Herbert Paukert

Schulmathematik in 8 Bänden

Version 6.0, 2016

MATHE 7

Trigonometrie

MATHE, Band 1

Arithmetik - Unterstufe

MATHE, Band 2

Geometrie - Unterstufe

MATHE, Band 3

Logik
Zahlenmengen
Algebra

MATHE, Band 4

Differenzialrechnung

MATHE, Band 5

Integralrechnung

MATHE, Band 6

Matrizenrechnung
Statistik
Wahrscheinlichkeit

MATHE, Band 7

Trigonometrie

MATHE, Band 8

Analytische Geometrie
Kegelschnittslinien
Geometrische Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

Hinweis: In Dezimalzahlen wird anstelle eines Kommas ein Dezimalpunkt geschrieben.

Hinweis: Auf seiner Homepage ***www.paukert.at*** stellt der Autor viele weitere Lernhilfen aus unterschiedlichen Fachgebieten zur Verfügung.

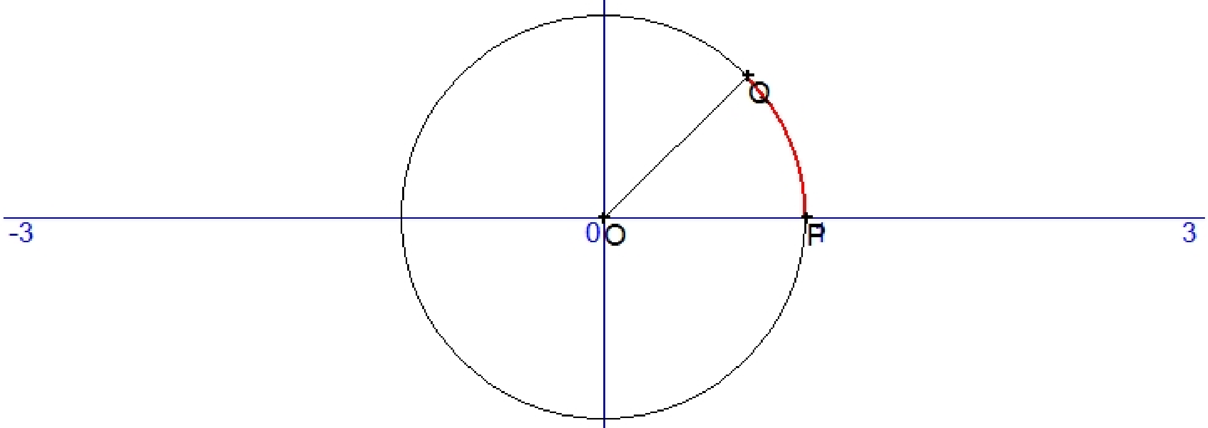
TRIGONOMETRIE

Teil 1 (Theorie)

Die Winkelfunktionen

Das Bogenmaß eines Winkels

Wir zeichnen einen Winkel in der Koordinatenebene. Der Scheitel liegt im Koordinatenursprung O und ein Schenkel auf der x-Achse. Wir schneiden nun den zweiten Winkelschenkel mit dem Einheitskreis mit Mittelpunkt O und Radius r = 1 cm. Der Winkel w wird im Gradmaß (°) gemessen. Daneben gibt es aber auch das Bogenmaß.

