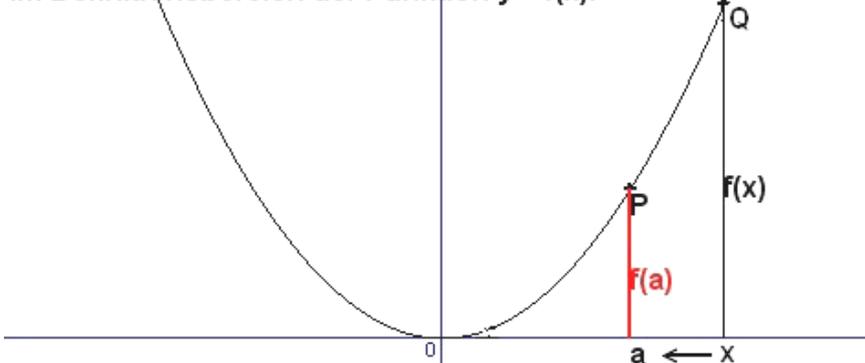


In der Abbildung sind drei verschiedene Funktionen f , g und h gezeichnet. $f(x) = x^2$ erzeugt die Quadrate, $g(x) = \text{int}(x)$ entfernt alle Nachkommastellen und $h(x) = \text{abs}(x)$ bildet die Beträge von den reellen Zahlen x .

Eine Funktion nennt man stetig, wenn ihr Schaubild (Graph) ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann, d.h. sie darf in ihrem Verlauf keine Sprünge oder Lücken aufweisen.

Offenkundig ist $g(x)$ in allen ganzen Zahlen (ohne 0) unstetig.

Wir wollen nun diese anschauliche Erklärung der Stetigkeit etwas exakter formulieren. Dazu betrachten wir die Stelle a im Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$.



Der Punkt $Q(x/f(x))$ nähert sich dem Punkt $P(a/f(a))$ an. Es ist offensichtlich, dass bei den Annäherungen x gegen a die jeweiligen Funktionswerte $f(x)$ sich dem Wert $f(a)$ nähern. d.h. bewegen sich die Argumente x beliebig nahe zur Stelle a , dann bewegen sich auch die Werte $f(x)$ beliebig nahe zu $f(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \dots \lim = \text{Grenzwert (limes)}$

Der Grenzwert der Funktion $f(x)$ ist $f(a)$, wenn x gegen a strebt.

Damit können wir die Stetigkeit definieren: Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle a stetig, wenn für jede beliebige Folge $\{x\}$, die gegen a strebt, die Folge der zugehörigen Funktionswerte $\{f(x)\}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Erzeugt man eine neue Funktion, indem man zwei gegebene Funktionen addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert, dann spricht man von einer zusammengesetzten Funktion. Beispielsweise $h(x) = f(x) + g(x)$.

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien an der Stelle a stetig.

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$$

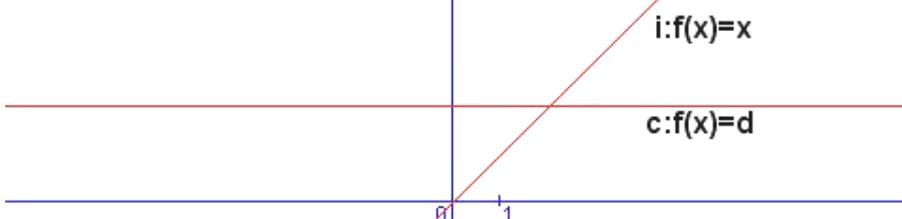
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a)$$

Wegen dem bekannten Grenzwertsatz für Folgen, dass der Grenzwert einer Summenfolge gleich der Summe der Grenzwerte der beiden Folgen ist, gilt:

Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist stetig an der Stelle a .

Die gleichen Überlegungen gelten auch für die anderen Zusammensetzungen von Funktionen $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ und auch für die verkettete Funktion $h(x) = g(f(x))$.

Sind f und g stetig in a , dann ist auch h stetig in a .



Betrachten wir erstens die konstante Funktion $c: f(x) = d$ und zweitens die identische Funktion $i: f(x) = x$. Offensichtlich sind beide Funktionen an jeder Stelle (global) stetig.

Durch Zusammensetzung dieser beiden Funktionen kann eine Vielfalt von Funktionen erzeugt werden, welche dann ihrerseits ebenfalls stetig sind, beispielsweise die Polynomfunktion $p(x)$.

$$p(x) = a(n) \cdot x^n + a(n-1) \cdot x^{(n-1)} + \dots + a(2) \cdot x^2 + a(1) \cdot x + a(0).$$

Im Bemühen immer exaktere Definitionen zu finden, wurden diese in der Sprache der Mengenlehre formuliert. Man nennt sie daher topologische Definitionen.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{x\} = a$$

Die reelle Zahl a ist der Grenzwert der Zahlenfolge $\{x\}$, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung $U(a;d)$ von a fast alle Zahlen der Folge liegen, d.h. zu jeder beliebig kleinen Länge d gibt es eine Nummer N , sodass für alle Zahlen x ab dieser Nummer gilt: $a - d < x < a + d$ oder $|x - a| < d$. Eine Folge ist eine Menge von bestimmt angeordneten und nummerierten Zahlen.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Die reelle Funktion $f(x)$ ist an der Stelle a stetig, wenn es zu jeder noch so kleinen Umgebung $V(f(a);e)$ eine Umgebung $U(a;d)$ gibt, sodass deren Funktionsbild $f(U)$ eine Teilmenge von V ist, d.h. für beliebige Längen e existiert eine Länge d , sodass aus $|x - a| < d$ folgt $|f(x) - f(a)| < e$.

Zur Übung soll die Stetigkeit von $f(x) = 1/x$ bewiesen werden.

Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist überall auf \mathbb{R} definiert, ausgenommen $x = 0$. Dort liegt eine unendliche Sprungstelle (Pol) vor. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Es soll topologisch die Stetigkeit in $a > 0$ bewiesen werden.

Beweis:

$b = f(a) = 1/a$ und e beliebig klein.

Umgebung $V(b;e)$: $b - e < f(x) < b + e$

$$b - e < f(x) < b + e$$

$$1/a - e < 1/x < 1/a + e$$

$$(1 - a^*e)/a < 1/x < (1 + a^*e)/a$$

$$a/(1 + a^*e) < x < a/(1 - a^*e)$$

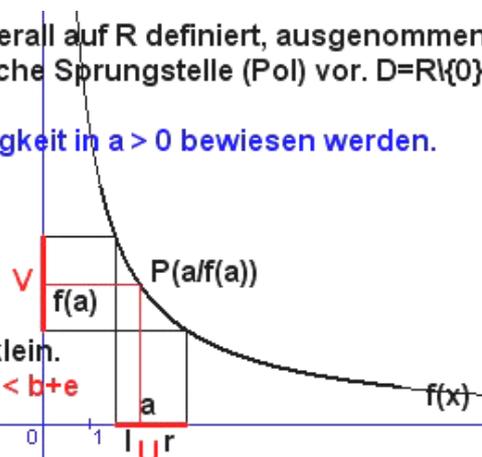
$$\text{linke Halblänge von } U(a): l = a \cdot a/(1 + a^*e) = (a^{2*}e)/(1 + a^*e)$$

$$\text{rechte Halblänge von } U(a): r = a/(1 - a^*e) - a = (a^{2*}e)/(1 - a^*e)$$

$$d = \min(l, r)$$

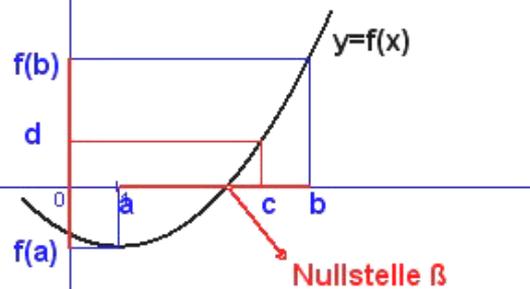
Umgebung $U(a;d)$: $a - d < x < a + d$

Zur Umgebung $V(f(a);e)$ existiert Umgebung $U(a;d)$ mit $V = f(U)$.
Damit ist die Stetigkeit von $f(x) = 1/x$ an der Stelle a bewiesen.



Der Zwischenwertsatz

Eine im Intervall $[a;b]$ stetige Funktion $y = f(x)$ ist beschränkt. Sie nimmt jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Zahlenwert mindestens einmal an, wenn x alle Zahlen des Intervalls durchläuft. Für alle d aus $[f(a);f(b)]$ gibt es ein c aus $[a;b]$ mit $f(c) = d$.

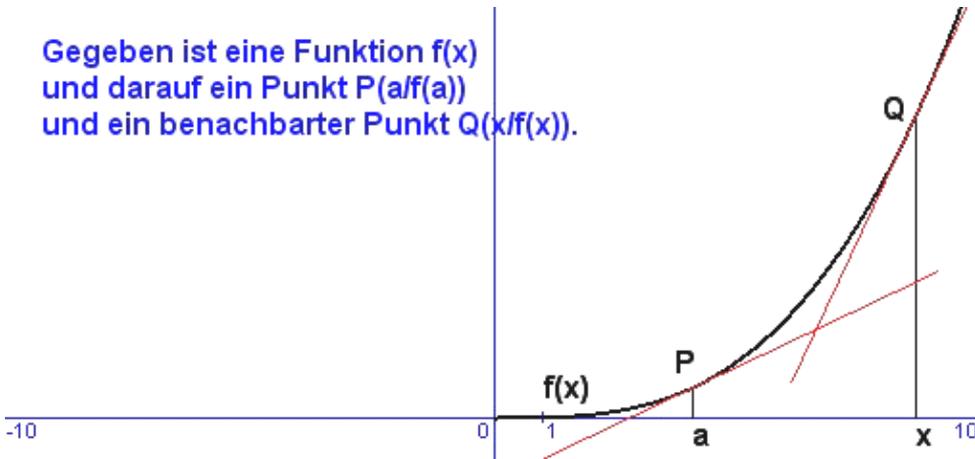


Beweis: Es sei $[a(n);b(n)]$ eine Intervallschachtelung mit fortgesetzter Halbierung und $f(a(n)) \leq d \leq f(b(n))$. Ihr innerster Punkt sei c , also $\lim \{a(n)\} = \lim \{b(n)\} = c$ für n gegen Unendlich. Weil $f(x)$ stetig ist, gilt $\lim \{f(a(n))\} = \lim \{f(b(n))\}$ für n gegen Unendlich. Somit muss gelten: $d = f(c)$.

Folgerung: Haben im Intervall $[a;b]$ die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Vorzeichen, dann liegt dort eine Nullstelle β .

Definition des Differenzialquotienten

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$ und darauf ein Punkt $P(a/f(a))$ und ein benachbarter Punkt $Q(x/f(x))$.



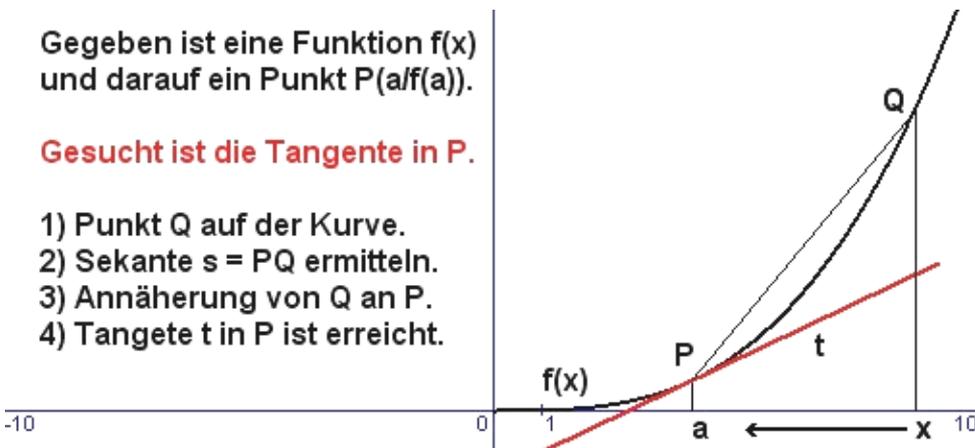
Betrachtet man den Kurvenverlauf in den Punkten P und Q, dann ist offensichtlich, dass die Kurve im Punkt Q steiler ansteigt als im Punkt P. Als ein Maß für den Kurvenanstieg in einem Punkt dient die dortige Tangentensteigung.

Diese Tangentensteigung beschreibt die lokale Veränderung der Funktion in einem Punkt. Sie wird Differenzialquotient der Funktion an der Stelle a genannt.

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$ und darauf ein Punkt $P(a/f(a))$.

Gesucht ist die Tangente in P.

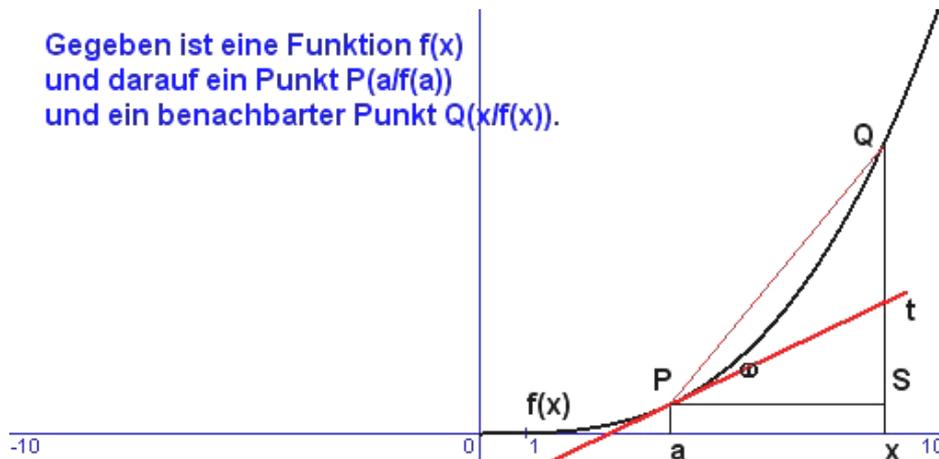
- 1) Punkt Q auf der Kurve.
- 2) Sekante $s = PQ$ ermitteln.
- 3) Annäherung von Q an P.
- 4) Tangente t in P ist erreicht.



Die Tangente ist somit die Grenzlage der Sekante, wenn sich x kontinuierlich an die Stelle a annähert. Dabei wird die Differenz $(x - a)$ unendlich klein.

Wird nun für jede Stelle x der Annäherung die Steigung k der Sekante berechnet, dann erhält man in der Grenzlage die Steigung der Tangente !

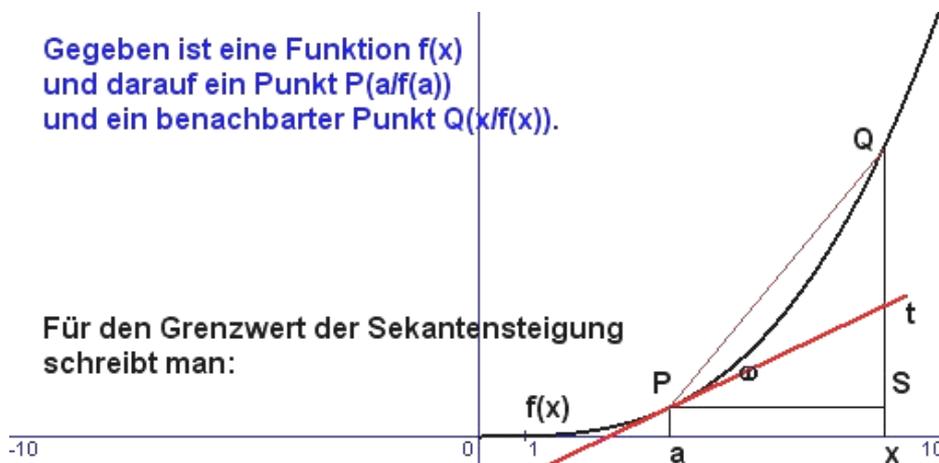
Gegeben ist eine Funktion $f(x)$
und darauf ein Punkt $P(a/f(a))$
und ein benachbarter Punkt $Q(x/f(x))$.



Im rechtwinkligen Dreieck PSQ ist $(x-a)$ die Ankathete
und $(f(x)-f(a))$ die Gegenkathete und w der Winkel bei P.
Für die Steigung k der Sekante PQ gilt dann $k = \tan(w)$.

Also ist $k = (f(x)-f(a)) / (x-a)$. Dieser Differenzenquotient
gibt die mittlere Änderungsrate der Kurve an. Wenn wir
die Stelle x kontinuierlich an die Stelle a annähern, dann
erhält man als Grenzwert die Steigung der Tangente.

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$
und darauf ein Punkt $P(a/f(a))$
und ein benachbarter Punkt $Q(x/f(x))$.



Für den Grenzwert der Sekantensteigung
schreibt man:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \quad \text{oder} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

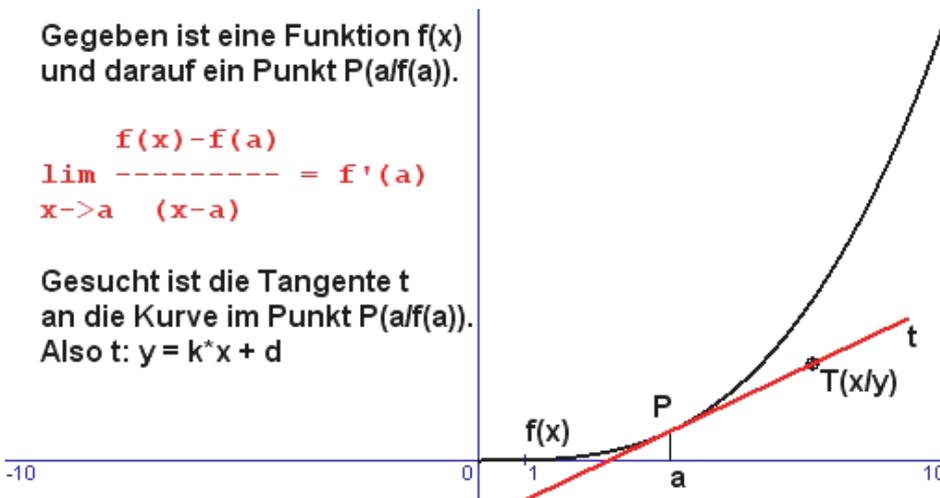
Dabei bedeutet "lim" den Grenzwert (limes) für die Annäherung
von x gegen a ($x \rightarrow a$) und das neue Symbol $f'(a)$ steht für die
Tangentensteigung bei a . Diese heißt auch Differenzialquotient.
Man sagt dazu "f Strich an der Stelle a".

Bei der zweiten Schreibweise durchläuft $h = (x-a)$ eine Nullfolge.

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$
und darauf ein Punkt $P(a/f(a))$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} = f'(a)$$

Gesucht ist die Tangente t
an die Kurve im Punkt $P(a/f(a))$.
Also $t: y = k \cdot x + d$



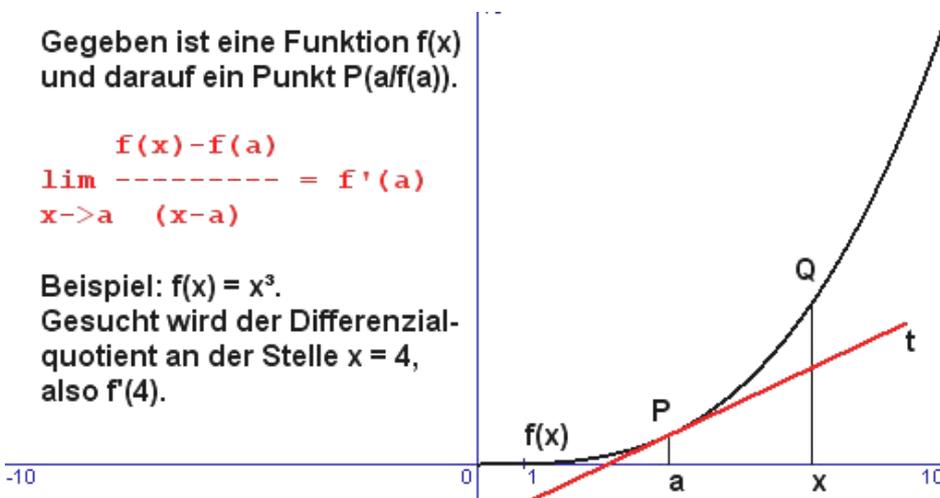
Von der Tangentengleichung $y = k \cdot x + d$ kennen wir die
Steigung $k = f'(a)$. Es muss y -Abschnitt d ermittelt werden.
 P liegt auf t , also gilt $f(a) = f'(a) \cdot a + d$, also $d = f(a) - f'(a) \cdot a$.
Einsetzen in die Tangentengleichung: $y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$.

Tangentengleichung von t in Punkt P : $y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$.

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$
und darauf ein Punkt $P(a/f(a))$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} = f'(a)$$

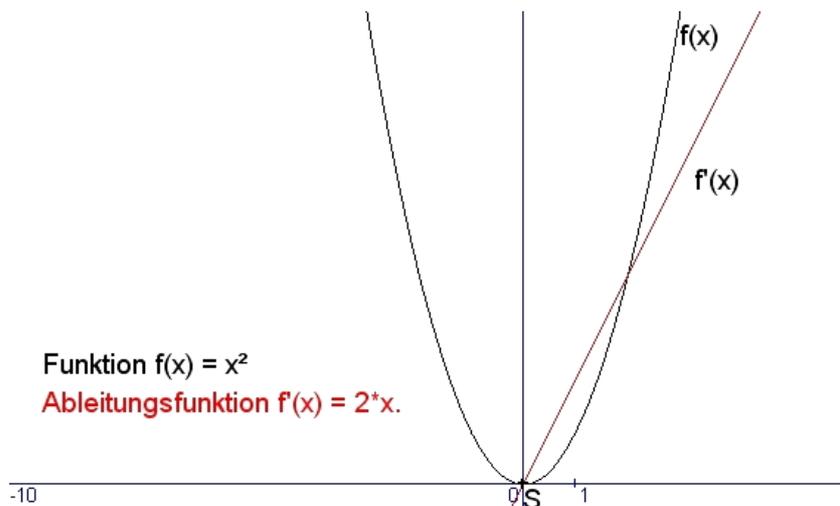
Beispiel: $f(x) = x^3$.
Gesucht wird der Differenzial-
quotient an der Stelle $x = 4$,
also $f'(4)$.



(1) Es gilt: $f(x) - f(a) = x^3 - a^3 = (x - a) \cdot (x^2 + x \cdot a + a^2)$.
Dividiert man durch $(x - a)$ so erhält man als Differenzen-
quotient $(x^2 + x \cdot a + a^2)$.

(2) Nähert man nun x kontinuierlich an die Stelle a , dann
ist der Grenzwert $\lim(x^2 + x \cdot a + a^2) = (a^2 + a^2 + a^2) = 3 \cdot a^2$.
Für $a = 4$ ist der Differenzialquotient dann $f'(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$.

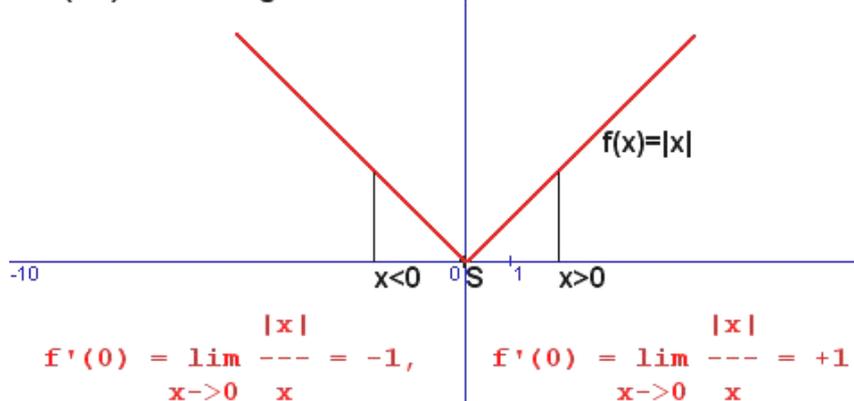
**Ergebnis: Für die Funktion $f(x) = x^3$ gilt $f'(a) = 3 \cdot a^2$.
Tangente t in $P(4/64)$: $y = 48 \cdot (x-4) + 64 = 48 \cdot x - 128$.**



Es gibt Funktionen mit Stellen x , wo der Differenzialquotient nicht existiert. Eine Funktion $f(x)$ heißt global differenzierbar, wenn $f'(x)$ an jeder Stelle existiert. Dadurch wird eine neue Funktion erzeugt, die jedem x -Wert den Differenzialquotienten als Funktionswert zuordnet. Diese Funktion $y = f'(x)$ nennt man die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion f .

Die Ableitungsfunktion stellt die Tangentensteigungen dar. Wenn sie an einer Stelle Null wird, dann verläuft die Kurventangente dort parallel zur x -Achse, beispielsweise im Punkt S .

Es gibt Funktionen $f(x)$, welche an einer Stelle a zwar stetig sind, aber nicht differenzierbar, d.h. es kann dort keine eindeutige Tangentensteigung ermittelt werden. Beispielsweise ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ im Punkt $S(0|0)$ zwar stetig aber nicht differenzierbar.



Nähert man sich der Knickstelle $S(0|0)$ von links ($x < 0$), dann ist $f'(0) = -1$. Nähert man sich von rechts ($x > 0$), dann ist $f'(0) = +1$. Die Lage der Tangente im Punkt S ist daher nicht eindeutig bestimmt. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist daher an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Das Auffinden der Ableitungsfunktion $f'(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ nennt man "Differenzieren". Ausgehend von den Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen können für die wichtigsten Funktionen so genannte Differentiationsregeln hergeleitet werden. Beispielsweise sei die "Produktregel" bewiesen.

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$(f(a) \cdot g(a))' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{(x-a)}$$

$$(f(a) \cdot g(a))' = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)} \cdot f(a) \right)$$

$$(f(a) \cdot g(a))' = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Der Beweis setzt voraus, dass beide Funktionen an der Stelle a differenzierbar und dort auch stetig sind.

Auf der nachfolgenden Seite sollen noch zwei wichtige Lehrsätze über differenzierbare Funktionen bewiesen werden.

Der Satz von Rolle

Es sei $y = f(x)$ eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ differenzierbare Funktion. Wenn $f(a) = f(b) = 0$ ist, dann gibt es eine Stelle c aus $[a; b]$ mit $f'(c) = 0$.

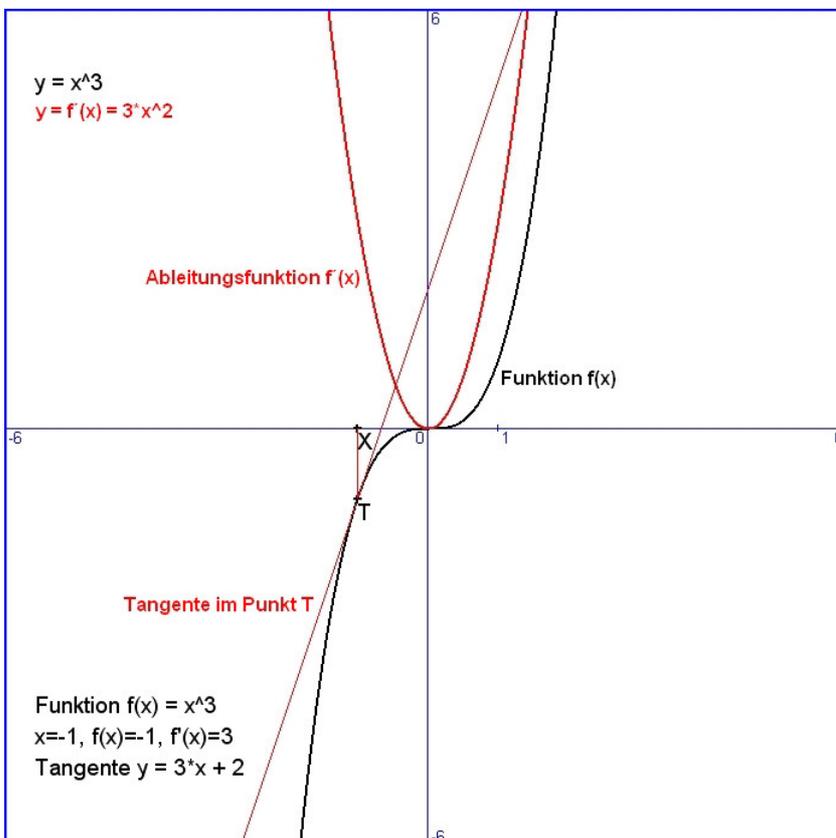
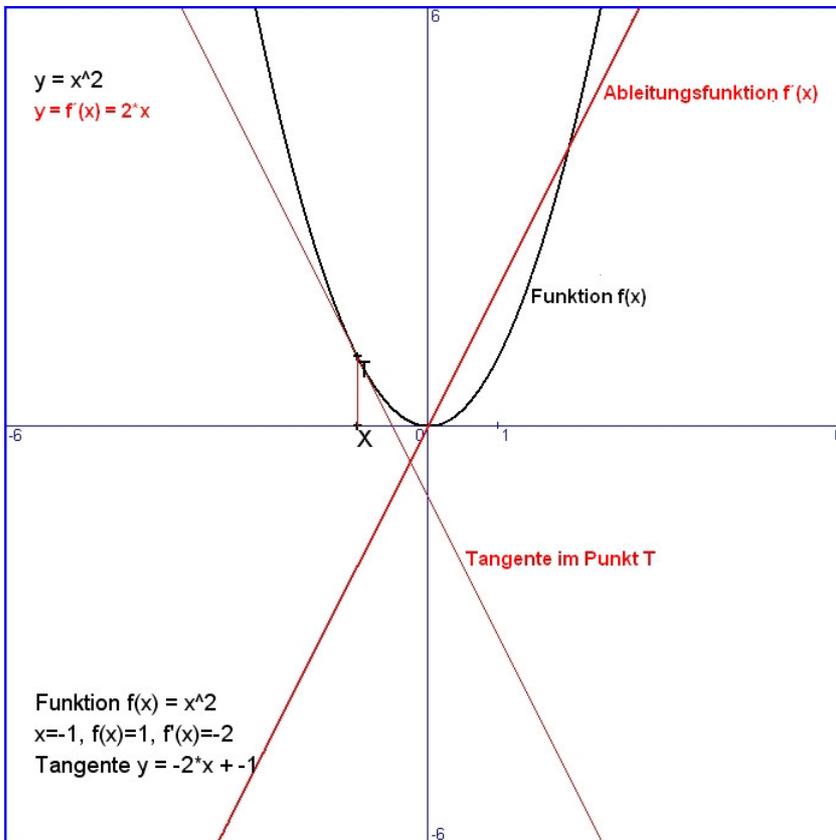
Beweis: Wenn $f(x)$ auf $[a; b]$ differenzierbar ist, dann ist dort $f(x)$ auch stetig und beschränkt. Also muss es in $[a; b]$ einen Scheitelpunkt $S(c|f(c))$ geben (Minimum oder Maximum). D.h. im Punkt S ist die Tangente parallel zur x -Achse: $f'(c) = 0$.

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Es sei $y = f(x)$ eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es eine Stelle c aus $[a; b]$ mit $f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)$. Dort ist die Steigung der Tangente gleich der Steigung der Sehne durch die zwei Endpunkte des gegebenen Intervalls.

Beweis: Wir drehen zuerst die Kurve, so dass die Sehne parallel zur x -Achse liegt. Dann verschieben wir, so dass die Sehne auf der x -Achse liegt. Nach dieser Bewegung sind die Bedingungen des Satzes von Rolle erfüllt und damit ist alles bewiesen.

Zwei Beispiele von Ableitungsfunktionen $f'(x)$



Einfache Ableitungsregeln

Das Auffinden der Ableitungsfunktion $f'(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ nennt man "Differenzieren". Ausgehend von den Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen können für die wichtigsten Funktionen so genannte Ableitungsregeln hergestellt werden. Einige sollen hier exemplarisch bewiesen werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktionen an allen Stellen x und a differenzierbar und daher auch stetig sind.

Regel vom konstanten Faktor k : $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

$$(k \cdot f(x))' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{k \cdot f(x) - k \cdot f(a)}{(x-a)}$$

$$(k \cdot f(x))' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{k \cdot (f(x) - f(a))}{(x-a)}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} = k \cdot f'(a).$$

Regel vom konstanten Summanden c : $(f(x) + c)' = f'(x)$
Der Beweis erfolgt wie bei der Faktor-Regel.

Summenregel: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(a) \pm g(a))}{(x-a)}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \pm \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)} \right)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(a) \pm g'(a)$$

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{(x-a)}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)} \cdot f(x) \right)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Kehrwertregel: $(1/g)' = -g' / g^2$

$$(1/g(a))' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x) - 1/g(a)}{(x-a)}$$

$$(1/g(a))' = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{(g(a)-g(x))/(g(x)*g(a))}{(x-a)} \right)$$

$$(1/g(a))' = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)*g(a)} * \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)} \right)$$

$$(1/g(a))' = - \frac{1}{g(a)*g(a)} * g'(a)$$

$$(1/g(a))' = -g'(a) / g^2(a)$$

Quotientenregel: $(f/g)' = (f'*g - g'*f) / g^2$

Der Beweis folgt aus Produkt- und Kehrwertregel:

$$(f/g)' = (f*1/g)' = f'*(1/g) + (-g'/g^2)*f$$

$$(f/g)' = (f'*g - g'*f) / g^2$$

Gegeben sind zwei Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$
Wird der Funktionswert von f zum Argument von g , so erhält man eine verkettete Funktion $h(x) = g(f(x))$.

Kettenregel: $h'(a) = g'(f(a)) * f'(a)$

(äußere Ableitung mal innerer Ableitung)

$$(h(a))' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{(x-a)}$$

$$(h(a))' = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} * \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \right)$$

$$(h(a))' = g'(f(a)) * f'(a)$$

Gegeben sind $y = f(x)$ und ihre Umkehrfunktion g ,
d.h. $g(f(x)) = i(x) = x$. Dann gilt: $g' = 1 / f'$.

Diese Umkehrregel folgt aus der Kettenregel:

$$g(f(a))' = g'(f(a)) * f'(a) = 1$$

$$g'(f(a)) = 1 / f'(a)$$

Identische Funktion $i(x) = x$, $i'(x) = 1$.

Konstante Funktion $k(x) = c$, $k'(x) = 0$.

Beweis: Der Anstieg bei beiden Funktionen ist überall konstant: $\tan(45^\circ)=1$ bzw. $\tan(0^\circ)=0$.

Potenzfunktion: $y = x^r$, $y' = r \cdot x^{(r-1)}$, mit $r = \text{rational}$.

Fall 1: $r = n$, eine natürliche Zahl, $y = x^n$.

$$y = x^2 = x \cdot x, y' = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2 \cdot x.$$

$$y = x^3 = (x^2) \cdot x, y' = (2 \cdot x) \cdot x + (x^2) \cdot 1 = 3 \cdot x^2.$$

$$y = x^n = (x^{(n-1)}) \cdot x, y' = (n-1) \cdot x^{(n-2)} \cdot x + x^{(n-1)} \cdot 1 = n \cdot x^{(n-1)}.$$

Ergebnis: $y' = r \cdot x^{(r-1)}$.

Fall 2: $r = -n$, eine negative ganze Zahl, $y = x^{(-n)} = 1/x^n$.

$$y' = (1/x^n)' = -n \cdot x^{(n-1)} / x^{(2 \cdot n)} = -n \cdot x^{(-n-1)}.$$

Ergebnis: $y' = r \cdot x^{(r-1)}$.

Fall 3: $r = 1/n$, $y = x^{(1/n)} = n\text{-te Wurzel aus } x$.

$y = x^{(1/n)}$ ist die Umkehrfunktion von $x = y^n$.

Wegen Umkehrregel gilt: $y' = 1/(n \cdot y^{(n-1)})$.

$$y' = 1/n \cdot y^{(1-n)} = 1/n \cdot x^{(1/n \cdot (1-n))} = 1/n \cdot x^{(1/n-1)}.$$

Ergebnis: $y' = (x^r)' = r \cdot x^{(r-1)}$.

Fall 4: $r = z/n$, eine rationale Zahl, $y = x^{(z/n)}$.

$y = x^{(z/n)} = (x^{(1/n)})^z$. Wegen Kettenregel gilt:

$$y' = z \cdot (x^{(1/n)})^{(z-1)} \cdot (1/n) \cdot x^{(1/n-1)}.$$

$$y' = (z/n) \cdot x^{((z-1)/n)} \cdot x^{((1-n)/n)}.$$

$$y' = (z/n) \cdot x^{((z-n)/n)} = (z/n) \cdot x^{(z/n-1)}.$$

Ergebnis: $y' = r \cdot x^{(r-1)}$.