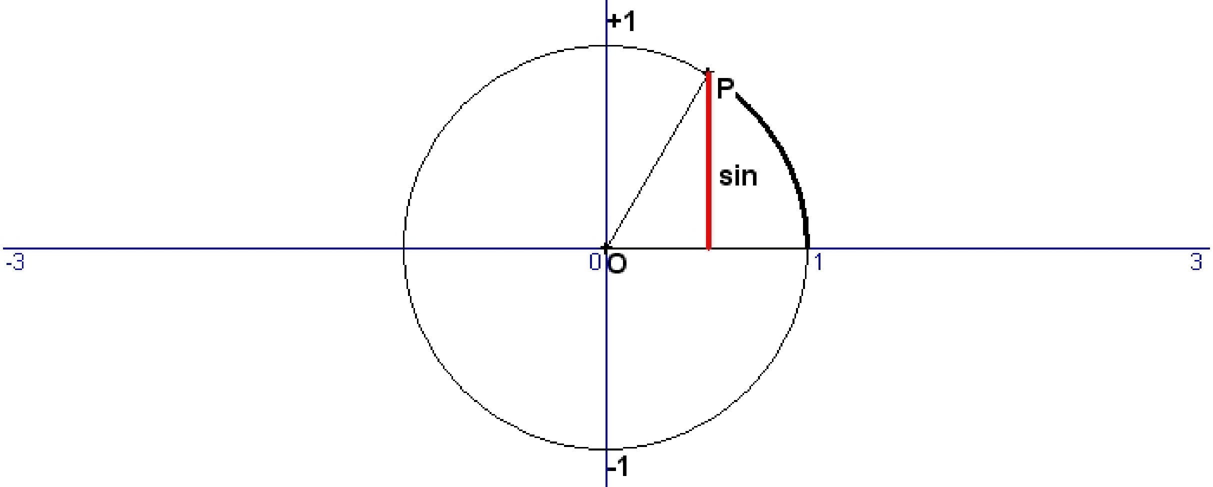


Einem vollen Drehwinkel von 360° entspricht der Umfang U = 2*¶.
Einem Grad (1°) entspricht ein Bogen von U/360 cm Länge und den w Graden entspricht der Bogen PQ von b = (U/360)*w = (2*¶/360)*w, also von ¶*w/180 cm Länge. Für den Winkel w mit der Bogenlänge 1 gilt: 1 = ¶*w/180° und w = 180°/¶ = 57.30°. Diesem Winkel w wird nun das Bogenmaß von 1 Radiant (rad) zugeordnet.

Der Winkel w = 45° hat das Bogenmaß von ¶ *45 / 180 = 0.79 rad.

Der Sinus eines Winkels

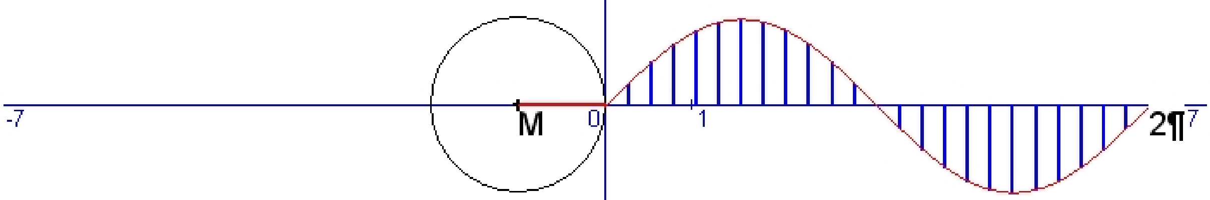
Um den Sinuswert eines Winkels w zu erhalten, müssen wir seinen Schenkel mit dem Einheitskreis schneiden, und vom Schnittpunkt P die y-Koordinate bestimmen. Diese nennt man dann den Sinuswert des Winkels: sin(w) = y.



Winkel w = 60°, sin(w) = 0.87

Auf diese Weise wird jedem Winkel w von 0° bis 360° eindeutig eine reelle Zahl zwischen -1 und +1 zugeordnet (Winkelfunktion). Auf der folgende Seite wird die Sinusfunktion anschaulich dargestellt.
Die Winkel werden im Gradmaß oder im Bogenmaß gemessen.