Mit diesen Regeln werden viele verschiedene Funktionen differenziert: z.B. Polynome und rationale Funktionen.

Die Ableitungsfunktionen für die Sinusfunktion und für die Logarithmusfunktion werden hier ohne Beweis angegeben:

Logarithmusfunktion: $y = \ln(x)$, $y' = 1/x$.

Sinusfunktion: $y = \sin(x)$, $y' = \cos(x)$.

Damit können dann weitere Funktionen differenziert werden.

Exponentialfunktion: $y = \exp(x)$, $y' = \exp(x)$.

Beweis: $\ln(\exp(x)) = x$, $1 / \exp(x) \cdot \exp(x)' = 1$, $\exp(x)' = \exp(x)$.

Cosinusfunktion: $y = \cos(x)$, $y' = -\sin(x)$.

Beweis: $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, $2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x)' = -2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$.
 $\cos(x)' = -\sin(x)$.

Tangensfunktion: $y = \tan(x)$, $y' = 1 / \cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Beweis: $\tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$ und Quotientenregel anwenden.

Arcussinus-Funktion: $y = \arcsin(x)$, $y' = 1 / \sqrt{1 - x^2}$.

Beweis: $\arcsin(\sin(x)) = x$, $\arcsin(\sin(x))' \cdot \cos(x) = 1$.

$$\arcsin(\sin(x))' = 1 / \cos(x) = 1 / \sqrt{1 - \sin^2(x)}.$$

$$\arcsin(x)' = 1 / \sqrt{1 - x^2}.$$

Zum Schluss einige Anwendungen der Ableitungsregeln:

$$y = 4 \cdot x^3$$

$$y' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12 \cdot x^2$$

Potenzregel

$$y = \sqrt{3 \cdot x^2} = (3 \cdot x^2)^{1/2}$$

$$y' = (1/2) \cdot (3 \cdot x^2)^{-1/2} \cdot (6 \cdot x) = (3 \cdot x) / \sqrt{3 \cdot x^2}$$

Kettenregel und Potenzregel

$$y = (3 \cdot x^2 + 5 \cdot x) / (2 \cdot x - 1)$$

$$y' = ((6 \cdot x + 5) \cdot (2 \cdot x - 1) - 2 \cdot (3 \cdot x^2 + 5 \cdot x)) / (2 \cdot x - 1)^2 =$$

$$y' = (12 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 6 \cdot x - 5 - 6 \cdot x^2 - 10) / (4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1) =$$

$$y' = (6 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 15) / (4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1)$$

Quotientenregel und Potenzregel

$$y = x \cdot \exp(x)$$

$$y' = 1 \cdot \exp(x) + x \cdot \exp(x) = (1 + x) \cdot \exp(x)$$

Produktregel und Exponentialfunktion

$$y = \sin(x^2 - 1)$$

$$y' = \cos(x^2 - 1) \cdot (2 \cdot x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2 - 1)$$

Kettenregel und Sinusfunktion

Ableitung der LOGARITHMUS-Funktion

In diesem Kapitel sollen die Ableitungsfunktion $f'(x)$ von Sinusfunktion und Logarithmusfunktion hergeleitet werden.

Definition des Differenzialquotienten:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}$$

Alternative Schreibweise des Differenzialquotienten:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Wenn x gegen a strebt, dann strebt $h = (x - a)$ gegen Null. Umgekehrt wenn $h = (x - a)$ gegen Null strebt, dann muss x gegen a streben. Also sind die beiden Schreibweisen des Differenzialquotienten äquivalent.

Gegeben ist die Logarithmusfunktion $y = \ln(x)$.

In anderen Kapiteln ist der natürliche Logarithmus ausführlich beschrieben. Er ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ mit $e^{\ln(x)} = x$.

Es sollen noch drei Hilfssätze bewiesen werden. Dabei sind nur die Rechenregeln für Potenzen vorausgesetzt.

Hilfssatz 1: $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$.

Beweis: $x \cdot y = e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} = e^{(\ln(x) + \ln(y))}$.
d.h. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Hilfssatz 2: $k \cdot \ln(x) = \ln(x^k)$.

Beweis: $x^k = e^{(\ln(x))^k} = e^{(k \cdot \ln(x))}$.
d.h. $\ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$.

Es ist $a \log(x)$ der Logarithmus von x zur Basis a , und somit gilt $a^{(a \log(x))} = x$.

Hilfssatz 3: $a \log(x) = \ln(x) / \ln(a)$.

Beweis: $x = a^{(a \log(x))} = (e^{\ln(a)})^{(a \log(x))} = e^{(\ln(a) \cdot a \log(x))}$.
 $x = e^{\ln(x)} = e^{(\ln(a) \cdot a \log(x))}$, d.h. $\ln(x) = \ln(a) \cdot a \log(x)$,
und somit gilt $a \log(x) = \ln(x) / \ln(a)$.

Gegeben ist die Logarithmusfunktion $y = \ln(x)$.

$$y' = \ln(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} (\ln(x+h) - \ln(x)) / h &= \ln((x+h)/x) / h = \\ \ln(1+h/x) / (x \cdot h/x) &= (1/x) * \ln((1+1/(x/h))^{(x/h)}). \end{aligned}$$

Substitution: $n = x / h$.

Wenn h gegen Null strebt, dann strebt n gegen Unendlich.

$$(\ln(x+h) - \ln(x)) / h = (1/x) * \ln((1+1/n)^n).$$

$$y' = \lim((1/x) * \ln((1+1/n)^n)) \text{ für } n \text{ gegen Unendlich.}$$

$$y' = (1/x) * \lim(\ln((1+1/n)^n)) \text{ für } n \text{ gegen Unendlich.}$$

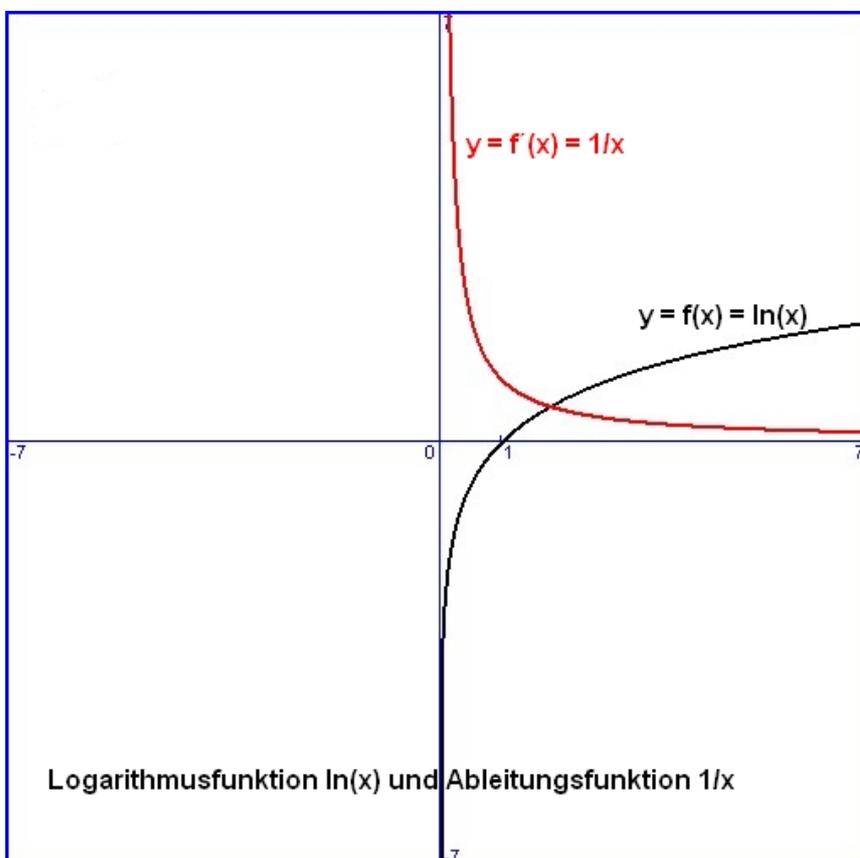
\ln und \lim können vertauscht werden, weil $\ln(x)$ stetig ist.

$$y' = (1/x) * \ln(\lim(1+1/n)^n) \text{ für } n \text{ gegen Unendlich.}$$

$$y' = (1/x) * \ln(e) \text{ mit } e = 2.718..... \text{ Eulersche Zahl.}$$

$$y' = 1/x, \text{ weil } \ln(e) = 1 \text{ ist.}$$

Damit wurde bewiesen, dass $\ln(x)' = 1/x$ ist.



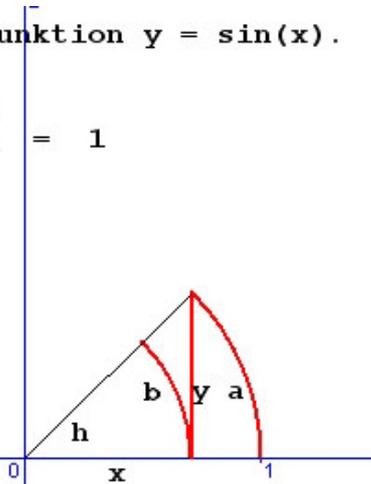
Ableitung der SINUS-Funktion

Gegeben ist die Sinusfunktion $y = \sin(x)$.

$$\text{Hilfssatz: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned} y &= \sin(h) \\ x &= \cos(h) \\ b &= x \cdot \pi / 180 \\ a &= 1 \cdot \pi / 180 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b &\leq y \leq a \\ x \cdot \pi / 180 &\leq y \leq \pi / 180 \\ x &\leq y \cdot 180 / (\pi) \leq 1 \\ \text{Winkel } h \text{ im Bogenmaß, d.h. } 180^\circ &= \pi \\ x &\leq y/h \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(h) &\leq \sin(h)/h \leq 1 \\ \text{Wenn } h \text{ gegen } 0 \text{ strebt, dann gilt:} \\ 1 &\leq \sin(h)/h \leq 1 \end{aligned}$$

Ergebnis: $\lim(\sin(h)/h) = 1$ für h gegen 0.

Gegeben ist die Sinusfunktion $y = \sin(x)$.

$$y' = \sin(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+h) &= \sin((x+h/2) + h/2) = \\ \sin(x+h/2) \cdot \cos(h/2) &+ \cos(x+h/2) \cdot \sin(h/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin((x+h/2) - h/2) = \\ \sin(x+h/2) \cdot \cos(h/2) &- \cos(x+h/2) \cdot \sin(h/2) \end{aligned}$$

$$\sin(x+h) - \sin(x) = 2 \cdot \cos(x+h/2) \cdot \sin(h/2)$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x+h/2) \cdot \frac{\sin(h/2)}{(h/2)}$$

Wenn h gegen 0 strebt, dann strebt auch $h/2$ gegen 0.
Wegen dem Hilfssatz gilt somit $y' = \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$.

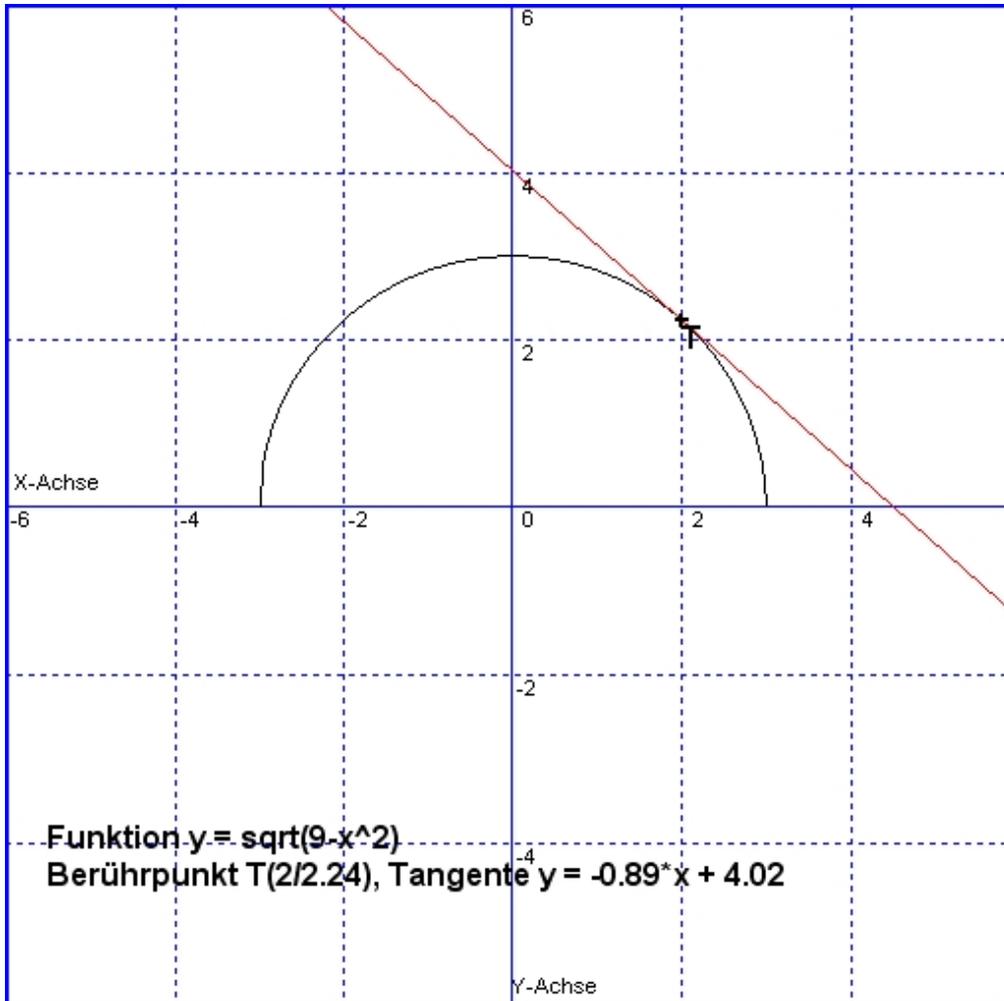
Damit wurde bewiesen, dass $\sin(x)' = \cos(x)$ ist.

DIFFERENZIALRECHNUNG

Teil 2 (Praxis)

Tangenten in Kurvenpunkten	[80]
Kurvendiskussion - Theorie	[81]
Kurvendiskussion - Praxis	[84]
Asymptoten einer Kurve	[87]
Extremwertaufgaben	[88]

Tangente in einem Kurvenpunkt



Gegeben ist die Kreisfunktion $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit dem Radius $r = 3$.
 Gesucht ist die Tangente im Kreispunkt $T(2/y)$.

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} = (9-x^2)^{1/2}$$

$$f'(x) = (1/2) \cdot (9-x^2)^{-1/2} \cdot (-2 \cdot x) = -x / \sqrt{9-x^2}$$

Tangentengleichung im Berührungspunkt $T(a/f(a))$: $y = f'(a) \cdot x + (f(a) - f'(a) \cdot a)$

$$f(2) = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} = 2.24$$

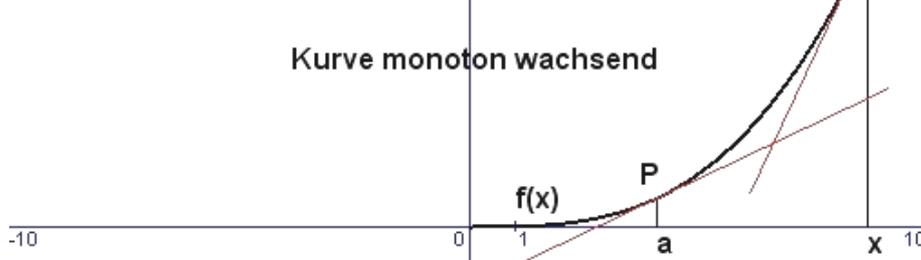
$$f'(2) = -2 / \sqrt{5} = -0.89$$

Berührungspunkt $T(2/2.24)$

Tangentengleichung in T : $y = -0.89 \cdot x + 4.02$

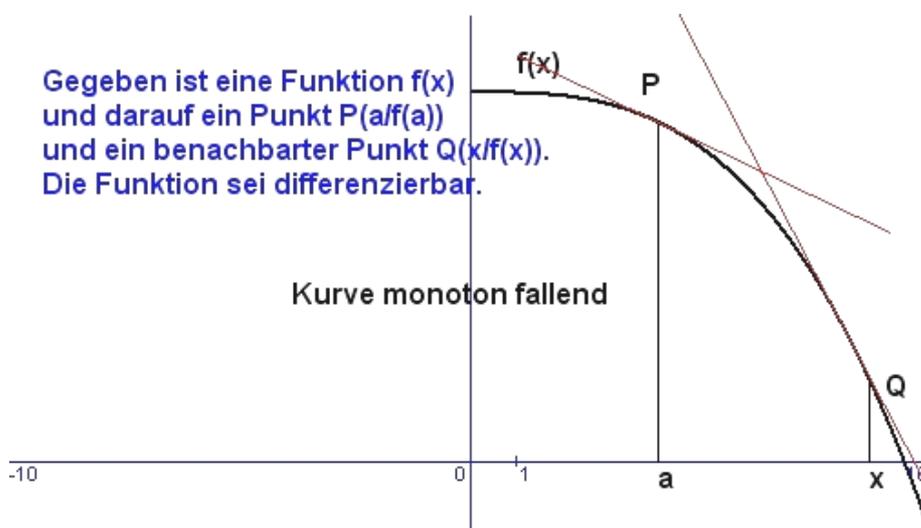
Kurvendiskussion – Theorie

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$
und darauf ein Punkt $P(a/f(a))$
und ein benachbarter Punkt $Q(x/f(x))$.
Die Funktion sei differenzierbar.



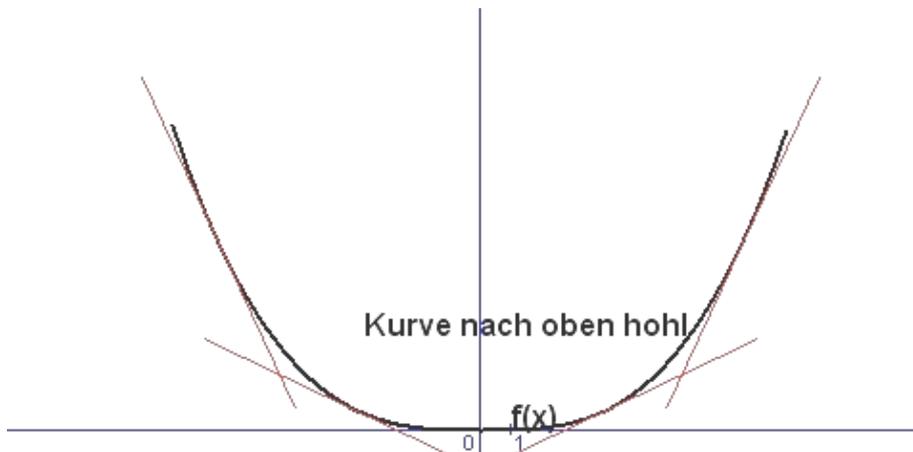
Die Kurve ist zwischen P und Q monoton wachsend,
d.h. $f(x) \geq f(a)$ für alle $x > a$.
d.h. $f(x) - f(a) \geq 0$ für alle $x > a$.
d.h. $(f(x) - f(a)) / (x - a) \geq 0$ für alle $x > a$.
Wenn nun x gegen a strebt, sind alle Differenzenquotienten
immer größer oder gleich Null, also auch ihr Grenzwert $f'(a)$.

Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall genau dann monoton
wachsend, wenn dort die Ableitung $f'(x) \geq 0$ ist.



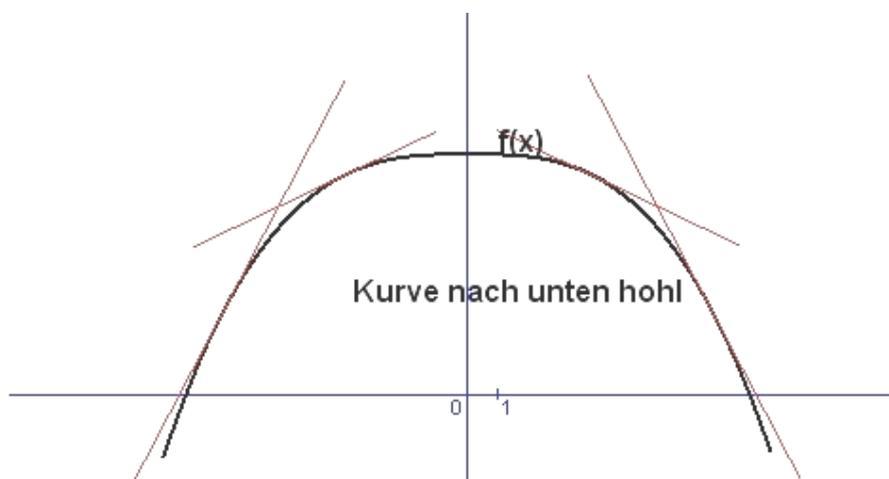
Die Kurve ist zwischen P und Q monoton fallend,
d.h. $f(x) \leq f(a)$ für alle $x > a$.
d.h. $f(x) - f(a) \leq 0$ für alle $x > a$.
d.h. $(f(x) - f(a)) / (x - a) \leq 0$ für alle $x > a$.
Wenn nun x gegen a strebt, sind alle Differenzenquotienten
immer kleiner oder gleich Null, also auch ihr Grenzwert $f'(a)$.

Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall genau dann monoton
fallend, wenn dort die Ableitung $f'(x) \leq 0$ ist.



Die Kurve ist auf dem ganzen Intervall nach oben hohl, d.h. die Tangentensteigung $f'(x)$ wächst dort monoton, weil für $x < 0$ der Steigungswinkel w der Tangenten stumpf ist und die Tangentensteigung $(\tan(w))$ dort negativ ist. Nach dem Monotoniesatz gilt daher für die zweite Ableitung (Ableitung der ersten Ableitung) $f''(x) \geq 0$.

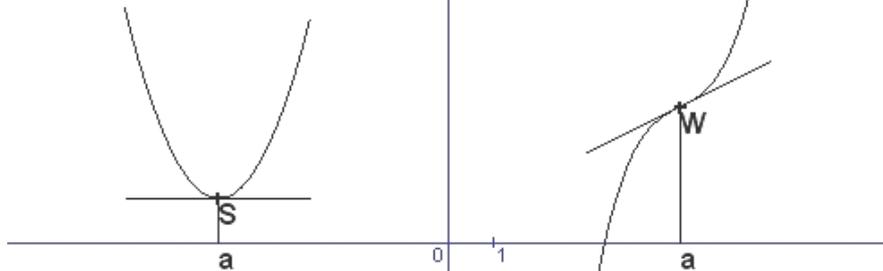
Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall genau dann nach oben hohl, wenn dort die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ ist.



Die Kurve ist auf dem ganzen Intervall nach unten hohl, d.h. die Tangentensteigung $f'(x)$ fällt dort monoton, weil für $x > 0$ der Steigungswinkel w der Tangenten stumpf ist und die Tangentensteigung $(\tan(w))$ dort negativ ist. Nach dem Monotoniesatz gilt daher für die zweite Ableitung (Ableitung der ersten Ableitung) $f''(x) \leq 0$.

Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall genau dann nach unten hohl, wenn dort die zweite Ableitung $f''(x) \leq 0$ ist.

Mit den Monotoniesätzen der Differenzialrechnung können im Kurvenverlauf zwei verschiedene Arten von Punkten unterschieden und ermittelt werden: Scheitelpunkte (S) und Wendepunkte (W). Scheitelpunkte heißen auch Extrempunkte.



(1) Ein Scheitelpunkt S liegt dann vor, wenn die Tangente in S parallel zur x-Achse verläuft und in einer Punktumgebung die Krümmungsrichtung gleich bleibt (nach oben oder unten hohl).

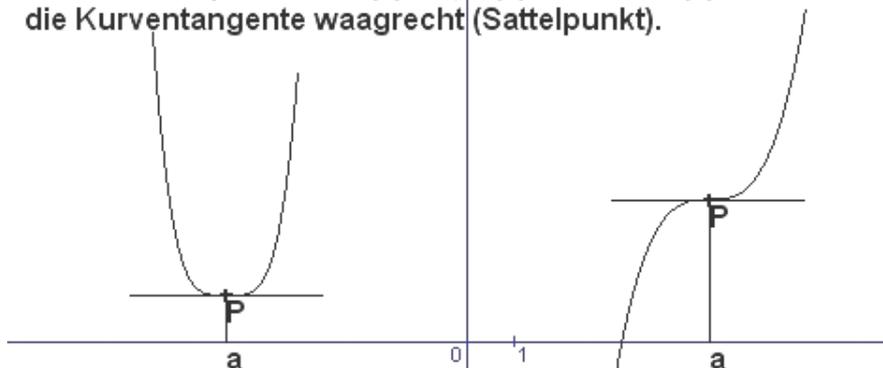
S ist genau dann ein Tiefpunkt, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$.

S ist genau dann ein Hochpunkt, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$.

(2) Ein Wendepunkt w liegt vor, wenn sich die Richtung der Krümmung im Punkt W ändert, d.h. auf einer Seite ist $f''(a) < 0$ und auf der anderen Seite ist $f''(a) > 0$. Wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungsfunktion muss daher $f''(a) = 0$ sein!

Beim Kurvenpunkt mit $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ und $f'''(a) = 0$ ist die Kurvenkrümmung besonders flach (Flachpunkt).

Beim Kurvenpunkt mit $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ und $f'''(a) < 0$ ist die Kurventangente waagrecht (Sattelpunkt).



Die Entscheidung ob Wendepunkt vorliegt oder nicht, liefert in obigem Beispiel erst die dritte Ableitung $f'''(a)$.

Ganz allgemein gilt: Ein Wendepunkt liegt dann vor, wenn der Grad der ersten nicht verschwindenden Ableitung ungerade ist. Ist dieser Grad hingegen gerade, dann handelt es sich um einen Scheitelpunkt.

Auf der nächsten Seite werden beliebige Kurven dargestellt und mit Hilfe der gewonnenen Kenntnisse diskutiert.

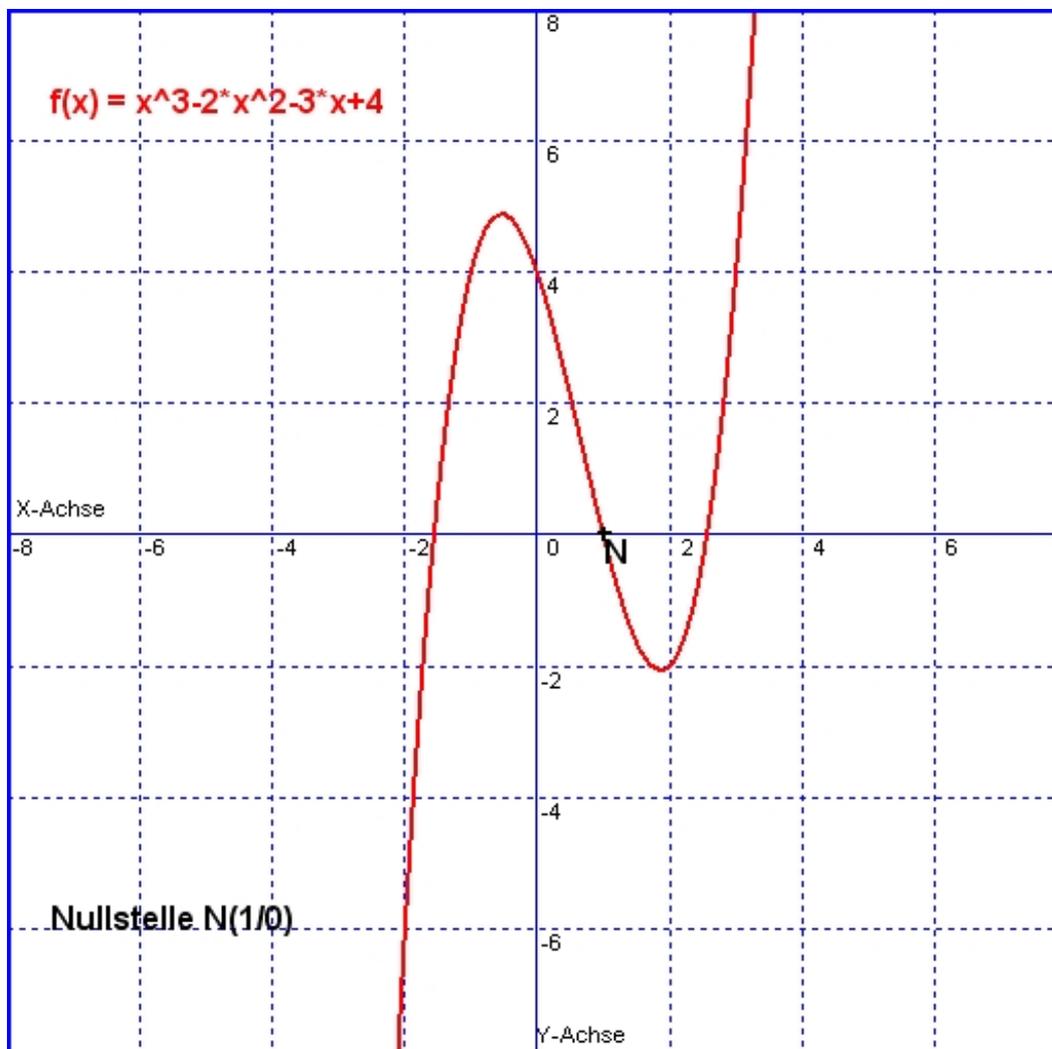
Kurvendiskussion – Praxis

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades:

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Für die Nullstellen gilt: $f(x) = 0$.

An Hand des Schaubildes der Funktion und durch Ausprobieren erhält man die Nullstelle $x_0 = 1$. Daher muss $(x - 1)$ die Polynomfunktion $f(x)$ teilen, d.h. $(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) : (x - 1) = x^2 - x - 4$. Die restlichen zwei Nullstellen sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 4$.
 $x_1 = (1 + \sqrt{17}) / 2 = 2.56$ und $x_2 = (1 - \sqrt{17}) / 2 = -1.56$.



Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades:

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Für die Extremstellen gilt: $f'(x) = 0$

Für Hochpunkte gilt zusätzlich: $f''(x) < 0$

Für Tiefpunkte gilt zusätzlich: $f''(x) > 0$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

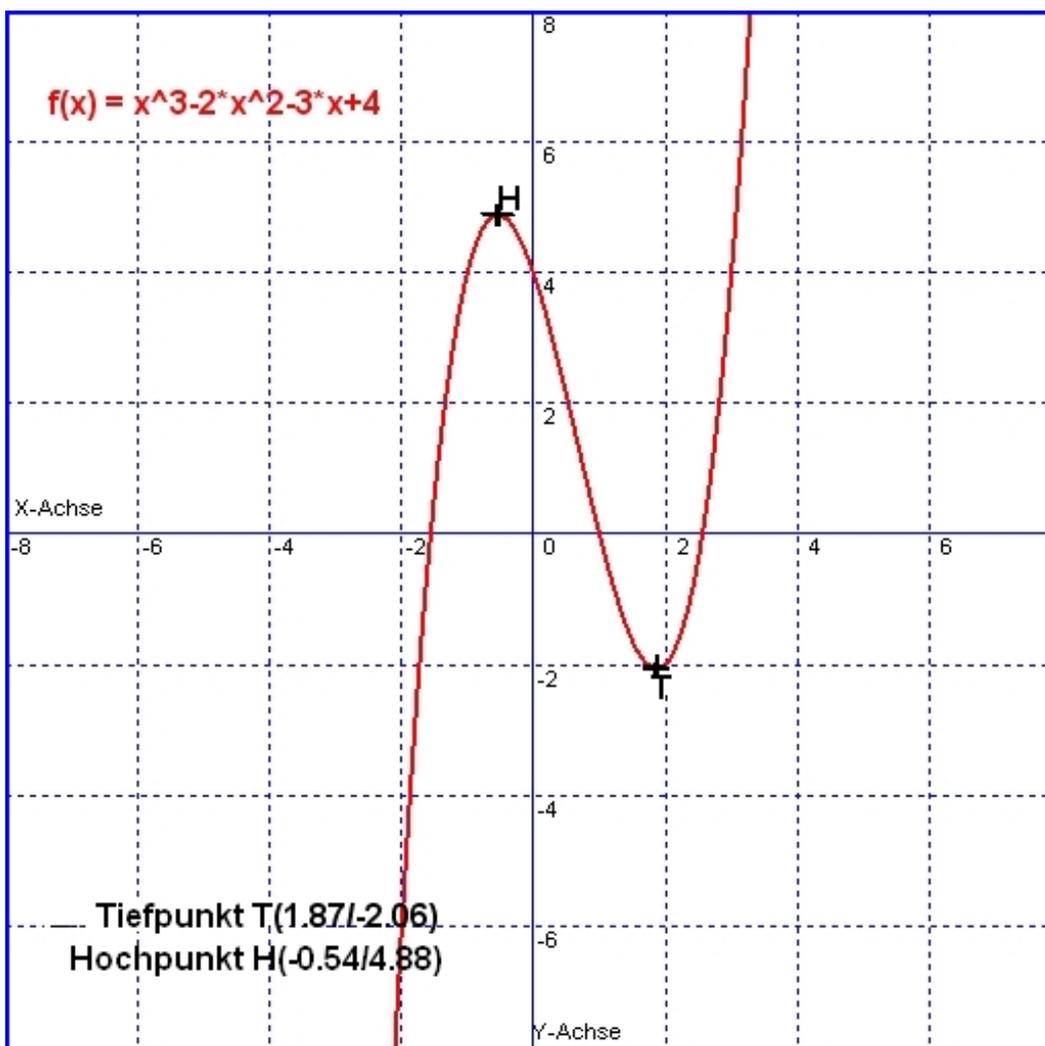
$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x_1 = (4 + \sqrt{52}) / 6 = 1.87, \quad f''(1.87) = 7.22 > 0, \quad \text{Tiefpunkt } T(1.87/-2.06)$$

$$x_2 = (4 - \sqrt{52}) / 6 = -0.54, \quad f''(-0.54) = -7.24 < 0, \quad \text{Hochpunkt } H(-0.54/4.88)$$



Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades:

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Für die Wendestellen gilt: $f''(x) = 0$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

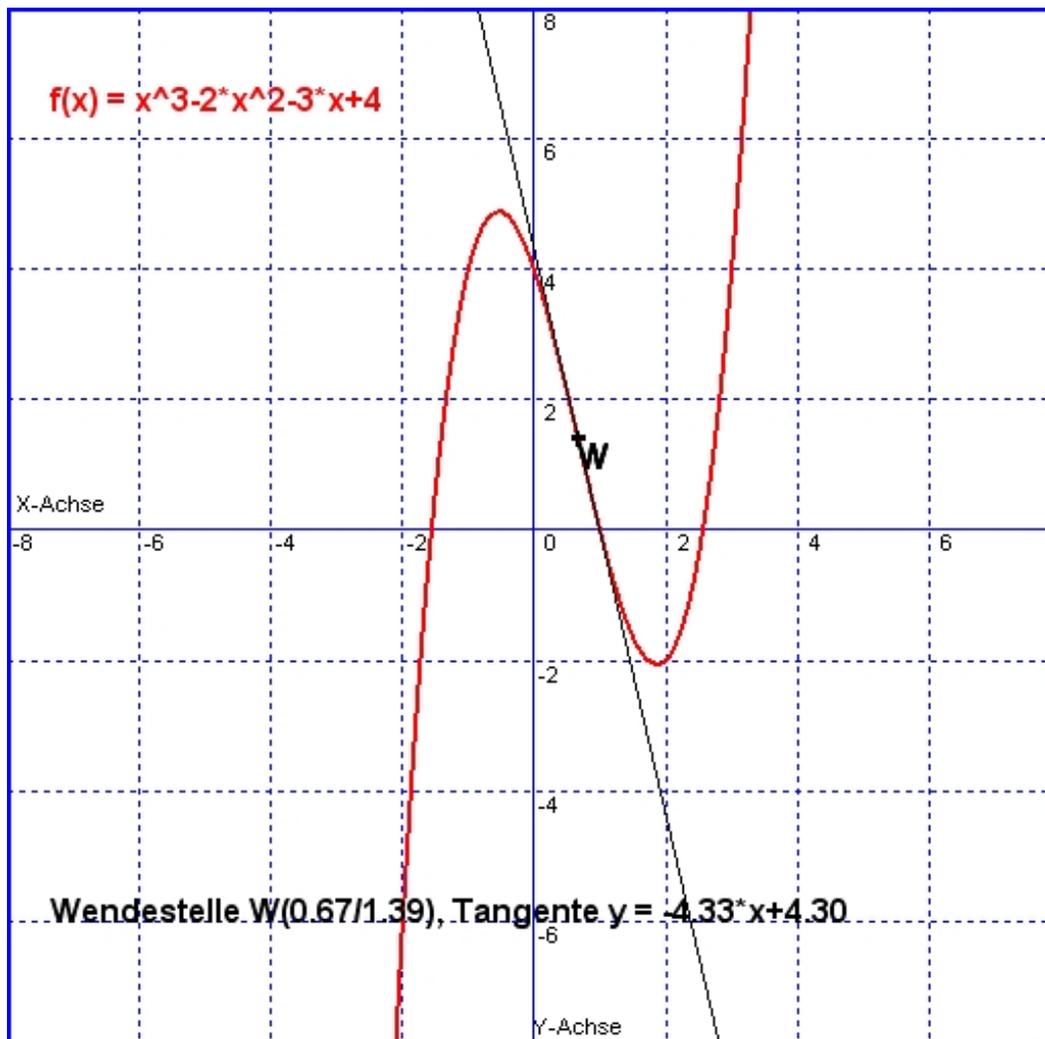
$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 6x - 4 = 0$$

$$x = 2/3 = 0.67, \text{ Wendestelle } W(0.67/1.39)$$

Wendetangente: $y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a)$ mit $a = 0.67$

$$y = -4.33x + 4.30$$



Asymptoten einer Kurve

Die Asymptoten einer Kurve

Gegeben ist eine rationale Funktion $y = p(x) / q(x)$. Eine Asymptote ist eine Gerade $y = k \cdot x + d$, an die sich die Kurve stetig annähert, ohne sie im Endlichen zu berühren. Man unterscheidet senkrechte, waagrechte oder schiefe Asymptoten.