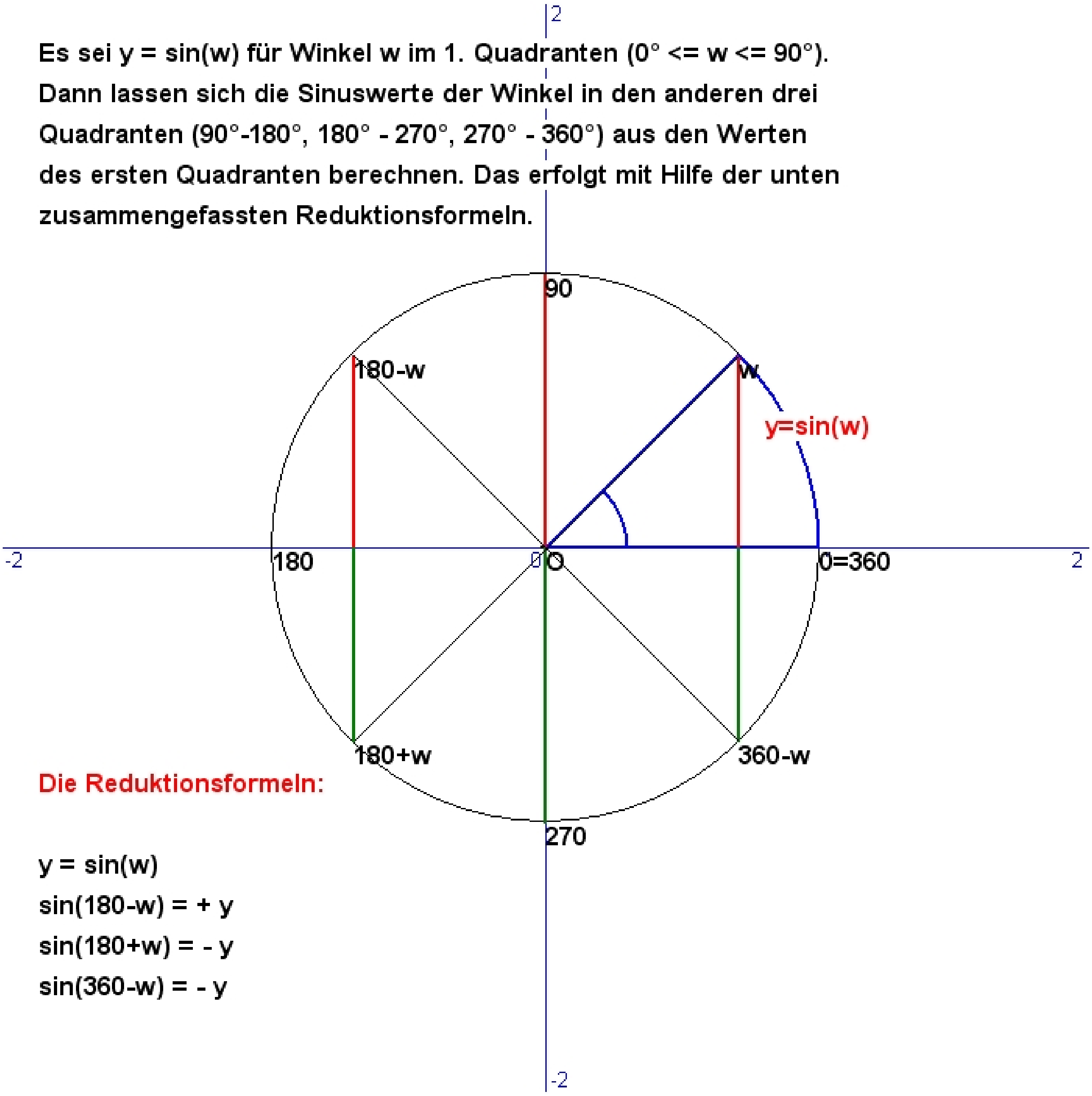
Der Zeiger wandert im Einheitskreis von 0° bis 360°.
Die Schrittweite des Zeigers beträgt dabei genau 15°.
Für jeden überstrichenen Winkel w wird das Bogenmaß berechnet und auf der x-Achse abgetragen. Darüber wird dann der im Einheitskreis ermittelte Sinuswert des Winkels eingezeichnet.



x=6.28rad=2¶
y=0.000

Schaubild der Sinusfunktion y = sin(x).
Eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 2¶.

Es sei y = sin(w) für Winkel w im 1. Quadranten (0° <= w <= 90°). Dann lassen sich die Sinuswerte der Winkel in den anderen drei Quadranten (90°-180°, 180° - 270°, 270° - 360°) aus den Werten des ersten Quadranten berechnen. Das erfolgt mit Hilfe der unten zusammengefassten Reduktionsformeln.