Unter Grad n einer Polynomfunktion $p(x)$ versteht man die größte Hochzahl $n > 0$. $p(x) = a(n) \cdot x^n + a(n-1) \cdot x^{(n-1)} + \dots + a(1) \cdot x + a(0)$

Senkrechte Asymptoten

Die nicht kürzbaren Nullstellen des Nennerpolynoms $q(x) = 0$ nennt man Pole x_P der Kurve. Dort strebt die Funktion gegen Unendlich, und $x = x_P$ ist die Gleichung einer senkrechten Asymptote.

Waagrechte Asymptoten

Wenn der $\text{Grad}[p(x)] < \text{Grad}[q(x)]$, dann gilt $\lim [p(x)/q(x)] = 0$ für x gegen Unendlich, und $y = 0$ (x -Achse) ist waagrechte Asymptote.

Wenn der $\text{Grad}[p(x)] = \text{Grad}[q(x)]$, dann gilt $\lim [p(x)/q(x)] = c$ für x gegen Unendlich, und $y = c$ ist waagrechte Asymptote.

Schiefe Asymptoten

Schiefe (lineare) Asymptoten $y = g(x)$ der Kurve $y = f(x) = p(x)/q(x)$ liegen vor, wenn $\text{Grad}[p(x)] = \text{Grad}[q(x)] + 1$. Dazu ein Beispiel:

$$f(x) = (x^2 + 3 \cdot x) / (x - 2)$$

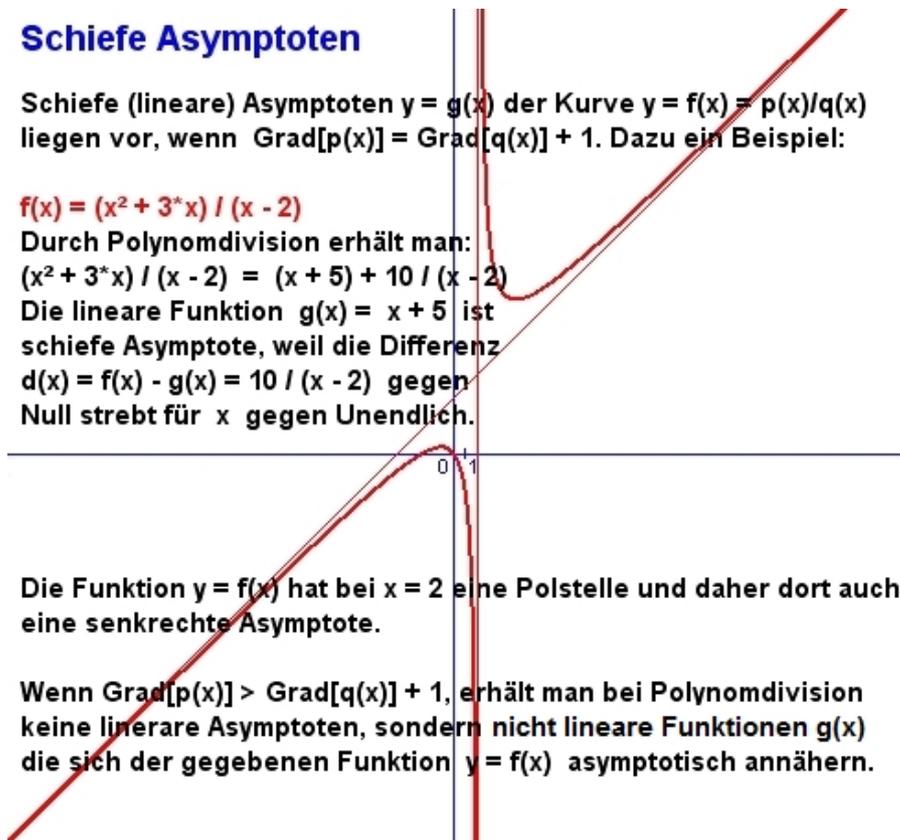
Durch Polynomdivision erhält man:

$$(x^2 + 3 \cdot x) / (x - 2) = (x + 5) + 10 / (x - 2)$$

Die lineare Funktion $g(x) = x + 5$ ist schiefe Asymptote, weil die Differenz $d(x) = f(x) - g(x) = 10 / (x - 2)$ gegen Null strebt für x gegen Unendlich.

Die Funktion $y = f(x)$ hat bei $x = 2$ eine Polstelle und daher dort auch eine senkrechte Asymptote.

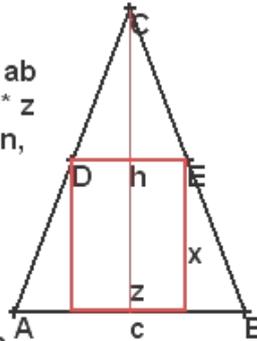
Wenn $\text{Grad}[p(x)] > \text{Grad}[q(x)] + 1$, erhält man bei Polynomdivision keine lineare Asymptoten, sondern nicht lineare Funktionen $g(x)$ die sich der gegebenen Funktion $y = f(x)$ asymptotisch annähern.



Extremwertaufgaben

Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Seite $c = 6$ cm und der Höhe $h = 8$ cm werden Rechtecke so eingeschrieben, dass eine Seite auf c liegt. Welches Rechteck hat die größte Fläche?

Die Seiten des Rechtecks sind x und z . Die Rechtecksfläche F hängt von x und z ab und wird mit der Ansatzfunktion $f(x,z) = x \cdot z$ berechnet. Um eine Variable zu eliminieren, wird eine Beziehung zwischen x und z gesucht (Nebenbedingung).



Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass die Dreiecke ABC und DEC ähnlich sind. Es gilt $c : h = z : (h - x)$ und $z = c \cdot (h - x) / h$. Nun wird z in die Ansatzfunktion $f(x,z) = x \cdot z$ eingesetzt: $F(x) = (c/h) \cdot (h \cdot x - x^2)$ und das soll ein Maximum werden. Dazu wird die erste Ableitung $F'(x)$ gebildet und die Lösungen der Gleichung $F'(x) = 0$ ermittelt. Diese sind die Extremwerte und ein Maximum liegt dann vor, wenn dort $F''(x) < 0$ ist. $F'(x) = (c/h) \cdot (h - 2 \cdot x)$. Aus $F'(x) = 0$ folgt $x = h / 2$ und $z = c / 2$.

Ergebnis: Im gesuchten Rechteck sind $x = 4$ cm und $z = 3$ cm.

Solche Extremwertaufgaben werden nun näher beschrieben.

In der Praxis kann das Differenzieren der Ansatzfunktion oft nur umständlich durchgeführt werden. Dann sind folgende Vereinfachungen der Ansatzfunktion sehr hilfreich.

Wichtige Vereinfachungen der Ansatzfunktion $y = F(x)$:

[V1] Die Funktionen $f(x)$ und $f(x) + c$ haben die gleichen Extremwerte. Beweis: $(f(x) + c)' = f'(x) + 0 = f'(x)$.

[V2] Die Funktionen $f(x)$ und $k \cdot f(x)$ haben die gleichen Extremwerte. Beweis: $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$.

[V3] Die Funktionen $f(x)$ und $\sqrt{f(x)}$ haben die gleichen Extremwerte. Beweis: Wegen Potenzregel und Kettenregel gilt $\sqrt{f(x)}' = (f(x)^{1/2})' = (1/2) \cdot f(x)^{-1/2} \cdot f'(x) = f'(x) / (2 \cdot \sqrt{f(x)})$. Also haben $\sqrt{f(x)}'$ und $f'(x)$ die gleichen Nullstellen.

[V4] Die Funktionen $f(x)$ und $1 / f(x)$ haben die gleichen Extremwerte. Dabei sind Maximum und Minimum vertauscht. Beweis: Wegen Kehrwertregel gilt $(1 / f(x))' = -f'(x) / f(x)^2$. Also haben $f(x)'$ und $(1 / f(x))'$ die gleichen Nullstellen.

Es folgen nun zwei Beispiele von Extremwertaufgaben.

Eine wichtige Anwendung der Differenzialrechnung sind die Extremwertaufgaben. Dabei wird schrittweise vorgegangen:

(1) Man stellt jene Größe, die entsprechend der Angabe ein Maximum oder ein Minimum sein soll, als Funktion von einer Variablen dar: $y = f(x)$, Ansatzfunktion.

(2) Ist das nicht möglich, dann verwendet man zwei Variable x und z zur Aufstellung der Ansatzfunktion: $y = f(x,z)$. Auf Grund weiterer Textinformationen bzw. geometrischer Sachverhalte stellt man eine funktionale Beziehung zwischen den beiden Variablen her: $z = g(x)$. Mit Hilfe dieser Nebenbedingung eliminiert man dann z aus der Ansatzfunktion. $y = f(x,z) = f(x,g(x)) = F(x)$. Das ist eine Funktion nur mehr mit einer Variablen.

(3) Man vereinfacht die Ansatzfunktion so weit wie möglich. Die wichtigsten vier Vereinfachungen werden weiter unten ausführlich beschrieben.

(4) Man bestimmt die Ableitung $F'(x)$ und setzt sie gleich Null. Man ermittelt die Lösungen der Gleichung $F'(x) = 0$. Das liefert die Extremwerte der Ansatzfunktion. Mit der Ableitung $F''(x)$ überprüft man nun, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt.

Beispiel A: Ein Gewölbegang hat den Querschnitt von der Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Halbkreis. Der Umfang U ist auf Grund des Baumaterials mit 10 Metern vorgegeben. Wie muss das Gewölbe gebaut werden, damit der Querschnitt möglichst groß wird ?

Ansatzfunktion: $F(x,z) = 2 \cdot x \cdot z + \pi \cdot x^2 / 2$
(Fläche von Rechteck und Halbkreis)

Nebenbedingung: $U = 2 \cdot x + 2 \cdot z + \pi \cdot x$
 $z = (U - (2 + \pi) \cdot x) / 2$

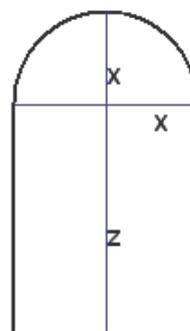
Ansatzfunktion: $F(x) = (U - (2 + \pi) \cdot x) \cdot x + \pi \cdot x^2 / 2$
 $F(x) = U \cdot x - (2 + \pi / 2) \cdot x^2$

$F'(x) = U - (4 + \pi) \cdot x$

$F'(x) = 0$, d.h. $x = U / (4 + \pi)$.

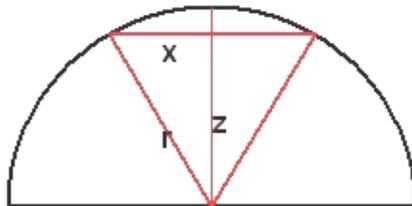
$F''(x) = -(4 + \pi) < 0$, d.h. Maximum bei $x = U / (4 + \pi)$.

$x = 10 / 7.14 = 1.40$, $z = (10 - 5.14 \cdot 1.40) / 2 = 1.40$



Ergebnis: Der Gewölbequerschnitt kann einem Quadrat mit der Seitenlänge von 2.80 m eingeschrieben werden.

Beispiel B: Einem Halbkreis mit Radius $r = 5$ cm werden gleichschenkelige Dreiecke so eingeschrieben, dass ihre Spitzen im Kreismittelpunkt liegen. Gesucht ist das Dreieck mit der größten Fläche.



Ansatzfunktion: $F(x,z) = x \cdot z$, Dreiecksfläche.

Nebenbedingung: $x^2 + z^2 = r^2$, $z = \sqrt{r^2 - x^2}$

Ansatzfunktion: $F(x) = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} / 2$

$F(x) = \sqrt{r^2 x^2 - x^2 x^2} / 2$

Vereinfachungen: Konstanten Faktor und Wurzel weglassen.

$F(x) = r^2 x^2 - x^4$

$F'(x) = 2 \cdot r^2 x - 4 \cdot x^3 = 2 \cdot x \cdot (r^2 - 2 \cdot x^2) = 0$

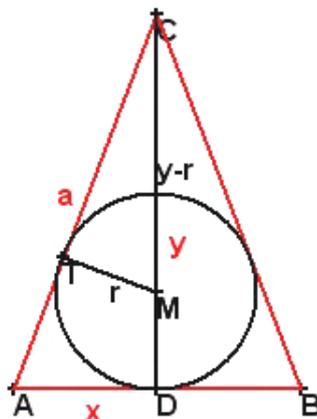
$x_1 = 0$, $x_2 = -r/\sqrt{2}$, $x_3 = +r/\sqrt{2}$

Ein sinnvoller Extremwert ist nur x_3 mit $F''(x_3) < 0$.

$x = 5/1.41 = 3.54$, $z = x = 3.54$.

Ergebnis: Das flächengrößte Dreieck hat eine Grundseite von 7.08 cm und eine Höhe von 3.54 cm.

Extremwertaufgabe



Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r . Dem Kreis wird das flächenkleinste, gleichschenkelige Dreieck umgeschrieben. Seine Basiseite x und seine Höhe y sind zu berechnen.

Ansatzfunktion: $F(x,y) = x \cdot y$ (soll minimal sein)

Nebenbedingung: Die Dreiecke [ADC] und [MTC] sind ähnlich.

Daher sind entsprechende Streckenverhältnisse gleich:

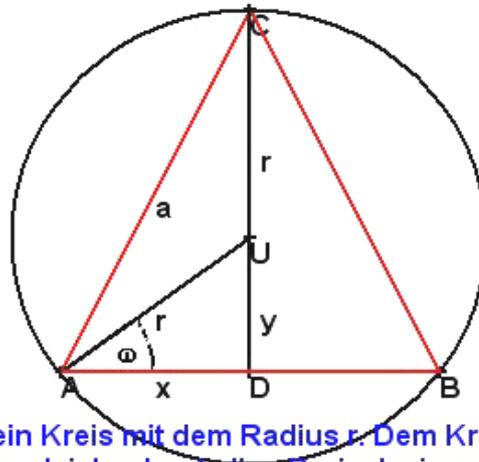
$a : x = (y - r) : r$, $a^2 = x^2 + y^2$. Einsetzen in die Ansatzfunktion.

Ansatzfunktion $F(x)$ differenzieren. Ableitung $F'(x) = 0$ setzen.

Lösung: $x = r \cdot \sqrt{3}$ und $y = 3 \cdot r$.

Hinweis: $a = 2 \cdot r \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot x$, d.h. das Dreieck ist gleichseitig!

Extremwertaufgabe



Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r . Dem Kreis wird das flächengrößte, gleichschenkelige Dreieck eingeschrieben. Seine Basiseite c und seine Höhe h sind zu berechnen.

Ansatzfunktion: $F(x,y) = x \cdot (y + r)$ (soll maximal sein)

$x = r \cdot \cos(w)$, $y = r \cdot \sin(w)$, $\sin^2(w) + \cos^2(w) = 1$. Damit gilt:

$F(w) = \cos(w) \cdot \sin(w) + \cos(w)$. Nun Ableitung $F'(w)$ ermitteln ...

$F'(w) = \cos^2(w) - \sin^2(w) - \sin(w) = -(2 \cdot \sin^2(w) - \sin(w) - 1)$

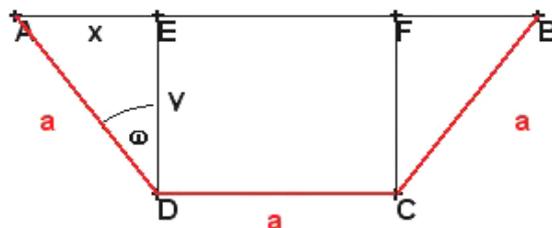
Die Substitution $z = \sin(w)$ liefert quadratische Gleichung ...

Lösung: $z = 0.5 = \sin(w)$, $w = 30^\circ$, $x = \sqrt{3} \cdot r/2$, $y = r/2$

$c = 2 \cdot x = r \cdot \sqrt{3}$, $h = 3 \cdot r/2$. $a = c$. Das Dreieck ist gleichseitig!

Extremwertaufgabe

Aus 3 gleichlangen Bretter (a) wird eine Wasserrinne gebaut. Der Querschnitt ist ein gleichschenkliges Trapez mit größtem Flächeninhalt. Berechne den Neigungswinkel (w) der Bretter.



Ansatzfunktion: $F(x,y) = x \cdot y + a \cdot y$ (soll maximal sein)

Nebenbedingung: $x = a \cdot \sin(w)$ und $y = a \cdot \cos(w)$

Ansatzfunktion: $F(w) = a^2 \cdot \sin(w) \cdot \cos(w) + a^2 \cdot \cos(w)$

Vereinfachte Ansatzfunktion: $F(w) = \cos(w) \cdot \sin(w) + \cos(w)$

$F'(w) = -\sin(w) \cdot \sin(w) + \cos(w) \cdot \cos(w) - \sin(w)$

$F'(w) = -\sin^2(w) + \cos^2(w) - \sin(w)$. Weil $\sin^2(w) + \cos^2(w) = 1$ gilt:

$F'(w) = -2 \cdot \sin^2(w) - \sin(w) + 1 = 0$. Nun Substitution $z = \sin(w)$.

$F'(z) = 2 \cdot z^2 + z - 1 = 0$. Die quadratische Gleichung auflösen ...

Lösung: $z = 0.5 = \sin(w)$. Daraus folgt Winkel: $w = 30^\circ$.

WIRTSCHAFTLICHES RECHNEN

Betriebswirtschaftliche Funktionen	[094]
Formeln zur Kosten- und Preistheorie	[100]
Zwei Aufgaben zum Üben	[101]
Zwanzig weitere Übungsaufgaben	[104]
Grundbegriffe der Input-/Output-Analyse	[109]

Betriebswirtschaftliche Funktionen

Wirtschafts-Funktionen

Am Beispiel einer einfachen Aufgabe sollen die Grundlagen der so genannten Wirtschafts-Funktionen erklärt werden.

Eine Firma erzeugt ein bestimmtes Produkt. Zuerst wird eine große Stichprobe von n Stammdaten $(x ; y)$ erhoben. Es sind x die Stückzahlen und y sind deren Produktions-Kosten. Mithilfe eines geeigneten Statistikprogramms wird eine Funktion $y = K(x)$ ermittelt, welche sich optimal an die n Datenpunkte anpasst. Man erhält dabei eine kubische Regressionsfunktion $K(x) = 0.01 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 3000 \cdot x + 250000$. Die Kapazitätsgrenze x_K beträgt 850 Mengeneinheiten (ME). Die Funktion beschreibt die Gesamtkosten der Produktion von x Stücken in Geldeinheiten (GE).

Auf dem Markt herrscht eine vollständige Konkurrenz, d.h. die Fabrik hat kein Angebotsmonopol, sondern mehrere Anbieter bestimmen den Produktpreis p am freien Markt. (Polypol). Für den Umsatz der Firma ergibt sich dann eine Erlösfunktion $E(x) = p \cdot x$. Weil die Firma durch den Verkauf von 800 ME den Gesamterlös von 2280000 GE erzielt, gilt für die Erlösfunktion $E(x) = 2850 \cdot x$ ($2850 = 2280000 / 800$).

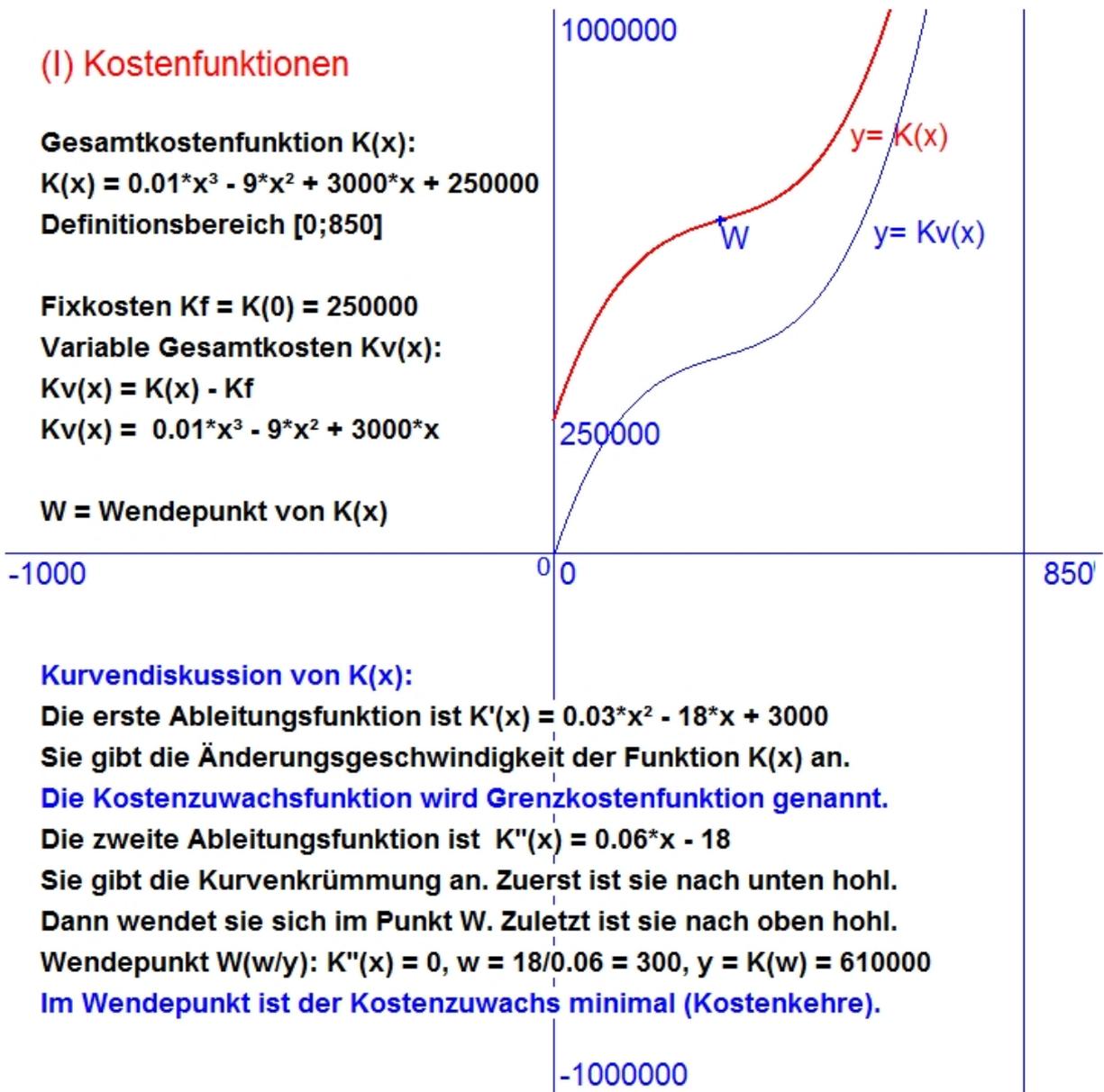
(I) Kostenfunktionen**Gesamtkostenfunktion $K(x)$:**

$$K(x) = 0.01 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 3000 \cdot x + 250000$$

Definitionsbereich $[0; 850]$ **Fixkosten $K_f = K(0) = 250000$** **Variable Gesamtkosten $K_v(x)$:**

$$K_v(x) = K(x) - K_f$$

$$K_v(x) = 0.01 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 3000 \cdot x$$

 $W =$ Wendepunkt von $K(x)$ **Kurvendiskussion von $K(x)$:**Die erste Ableitungsfunktion ist $K'(x) = 0.03 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 3000$ Sie gibt die Änderungsgeschwindigkeit der Funktion $K(x)$ an.**Die Kostenzuwachsfunction wird Grenzkostenfunction genannt.**Die zweite Ableitungsfunktion ist $K''(x) = 0.06 \cdot x - 18$

Sie gibt die Kurvenkrümmung an. Zuerst ist sie nach unten hohl.

Dann wendet sie sich im Punkt W . Zuletzt ist sie nach oben hohl.Wendepunkt $W(w/y)$: $K''(x) = 0$, $w = 18/0.06 = 300$, $y = K(w) = 610000$ **Im Wendepunkt ist der Kostenzuwachs minimal (Kostenkehre).**

Die Stückkosten $k(x)$

Die Stückkosten $k(x)$ ("k" klein geschrieben) erhält man, wenn man die Gesamtkosten $K(x)$ ("K" groß geschrieben) durch die Anzahl der produzierten Stücke dividiert.

$$K(x) = 0.01 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 3000 \cdot x + 250000$$

$$k(x) = K(x) / x = 0.01 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 3000 + 250000 / x$$

Jene Produktionsmenge (Stückanzahl), bei welcher die Stückkosten am geringsten sind, heißt Betriebsoptimum x_{OPT} . Diese Situation kann sich eine Firma längerfristig leisten. Daher heißt der Funktionswert $k(x_{OPT})$ auch langfristige Preisuntergrenze. Zur Berechnung des Betriebsoptimums wird die erste Ableitung der Stückkostenfunktion Null gesetzt: $k'(x) = 0$ mit $k''(x) > 0$.

$$k'(x) = 0.02 \cdot x - 9 - 250000 / x^2$$

$$0 = 0.02 \cdot x - 9 - 250000 / x^2$$

$$0.02 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 - 250000 = 0$$

$$x^3 - 450 \cdot x^2 - 12500000 = 0$$

Diese Gleichung dritten Grades kann am einfachsten nach der Methode der Intervallschachtelung mit fortgesetzter Halbierung bis zu einer bestimmten Genauigkeit schrittweise gelöst werden.
Betriebsoptimum: $x_{OPT} = 500$ ME mit $k(x_{OPT}) = 1500$ GE.

Die variablen Stückkosten $kv(x)$

Die Stückkosten $kv(x)$ ("k" klein geschrieben) erhält man, wenn man die variablen Gesamtkosten $Kv(x)$ ("K" groß geschrieben) durch die Anzahl der produzierten Stücke dividiert.

$$Kv(x) = 0.01 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 3000 \cdot x$$
$$kv(x) = Kv(x) / x = 0.01 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 3000$$

Jene Produktionsmenge (Stückanzahl), wo die variablen Stückkosten am geringsten sind, heißt Betriebsminimum x_{MIN} . Diese Situation kann sich eine Firma aber nur kurzfristig leisten, weil zusätzlich zu den Kosten noch die Fixkosten dazu kommen. Der Funktionswert $kv(x_{\text{MIN}})$ heißt kurzfristige Preisuntergrenze. Zur Ermittlung des Betriebsminimums wird die erste Ableitung der variablen Stückkostenfunktion Null gesetzt: $kv'(x) = 0$.

$$kv'(x) = 0.02 \cdot x - 9 \quad \text{mit} \quad kv''(x) = 0.02 > 0$$
$$\text{Betriebsminimum } x_{\text{MIN}} = 450 \text{ ME} \quad \text{mit} \quad kv(x_{\text{MIN}}) = 975 \text{ GE.}$$

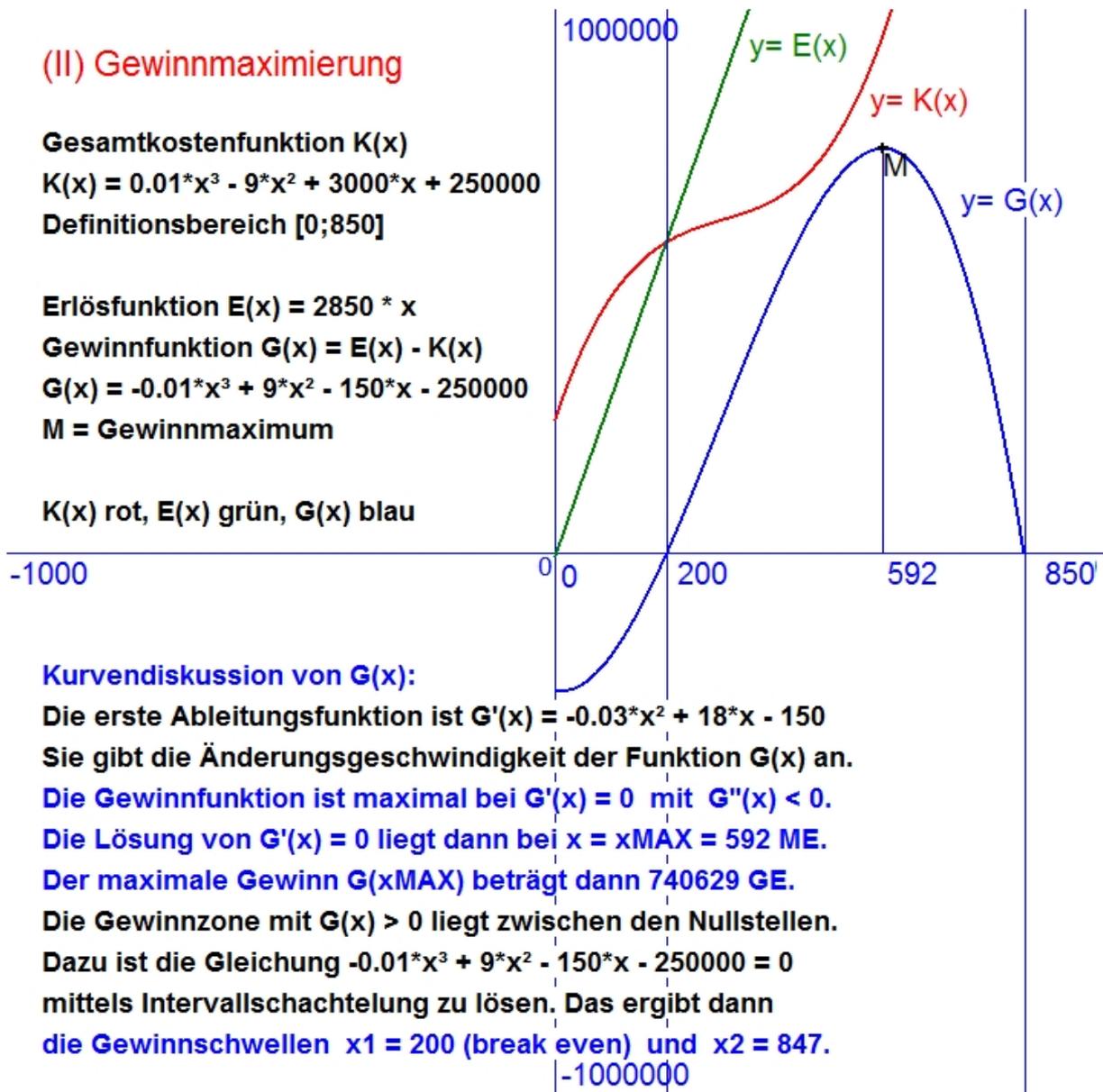
Der Unterschied zwischen Betriebsoptimum und Betriebsminimum liegt darin, dass das eine Mal die Fixkosten eingeschlossen sind. Das andere Mal sind jedoch die Fixkosten ausgeschlossen.

(II) Gewinnmaximierung**Gesamtkostenfunktion $K(x)$**

$$K(x) = 0.01 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 3000 \cdot x + 250000$$

Definitionsbereich $[0; 850]$ **Erlösfunktion $E(x) = 2850 \cdot x$** **Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$**

$$G(x) = -0.01 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 - 150 \cdot x - 250000$$

M = Gewinnmaximum **$K(x)$ rot, $E(x)$ grün, $G(x)$ blau****Kurvendiskussion von $G(x)$:**Die erste Ableitungsfunktion ist $G'(x) = -0.03 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 150$ Sie gibt die Änderungsgeschwindigkeit der Funktion $G(x)$ an.Die Gewinnfunktion ist maximal bei $G'(x) = 0$ mit $G''(x) < 0$.Die Lösung von $G'(x) = 0$ liegt dann bei $x = x_{MAX} = 592$ ME.Der maximale Gewinn $G(x_{MAX})$ beträgt dann 740629 GE.Die Gewinnzone mit $G(x) > 0$ liegt zwischen den Nullstellen.Dazu ist die Gleichung $-0.01 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 - 150 \cdot x - 250000 = 0$

mittels Intervallschachtelung zu lösen. Das ergibt dann

die Gewinnschwellen $x_1 = 200$ (break even) und $x_2 = 847$.

(III) Nachfragefunktion und Preiselastizität

Die Nachfragefunktion $x = n(p)$ zeigt den Zusammenhang zwischen der Nachfrage nach der Menge x eines Produktes und dem Preis p des Produktes. Normalerweise sinkt die Nachfrage bei steigenden Preisen.

Gemäß ihrer Definition ist die Nachfragefunktion die Umkehrung (Inversion) der Preisfunktion $p = p(x) = n^{-1}(p)$. Achtung: In der Literatur wird oftmals die Preisfunktion auch als Nachfragefunktion bezeichnet !!!

Der Cournotsche Punkt **C** ist jener Punkt, den die Preisfunktion $p(x)$ (d.h. die inverse Nachfragefunktion) an der Stelle des Gewinnmaximums x_{MAX} erreicht. Dieser Punkt $C(x_{\text{MAX}}/p(x_{\text{MAX}}))$ kennzeichnet die gewinnmaximale Absatzmenge und den zugehörigen gewinnmaximalen Preis. Die Berechnung erfolgt in mehreren Schritten:

$$\begin{aligned} \text{Erlösfunktion} \quad E(x) &= p(x) \cdot x \\ \text{Kostenfunktion} \quad K(x) & \\ \text{Gewinnfunktion} \quad G(x) &= E(x) - K(x) \\ G'(x_{\text{MAX}}) &= 0 \text{ mit } G''(x_{\text{MAX}}) < 0 \end{aligned}$$

Die Preiselastizität $e(x,p)$ ist das Verhältnis der relativen Mengenänderung dx zur relativen Preisänderung dp . Sie gibt also an, um wie viele Prozent sich die Menge ändert, wenn sich der Preis um 1% ändert. Für die Elastizitätsfunktion gilt dann:

$$e(x,p) = (dx/x) / (dp/p) = (dx/dp) \cdot (p/x) = n'(p) \cdot p / x$$

Dabei ist $x = n(p)$ die bekannte Nachfragefunktion. Ist beispielsweise $x = 1/p$, dann ist $e(x,p) = (-1)/(p^2) \cdot p^2 = (-1)$. Diese Preiselastizität heißt „indirekt proportional“ oder auch „isoelastisch“, weil die Nachfrage um den gleichen Prozentsatz fällt, um den der Preis steigt.

Bei $e(x,p) = 0$ erfolgt keine Reaktion der Nachfrage auf Preisänderungen, beispielsweise bei lebenswichtigen Medikamenten.

Bei $e(y,x) > 1$ bewirken höhere Preise eine überproportional größere Nachfrage. Diese atypische Form findet man bei sehr exklusiven Luxusartikeln oder auch bei Hamsterkäufen.