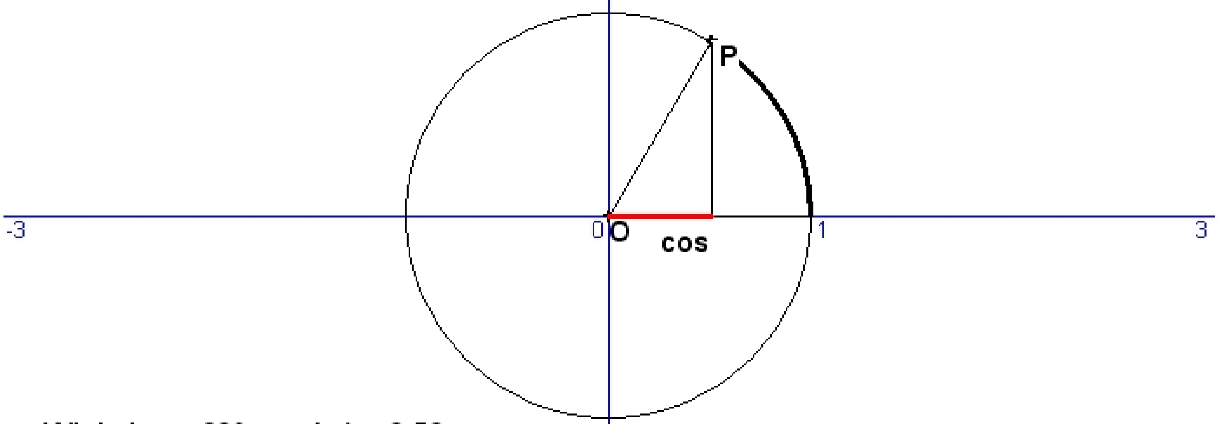


Die Reduktionsformeln:

y = sin(w)
sin(180-w) = + y
sin(180+w) = - y
sin(360-w) = - y

Cosinus und Tangens eines Winkels

Um den Cosinuswert eines Winkels w zu erhalten, müssen wir den Schenkel mit dem Einheitskreis schneiden, und vom Schnittpunkt P die x-Koordinate bestimmen. Diese nennt man dann den Cosinuswert des Winkels: cos(w) = x.



Winkel w = 60°, cos(w) = 0.50

Für den Tangenswert eines Winkels gilt: tan(w) = sin(w)/cos(w).

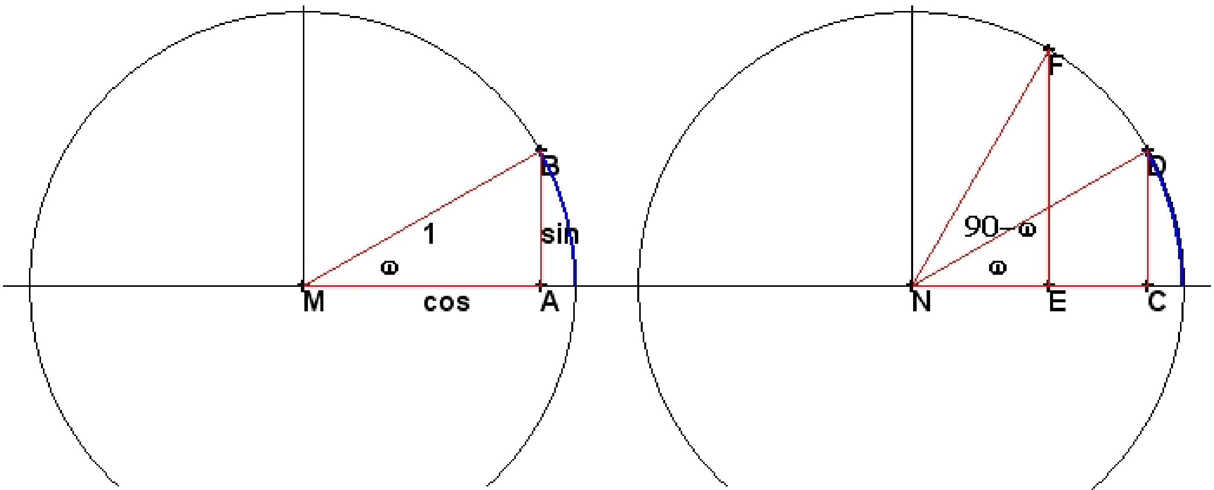
Der Tangens wird überall unendlich, wo cos(w) gleich Null ist !

Winkel w = 60°, tan(w) = 0.87/0.50 = 1.73

Sinus- und Cosinuswert eines Winkels hängen wie folgt zusammen.