Wichtige Formeln der Kosten- und Preistheorie

Kostenfunktion	$K(x)$
Fixkosten	$K_F = K(0)$
variable Kosten	$K_{var}(x) = K(x) - K_F$
Grenzkosten	$K'(x)$
degressive Kosten	$K''(x) < 0$
progressive Kosten	$K''(x) > 0$
Kostenkehre (Minimum der Grenzkosten)	$K''(x) = 0$
Stückkostenfunktion	$K_s(x) = K(x) / x$
Betriebsoptimum (Minimum der Stückkosten)	$K'_s(x_{opt}) = 0$
LPU, langfristige Preisuntergrenze (=Verkaufspreis im Grenzbetrieb)	$K_s(x_{opt})$
variable Stückkosten	$K_{s,var}(x) = K_{var}(x) / x$
Betriebsminimum (Minimum der variablen Stückkosten)	$K'_{s,var}(x_{min}) = 0$
KPU, kurzfristige Preisuntergrenze	$K_{s,var}(x_{min})$
Preisfunktion (Nachfragefunktion)	$p(x)$, bei Polypol konstanter Preis p
Höchstpreis	$p_{max} = p(0)$
Sättigungsmenge	$p(x_s) = 0$
Erlösfunktion (Umsatzfunktion)	$E(x) = p(x) \cdot x$, bei Polypol $E(x) = p^* x$
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Gewinn Grenzen (Gewinnschwelle und Gewinnobergrenze)	$G(x) = 0$
Gewinnmaximum	$G'(x_{max}) = 0$
Cournot'scher Punkt	$C(x_{max}; p(x_{max}))$

Monopolisten und Polypolisten

Bestimmt nur eine Produktionsfirma den Warenpreis am Markt (**Monopolist**), dann kann diese Firma den Preis $p = p(x)$ variabel gestalten und damit Gewinnmaximierung betreiben. Existieren am Markt mehrere Produktionsfirmen (**Polypolisten**), so wird der Warenpreis p als konstant angesehen, und die Gewinnmaximierung kann nur über die Absatzmenge x erfolgen.

Aufgabe 1: Polypolistische Konkurrenz

Zur Berechnung einer Kostenfunktion dritten Grades für ein bestimmtes Produkt stehen einem Betrieb folgende Werte zur Verfügung:

- die Fixkosten betragen 300 GE
- die Kostenkehre liegt bei $x = 6$ ME
- das Betriebsoptimum liegt bei $x_{\text{opt}} = 10$ ME
- der Verkaufspreis im Grenzbetrieb ist $p = 80$ GE/ME

a) Ermitteln Sie die Kostenfunktion.

Führen Sie alle weiteren Berechnungen mit folgender Kostenfunktion durch:

$$K(x) = 1.5x^3 - 27x^2 + 170x + 300$$

b) Wann wird der Betrieb zum Minimalbetrieb ?

c) Wie lautet die Gewinnfunktion bei einem Marktpreis von $p = 280$ GE/ME ?
Bei welcher Menge x macht man maximalen Gewinn und wie hoch ist er ?
Wo liegen die Gewinn Grenzen ?

d) Stellen Sie die Kostenfunktion und die Erlösfunktion graphisch dar und zeichnen Sie die gegebenen und die berechneten Werte ein:
Intervall: $[0;24]$
Maßstab: x-Achse: 1cm = 2 ME; y-Achse: 1 cm = 1.000 GE
Zeichengenauigkeit: 1cm

Lösung von Aufgabe 1

Alle relevanten Funktionen und deren Ableitungen mit unbekanntem Koeffizienten a, b, c, d anschreiben.

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{Kostenfunktion})$$

$$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$K''(x) = 6ax + 2b$$

$$K_s(x) = ax^2 + bx + c + d/x \quad (\text{Stückkostenfunktion})$$

$$K'_s(x) = 2ax + b - d/x^2$$

$$K_{\text{var}}(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad (\text{Variable Kostenfunktion})$$

$$K_{\text{s,var}}(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Variable Stückkostenfunktion})$$

$$K'_{\text{s,var}}(x) = 2ax + b$$

(a) Ermittlung der Kostenfunktion $K(x)$:

- (1) $K(0) = d = 300$
- (2) $K''(6) = 36a + 2b = 0$
 $18a + b = 0$
- (3) $K'_s(x_{\text{opt}}) = 2ax_{\text{opt}} + b - d/x_{\text{opt}}^2 = 0, \quad x_{\text{opt}} = 10$
 $20a + b - 3 = 0$
 $20a + b = 3$
- (4) $K_s(x_{\text{opt}}) = ax_{\text{opt}}^2 + bx_{\text{opt}} + c + 30 = 80, \quad x_{\text{opt}} = 10$
 $100a + 10b + c = 50$

Aus (2) folgt: $b = -18a$, Einsetzen in (3) ergibt: $20a - 18a = 2a = 3, \quad a = 1.5, \quad b = -27$
 Einsetzen in (4) ergibt: $150 - 270 + c = 50, \quad c = 170$

(a) $K(x) = 1.5x^3 - 27x^2 + 170x + 300$, **Kostenfunktion**

- (b) $K'_{s,\text{var}}(x_{\text{min}}) = 3x_{\text{min}} - 27 = 0, \quad x_{\text{min}} = 9$
 $K_{s,\text{var}}(9) = 1.5 \cdot 81 - 27 \cdot 9 + 170 = 48.5 \text{ GE/ME}$, **Minimalbetrieb**

(c) $E(x) = 280x$, Erlösfunktion

$G(x) = E(x) - K(x) = -1.5x^3 + 27x^2 + 110x - 300$, **Gewinnfunktion**

$$G'(x) = -4.5x^2 + 54x + 110 = 0$$

$$x = 54/9 + \sqrt{(2916 + 18 \cdot 110)/9} / 9 = 6 + \sqrt{4896}/9 = 6 + 7.7746 = 13.7746$$

$$x_{\text{max}} = 13.7746 \text{ ME}$$

$$G(x_{\text{max}}) = G(13.7746) = -3920.38 + 5122.97 + 1515.21 - 300 = 2417.80 \text{ GE}$$

Der maximale Gewinn wird bei 13.77 ME erzielt und beträgt 2417.80 GE.

$$G(x) = -1.5x^3 + 27x^2 + 110x - 300 = 0$$

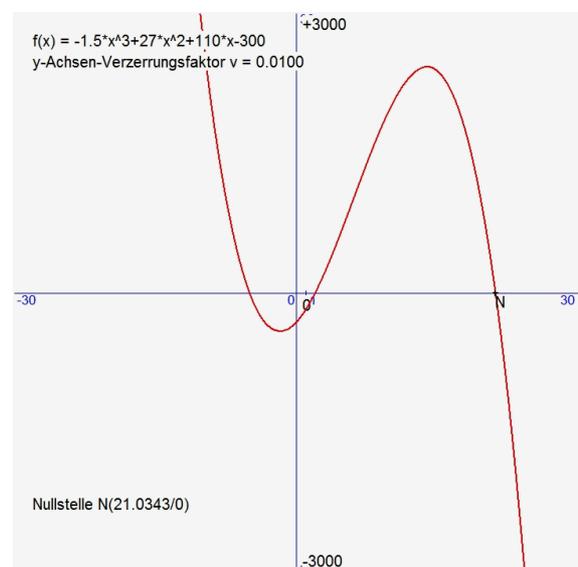
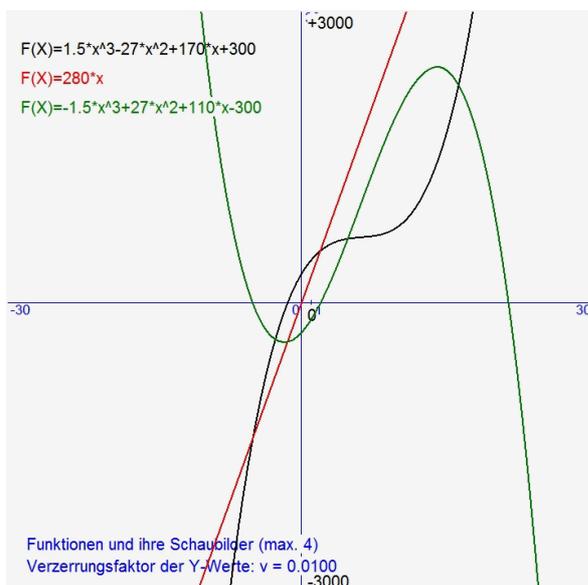
$$x^3 - 18x^2 - 73.33x + 200 = 0$$

Schranke für die reellen Nullstellen = $\text{Maximum}\{18, 73.33, 200\} + 1 = 201$

Ermittlung der positiven Nullstellen mittels Intervallschachtelung in $[0; 201]$.

Untere Gewinngrenze $x_1 = 1.92 \text{ ME}$, obere Gewinngrenze $x_2 = 21.03 \text{ ME}$.

(d) Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion:



Aufgabe 2: Monopolistischer Betrieb

Ein monopolistischer Anbieter erreicht bei einer Absatzmenge von 25 ME einen Preis von 297.50 GE/ME. Beim Verkaufspreis von 254 GE/ME steigt die Nachfrage auf 40 ME und bei der Absatzmenge von 15 ME erzielt er einen Erlös von 4 747.50 GE.

Bei Stillstand der Produktion betragen die Gesamtkosten 400 GE und die Grenzkosten 198 GE. Die Kostenkehre liegt bei 2.50 ME und die Grenzkosten betragen dort 197.25 GE.

- a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion dritten Grades $K(x)$ und die quadratische Nachfragefunktion bzw. Preisfunktion $p(x)$.

Führen Sie alle weiteren Berechnungen mit folgenden Funktionen durch:

$$K(x) = 0.04x^3 - 0.3x^2 + 198x + 400$$

$$p(x) = -0.04x^2 - 0.3x + 330$$

- b) Geben Sie Höchstpreis und Sättigungsmenge an.
- c) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.
Welcher Preis macht den Betrieb zum Grenzbetrieb?
Wo liegt die kurzfristige Preisuntergrenze?
- d) Geben Sie die Koordinaten des Cournotschen Punktes an.
- e) Stellen Sie die Kosten- und Erlösfunktion im Intervall $[0;45]$ dar und zeichnen Sie die charakteristischen Punkte ein.

Lösungen:

b) $p_{max} = p(0) = 330 \text{ GE/ME}$
 $p(x_s) = 0, x_s = 87.16 \text{ ME}$

c) $K_s(x) = 0.04x^2 - 0.3x + 198 + 400/x$
 $K'_s(x) = 0.08x - 0.3 - 400/x^2$
 $K'_s(x_{opt}) = 0, x_{opt} = 18.45 \text{ ME}, p = K_s(x_{opt}) = 227.76 \text{ GE/ME},$

$$K_{var}(x) = 0.04x^3 - 0.3x^2 + 198x$$

$$K_{s,var}(x) = 0.04x^2 - 0.3x + 198$$

$$K'_{s,var}(x) = 0.08x - 0.3$$

$$K'_{s,var}(x_{min}) = 0, x_{min} = 3.75 \text{ ME}, K_{PU} = K_{s,var}(x_{min}) = 197.44 \text{ GE/ME}$$

d) $G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot x - K(x) = -0.08x^3 + 132x - 400$
 $G'(x) = -0.24x^2 + 132$

$$x_{max} = 23.45 \text{ ME}, p(x_{max}) = 300.97, \text{ Cournotscher Punkt: } C(23.45 ; 300.97)$$

20 weitere Aufgaben zur Kosten- und Preistheorie

Die Mengenangaben (Betriebsoptimum, gewinnmaximierende Menge) sind immer auf ganze ME zu runden.

- (1) Ermittle die Gleichung der linearen Betriebskostenfunktion!
 - (a) Die Fixkosten betragen 300 GE, die variablen Kosten 1,2 GE/ME.
 - (b) Die Fixkosten betragen 500 GE, die Kosten für 300 ME betragen 1250 GE.
 - (c) Die Kosten für 100 ME betragen 1000 GE, für 500 ME 1800 GE.

- (2) Die Fixkosten eines Betriebes betragen 250 GE. Bei der Produktion von 200 ME sind die Stückkosten 2,75 GE/ME. Ermittle die lineare Kostenfunktion und die Stückkostenfunktion. Ab welcher Menge werden die Stückkosten kleiner als 2 GE/ME? Können sie auch kleiner als 1 GE/ME werden?

- (3) Ermittle für die folgenden Kostenfunktionen die Stückkostenfunktion und die minimalen Stückkosten.
 - (a) $K(x) = 0,1x^2 + 2x + 40$
 - (b) $K(x) = 0,05x^2 + 1,6x + 28,8$
 - (c) $K(x) = 0,03x^2 + 0,5x + 50$
 - (d) $K(x) = 0,01x^2 + 0,25x + 72$

- (4) Ermittle die Gleichung der quadratischen Betriebskostenfunktion, berechne das Betriebsoptimum und den kostendeckenden Preis.
 - (a) Die Fixkosten betragen 250 GE, die Kosten für 100 ME 760 GE und für 500 ME 3000 GE.
 - (b) Die Fixkosten betragen 800 GE, die Kosten für 200 ME 2100 GE und für 400 ME 3600 GE.
 - (c) Bei 10 ME betragen die Gesamtkosten 860 GE, bei 20 ME betragen sie 940 GE, und bei 30 ME betragen sie 1040 GE.
 - (d) Die Fixkosten betragen 1000 GE. Bei 400 ME sind die Gesamtkosten 25000 GE und die Grenzkosten 100 GE/ME.
 - (e) Die Fixkosten betragen 1120 GE. Bei Produktionsstillstand ($x = 0$) fallen keine Grenzkosten an, bei der Produktion von 1000 ME betragen sie 10 GE/ME.

- (5) Ermittle die Gleichung der Betriebskostenfunktion, wenn die Grenzkostenfunktion bekannt ist. Berechne das Betriebsoptimum und den kostendeckenden Preis.
 - (a) $K'(x) = 0,04x + 80$, Fixkosten: 800 GE
 - (b) $K'(x) = 0,01x + 12$, $K(1000) = 18800$

- (6) Die Kostenfunktion eines Betriebs ist bekannt. Berechne die Kostenkehre, das Betriebsoptimum (mittels Intervallschachtelung) und das Betriebsminimum sowie die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze.
 - (a) $K(x) = 0,05x^3 - 0,3x^2 + 5x + 30$
 - (b) $K(x) = 0,02x^3 - 3x^2 + 180x + 1000$
 - (c) $K(x) = 0,001x^3 - 0,75x^2 + 200x + 11000$
 - (d) $K(x) = 0,002x^3 - 0,15x^2 + 6,5x + 250$

- (7) Eine Betriebskostenfunktion lautet $K(x) = 0,01x^3 - 0,3x^2 + 10x + 17000$. Zeige dass das Betriebsoptimum bei 100 ME liegt. Berechne auch die Kostenkehre und das Betriebsminimum.
- (8) Ermittle die Kostenfunktion (Funktion 3. Grades):
- (a) Die Fixkosten betragen 1000 GE. Die Kostenkehre liegt bei 50 ME; bei dieser Produktionsmenge betragen die Grenzkosten 30 GE/ME und die Gesamtkosten 5000 GE.
- (b) Bei Produktionsstillstand betragen die Kosten 200 GE und die Grenzkosten 6 GE/ME. Bei einer Produktionsmenge von 10 ME ergeben sich Betriebskosten von 230 GE und Grenzkosten von 1 GE/ME.
- (c) Die Kostenkehre liegt bei 10 ME; bei dieser Menge betragen die Stückkosten 375 GE/ME. Bei einer Produktionsmenge von 40 ME betragen die Stückkosten 150 GE/ME und die Grenzkosten 120 GE/ME.
- (d) Die Fixkosten betragen 9450 GE. Die Kostenkehre liegt bei 30 ME, dabei betragen die Grenzkosten 2,4 GE/ME. Das Betriebsoptimum liegt bei 150 ME.
- (9) Die Grenzkostenfunktion eines Betriebs lautet $K'(x) = 0,003x^2 - 0,4x + 180$, die Fixkosten betragen 36000 GE. Ermittle die Betriebskostenfunktion, berechne die Kostenkehre und zeige, dass das Betriebsoptimum bei 300 ME liegt.
- (10) Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x)$ und der konstante Verkaufspreis p . Berechne Gewinnschwelle, Gewinngrenze, gewinnmaximierende Menge und den maximalen Gewinn!
- (a) $K(x) = 0,1x^2 + 2x + 40$; $p = 7$
- (b) $K(x) = 0,05x^2 + 6x + 260$; $p = 20$
- (c) $K(x) = 0,002x^2 + 12x + 1280$; $p = 16$
- (d) $K(x) = 0,001x^2 + 2,6x + 9000$; $p = 13,5$
- (e) $K(x) = 0,002x^3 - 0,18x^2 + 7,8x + 9450$; $p = 140$ (Gewinnschwelle: 70 ME)
- (f) $K(x) = 0,001x^3 - 0,75x^2 + 200x + 11000$; $p = 130$
- (11) Ermittle die lineare Nachfragefunktion und die Erlösfunktion, berechne den Höchstpreis, die Sättigungsmenge und die Menge, bei der der maximal Erlös erzielt wird.
- (a) Zum Preis von 40 GE/ME können 100 ME verkauft werden, für 20 GE/ME 200 ME.
- (b) Zum Preis von 80 GE/ME können 1000 ME verkauft werden, für 30 GE/ME 1500 ME.
- (c) Zum Preis von 100 GE/ME können 200 ME verkauft werden; bei 600 ME ist der Markt gesättigt.
- (d) Ab einem Preis von 25 GE/ME kann nichts mehr verkauft werden. Wenn der Preis um 1 GE gesenkt wird, steigt die Nachfrage um 20 ME.
- (12) Wie oben, für eine quadratische Nachfragefunktion.
- (a) Zum Preis von 72 GE/ME können 40 ME verkauft werden, für 112 GE/ME 20 ME und für 135 GE/ME 10 ME.
- (b) Zum Preis von 400 GE/ME können 100 ME verkauft werden, für 160 GE/ME 300 ME und für 70 GE/ME 400 ME.
- (d) Der Höchstpreis beträgt 24 GE/ME. Zum Preis von 18 GE/ME können 20 ME verkauft werden, für 10,5 GE/ME 30 ME.

- (13) Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x)$ und die Nachfragefunktion $p(x)$. Berechne die Grenzen des Gewinnbereichs und den Cournot'schen Punkt.
- (a) $K(x) = 0,1x^2 + x + 150$; $p(x) = -0,2x + 19$
 (b) $K(x) = 0,04x^2 + 10x + 900$; $p(x) = -0,08x + 76$
 (c) $K(x) = 0,02x^2 + 0,1x + 72$; $p(x) = -0,012x + 4,9$
 (d) $K(x) = 0,01x^2 + 14x + 6752$; $p(x) = -0,01x + 100$
- (14) Von einem Betrieb kennt man Kostenfunktion $K(x)$ und Nachfragefunktion $p(x)$. Berechne die gewinnmaximierende Menge, den dazugehörigen Preis und den maximalen Gewinn.
- (a) $K(x) = 0,01x^3 - 0,4x^2 + 6x + 200$; $p(x) = -0,1x + 15$
 (b) $K(x) = 0,002x^3 - 0,15x^2 + 6,5x + 250$; $p(x) = -0,05x + 20$
 (c) $K(x) = 0,05x^3 - 3x^2 + 50x + 120$; $p(x) = 0,1x^2 - 7,5x + 125$
 (d) $K(x) = 0,02x^3 - x^2 + 24x + 180$; $p(x) = 40 - 0,016x^2$
- (15) Die Kostenfunktion eines Betriebs lautet: $K(x) = 5x + 500$. Der Zusammenhang zwischen dem Verkaufspreis p und der Nachfrage x kann durch die Gleichung $5x + 4p = 340$ beschrieben werden. Ermittle die Grenzen des Gewinnbereichs, den Cournot'schen Punkt und den maximalen Gewinn.
- (16) Von einer quadratischen Kostenfunktion ist folgendes bekannt:
 die Fixkosten betragen 400 GE, das Betriebsoptimum liegt bei 200 ME und die minimalen Stückkosten betragen 11 GE/ME.
 Die Nachfragefunktion lautet: $p(x) = 28 - 0,04x$.
 Ermittle die Betriebskostenfunktion, berechne die Gewinn Grenzen und den Cournot'schen Punkt.
- (17) Die Fixkosten für die Erzeugung eines Artikels betragen 8000 GE, die Grenzkostenfunktion lautet $K'(x) = 0,05x + 60$. Die Nachfrage gehorcht der Funktion $p(x) = -0,045x + 270$. Ermittle die Betriebskostenfunktion, den Cournot'schen Punkt und den maximalen Gewinn.
- (18) Die Nachfragefunktion für einen Artikel lautet $p(x) = 200 - 4x$. Ein Monopolbetrieb hat die Grenzkosten $K'(x) = 0,3x^2 - 4x + 25$, die Gewinnschwelle liegt bei 10 ME. Ermittle die Kostenfunktion, die Gewinn Grenze, den Cournot'schen Punkt und den maximalen Gewinn.
- (19) Die Kostenfunktion eines Monopolbetriebs lautet: $K(x) = 0,15x^2 + 8x + 3600$. Von der Nachfragefunktion $p(x)$ sind folgende Werte bekannt:
- | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|
| | 11 | 14 | 18 | 25 | 31 |
| x | 5 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| $p(x)$ | 75 | 73 | 70 | 67 | 65 |
- Ermittle die Gleichung der Nachfragefunktion mittels linearer Regression. (Runde a auf 2 Dezimalen und b auf Ganze.) Berechne die Grenzen des Gewinnbereichs und den Cournot'schen Punkt.

(20) In einem Geschäft werden jährlich 36 Kühlschränke eines bestimmten Typs verkauft. Bei jeder Bestellung fallen Fixkosten von $B = 100$ GE an. Die Lagerkosten betragen $L = 200$ GE pro Stück und Jahr.

- Wie viele Geräte sollen bei einer Bestellung geordert werden, damit die Gesamtkosten minimal werden?
- Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Lagerkosten auf 450 GE steigen?
- Wie groß ist die optimale Bestellmenge, wenn die Fixkosten pro Bestellung 400 GE betragen?

(Anleitung: Wenn jeweils x Stück bestellt werden, müssen pro Jahr $36/x$ Bestellungen getätigt werden, das ergibt $B \cdot 36/x$ GE Fixkosten. Man kann annehmen, dass das Lager im Durchschnitt halbvoll ist, die Lagerkosten betragen daher insgesamt $L \cdot x/2$ GE.)

Anhang: Lösungen zur Kosten- und Preistheorie

- (1) a) $K(x) = 1,2x + 300$
 b) $K(x) = 2,5x + 500$
 c) $K(x) = 2x + 800$

(2) $K(x) = 1,5x + 250 / 500 / \text{nein}$

- (3) a) $K_s(x) = 0,1x + 2 + 40/x$; $x_{\text{opt}} = 20$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 6$
 b) $K_s(x) = 0,05x + 1,6 + 28,8/x$; $x_{\text{opt}} = 24$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 4$
 c) $K_s(x) = 0,03x + 0,5 + 50/x$; $x_{\text{opt}} \sim 41$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 2,95$
 d) $K_s(x) = 0,01x + 0,25 + 72/x$; $x_{\text{opt}} \sim 85$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 1,95$

- (4) a) $K(x) = 0,001x^2 + 5x + 250$; $x_{\text{opt}} = 500$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 6$
 b) $K(x) = 0,0025x^2 + 6x + 800$; $x_{\text{opt}} = \sim 566$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 8,83$
 c) $K(x) = 0,1x^2 + 5x + 800$; $x_{\text{opt}} \sim 89$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 22,89$
 d) $K(x) = 0,1x^2 + 20x + 1000$; $x_{\text{opt}} = 100$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 40$
 e) $K(x) = 0,005x^2 + 1120$; $x_{\text{opt}} \sim 473$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 4,73$

- (5) a) $K(x) = 0,02x^2 + 80x + 800$; $x_{\text{opt}} = 200$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 88$
 b) $K(x) = 0,005x^2 + 12x + 1800$; $x_{\text{opt}} = 600$; $K_s(x_{\text{opt}}) = 18$

- (6) a) $x_W = 2$; $x_{\text{opt}} \sim 8$; $x_{\text{min}} = 3$; LPU = 9,55; KPU = 4,55
 b) $x_W = 50$; $x_{\text{opt}} \sim 79$; $x_{\text{min}} = 75$; LPU = 80,48; KPU = 67,5
 c) $x_W = 250$; $x_{\text{opt}} \sim 408$; $x_{\text{min}} = 375$; LPU = 87,42; KPU = 59,38
 d) $x_W = 25$; $x_{\text{opt}} \sim 57$; $x_{\text{min}} = 37,5$; LPU = 8,83; KPU = 3,69

(7) $x_W = 10$; $x_{\text{min}} = 15$

- (8) a) $K(x) = 0,02x^3 - 3x^2 + 180x + 1000$
 b) $K(x) = 0,01x^3 - 0,4x^2 + 6x + 200$
 c) $K(x) = 0,025x^3 - 0,75x^2 + 60x + 3200$
 d) $K(x) = 0,002x^3 - 0,18x^2 + 7,8x + 9450$

- (9) $K(x) = 0,001x^3 - 0,2x^2 + 180x + 36000$; $x_W \sim 67$
- (10) a) $x_1 = 10$; $x_2 = 40$; $x_{Gmax} = 25$; $Gmax = 22,5$
 b) $x_1 = 20$; $x_2 = 260$; $x_{Gmax} = 140$; $Gmax = 720$
 c) $x_1 = 400$; $x_2 = 1600$; $x_{Gmax} = 1000$; $Gmax = 720$
 d) $x_1 = 900$; $x_2 = 10000$; $x_{Gmax} = 5450$; $Gmax = 20702,50$
 e) $x_1 = 70$; $x_2 = 270$; $x_{Gmax} \sim 181$; $Gmax = 8515,70$
 f) $x_1 \sim 227$; $x_2 \sim 604$; $x_{Gmax} \sim 448$; $Gmax = 18252,60$
- (11) a) $p(x) = -0,2x + 60$; $p_{max} = 60$; $x_S = 300$; $x_{E_{max}} = 150$
 b) $p(x) = -0,1x + 180$; $p_{max} = 180$; $x_S = 1800$; $x_{E_{max}} = 900$
 c) $p(x) = -0,25x + 150$; $p_{max} = 150$; $x_S = 600$; $x_{E_{max}} = 300$
 d) $p(x) = -0,05x + 25$; $p_{max} = 25$; $x_S = 500$; $x_{E_{max}} = 250$
- (12) a) $p(x) = 0,01x^2 - 2,6x + 160$; $p_{max} = 160$; $x_S = 100$; $x_{E_{max}} = 40$
 b) $p(x) = 0,001x^2 - 1,6x + 550$; $p_{max} = 550$; $x_S = 500$; $x_{E_{max}} \sim 215$
 c) $p(x) = -0,015x^2 + 24$; $p_{max} = 24$; $x_S = 40$; $x_{E_{max}} \sim 23$
- (13) a) $x_1 = 10$; $x_2 = 50$; $C(30/13)$
 b) $x_1 \sim 14$; $x_2 \sim 536$; $C(275/54)$
 c) $x_1 \sim 17$; $x_2 \sim 133$; $C(75/4)$
 d) $x_1 = 80$; $x_2 = 4220$; $C(2150/78,50)$
- (14) a) $x_{Gmax} = 30$; $p_{Gmax} = 12$; $Gmax = 70$
 b) $x_{Gmax} \sim 67$; $p_{Gmax} = 16,65$; $Gmax = 501,87$
 c) $x_{Gmax} = 10$; $p_{Gmax} = 60$; $Gmax = 230$
 d) $x_{Gmax} \sim 25$; $p_{Gmax} = 30$; $Gmax = 282,50$
- (15) $x_1 \sim 7$; $x_2 \sim 57$; $C(32/45)$; $Gmax = 780$
- (16) $K(x) = 0,01x^2 + 7x + 400$; $x_1 = 20$; $x_2 = 400$; $C(210/19,6)$
- (17) $K(x) = 0,025x^2 + 60x + 8000$; $C(1500/202,50)$; $Gmax = 149500$
- (18) $K(x) = 0,1x^3 - 2x^2 + 25x + 1450$; $x_2 \sim 26$; $C(18/128)$; $Gmax = 468,80$
- (19) $p(x) = -0,05x + 80$; $x_1 = 60$; $x_2 = 300$; $C(180/71)$
- (20) a) 6
 b) 4
 c) 12

INPUT-OUTPUT-ANALYSE

Eine kurze Einführung mit Beispielen

Input-Output Analyse

Ein einführendes Beispiel

- (1) Der Ackerbau produziert $450 q$ Weizen und benötigt dafür $200 q$ Weizen, $7 t$ Eisen und 18 Schweine.
- (2) Die Industrie produziert $21 t$ Eisen und benötigt dafür $90 q$ Weizen, $6 t$ Eisen und 12 Schweine.
- (3) Die Viehzucht produziert 60 Schweine und benötigt dafür $120 q$ Weizen, $3 t$ Eisen und 15 Schweine.

	Output	Verwendung durch					Endverbrauch
		Ackerbau	Industrie	Viehzucht			
Weizen	450 =	200 +	90 +	120 +		40	
Eisen	21 =	7 +	6 +	3 +		5	
Schweine	60 =	18 +	12 +	15 +		15	

Input-Output Tabelle:

	Output	Verwendung durch					Endverbrauch
		Ackerbau	Industrie	Viehzucht			
Weizen	450 =	200 +	90 +	120 +		40	
Eisen	21 =	7 +	6 +	3 +		5	
Schweine	60 =	18 +	12 +	15 +		15	

	Lieferungen an				Endverbrauch
	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3		
von Sektor 1	200	90	120		40
von Sektor 2	7	6	3		5
von Sektor 3	18	12	15		15

Technologiematrix: Bedarfsmatrix der Wirtschaftssektoren

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{200}{450} & \frac{90}{21} & \frac{120}{60} \\ \frac{7}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{18}{450} & \frac{12}{21} & \frac{15}{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4444 & 4,2857 & 2,000 \\ 0,0156 & 0,2857 & 0,0500 \\ 0,0400 & 0,5714 & 0,2500 \end{pmatrix}$$

Interpretation der Technologiematrix:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 410 \\ 16 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{200}{450} & \frac{90}{21} & \frac{120}{60} \\ \frac{7}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{18}{450} & \frac{12}{21} & \frac{15}{60} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 21 \\ 60 \end{pmatrix} = \mathbf{Ax}$$

Dabei bedeutet:

y: Erforderlicher Inputvektor in die Wirtschaftssektoren zur Produktion des geplanten Outputvektors **x**. Die Überschüsse $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ bleiben für den den Endverbrauch **b**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

Input-Output Gleichung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

Aufteilung des Outputvektors **x** nach seiner Verwendung:

$$\begin{pmatrix} 450 \\ 21 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{200}{450} & \frac{90}{21} & \frac{120}{60} \\ \frac{7}{450} & \frac{6}{21} & \frac{3}{60} \\ \frac{18}{450} & \frac{12}{21} & \frac{15}{60} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 21 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Die Grundbegriffe

Die **Input-Output Tabelle** ist ein Gleichungssystem, welches die Outputmengen nach ihrer Verwendung aufgliedert:

	Verwendung durch			
	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3	Endverbrauch
Sektor 1	$x_1 = x_{11}$	$+ x_{12}$	$+ x_{13}$	$+ b_1$
Sektor 2	$x_2 = x_{21}$	$+ x_{22}$	$+ x_{23}$	$+ b_2$
Sektor 3	$x_3 = x_{31}$	$+ x_{32}$	$+ x_{33}$	$+ b_3$

Die **Zeilensummen** der Input-Output Tabelle ergeben den gesamten **Output** des jeweiligen Sektors:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + b_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Um eine **Einheit** seines Produktes zu erzeugen, benötigt der Wirtschaftszweig j genau

$$a_{ij} := \frac{x_{ij}}{x_j}$$

Einheiten von Produkten des Wirtschaftszweiges i .

Wir fassen diese Größen in einer Matrix zusammen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diese **Bedarfsmatrix** heißt **Technologiematrix** oder **Leontieffmatrix**.

Die Input-Output Gleichung

Das Gleichungssystem der Input-Output Tabelle hat nun die Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 \end{aligned} \quad \sim \quad \mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

Definition

Es sei \mathbf{A} eine $n \times n$ -Matrix mit nichtnegativen Elementen und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sei ein Vektor mit nichtnegativen Komponenten. Dann heißt die Matrixgleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

Input-Output Gleichung.

Statisches Gleichgewicht**Fragestellung:**

Wie muß der **Outputvektor** \mathbf{x} gewählt werden, um einen bestimmten **Endverbrauchsvektor** \mathbf{b} zu befriedigen ?

Antwort:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \\ \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Stichwort: **Input-Output Analyse**

Musteraufgabe

Ein Konzern bestehe aus den Teilbereichen Erzabbau (R), Stahlerzeugung (S) und Handelsbetriebe (H). Die Teile beliefern einander, verkaufen aber auch selbständig. Die folgende Tabelle enthält die Mengen der Lieferungen für die drei Teilbereiche:

	an R	an S	an H	Verkauf
R	0	250	100	100
S	50	0	250	350
H	100	150	0	250

(a) Wie hoch ist der Output der drei Teilbereiche ?

Lösung:

	an R	an S	an H	Verkauf
R	0	250	100	100
S	50	0	250	350
H	100	150	0	250

Gesamtoutput = Zeilensummen: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 450 \\ 650 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{Output von R} \\ \text{Output von S} \\ \text{Output von H} \end{matrix}$

(b) Wie lautet die Technologiematrix ?

Lösung:

Technologiematrix \mathbf{A} = Zusammenfassung der Bedarfsvektoren der drei Sektoren
Bedarf zur Produktion je 1 Mengeneinheit des Sektors

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{0}{450} & \frac{250}{650} & \frac{100}{500} \\ \frac{50}{450} & \frac{0}{650} & \frac{250}{500} \\ \frac{100}{450} & \frac{150}{650} & \frac{0}{500} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3846 & 0,2 \\ 0,1111 & 0 & 0,5 \\ 0,2222 & 0,2308 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Wie muß sich der Output ändern, wenn der Verkauf in den Bereichen Stahlerzeugung und Handelsbetriebe um 10% gesteigert werden soll ?

Lösung:

Steigerung der Verkaufs von S und H um je 10%:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 350 + 35 \\ 250 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 385 \\ 275 \end{pmatrix}$$

Wir müssen $\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$ berechnen ...

Berechnung von $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,3846 & 0,2 \\ 0,1111 & 0 & 0,5 \\ 0,2222 & 0,2308 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -0,3846 & -0,2 \\ -0,1111 & 1 & -0,5 \\ -0,2222 & -0,2308 & 1 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1,1802 & 0,5747 & 0,5234 \\ 0,2965 & 1,2748 & 0,6967 \\ 0,3307 & 0,4219 & 1,2771 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1,1802 & 0,5747 & 0,5234 \\ 0,2965 & 1,2748 & 0,6967 \\ 0,3307 & 0,4219 & 1,2771 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 385 \\ 275 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 483,2145 \\ 712,0405 \\ 546,704 \end{pmatrix}$$

(d) Welchen Output braucht man, um genau 1 Mengeneinheit von R an den Endverbrauch zu liefern ?

Lösung: Marginaler Output

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 1,1802 & 0,5747 & 0,5234 \\ 0,2965 & 1,2748 & 0,6967 \\ 0,3307 & 0,4219 & 1,2771 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,1802 \\ 0,2965 \\ 0,3307 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{von R} \\ \text{von S} \\ \text{von H} \end{array} \end{aligned}$$

d.h.: Die Spalten von $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ geben an, welcher Output benötigt wird, um genau eine Mengeneinheit des jeweiligen Sektors an den Endverbrauch zu liefern.

Stichwort: Statisches Gleichgewicht

Musteraufgabe: Einführungsbeispiel mit neuer Endnachfrage

Die Lieferungen der Industrie an den Endverbrauch sollen verdoppelt, und die Lieferungen der Landwirtschaft an den Endverbrauch sollen halbiert werden.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0,4444 & 4,2857 & 2,000 \\ 0,0156 & 0,2857 & 0,0500 \\ 0,0400 & 0,5714 & 0,2500 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 7,5 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} 3,4208 & 29,3897 & 11,0814 \\ 0,0922 & 2,2709 & 0,3972 \\ 0,2527 & 3,2976 & 2,2270 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 445,42 \\ 27,53 \\ 54,73 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ENDE von MATHE 4