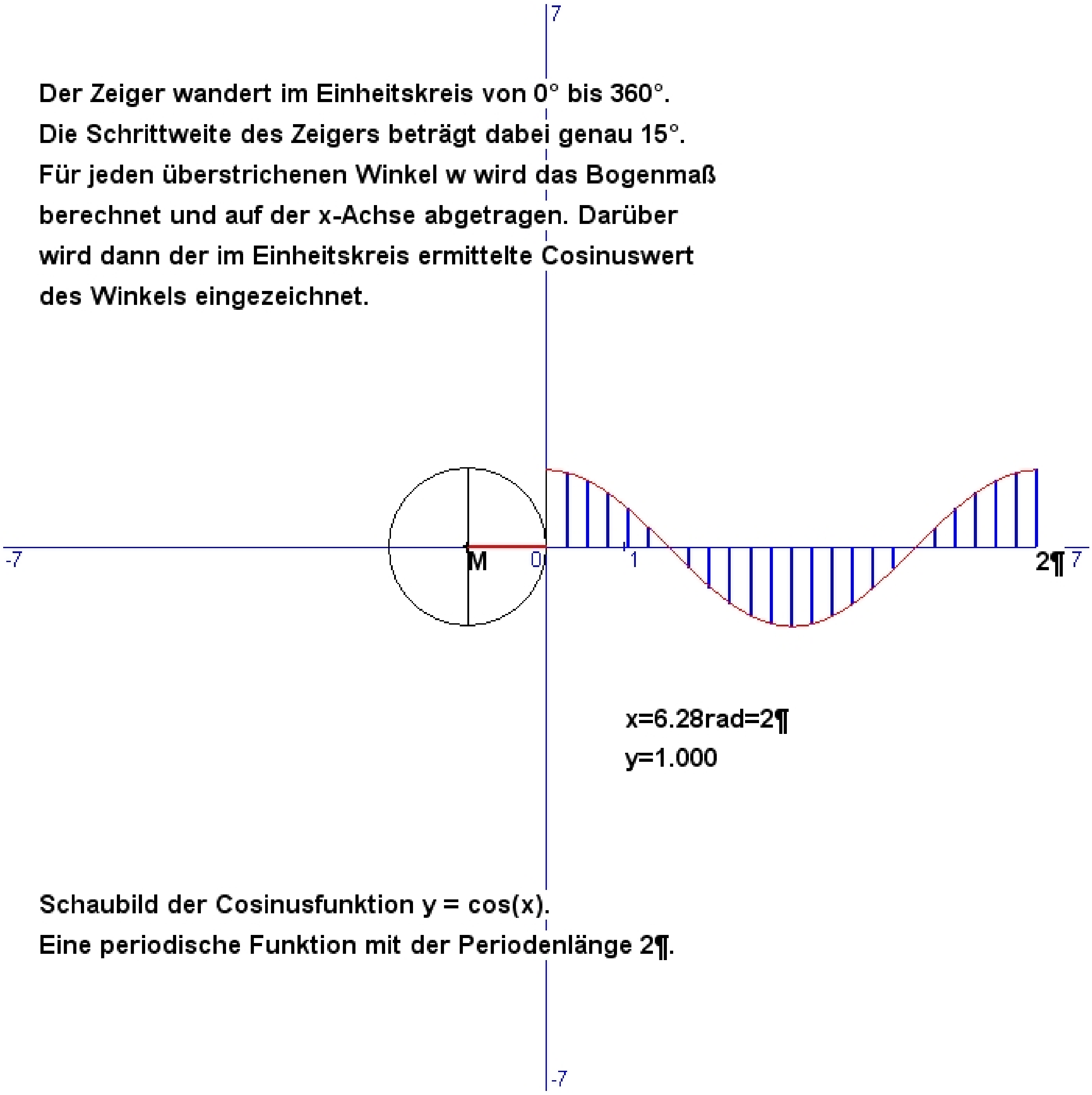
Der Zusammenhang von SINUS und COSINUS

Im linken Einheitskreis gilt in dem rechtwinkeligen Dreieck MAB
der Lehrsatz von Pythagoras, also gilt: $\sin^2(w) + \cos^2(w) = 1$.

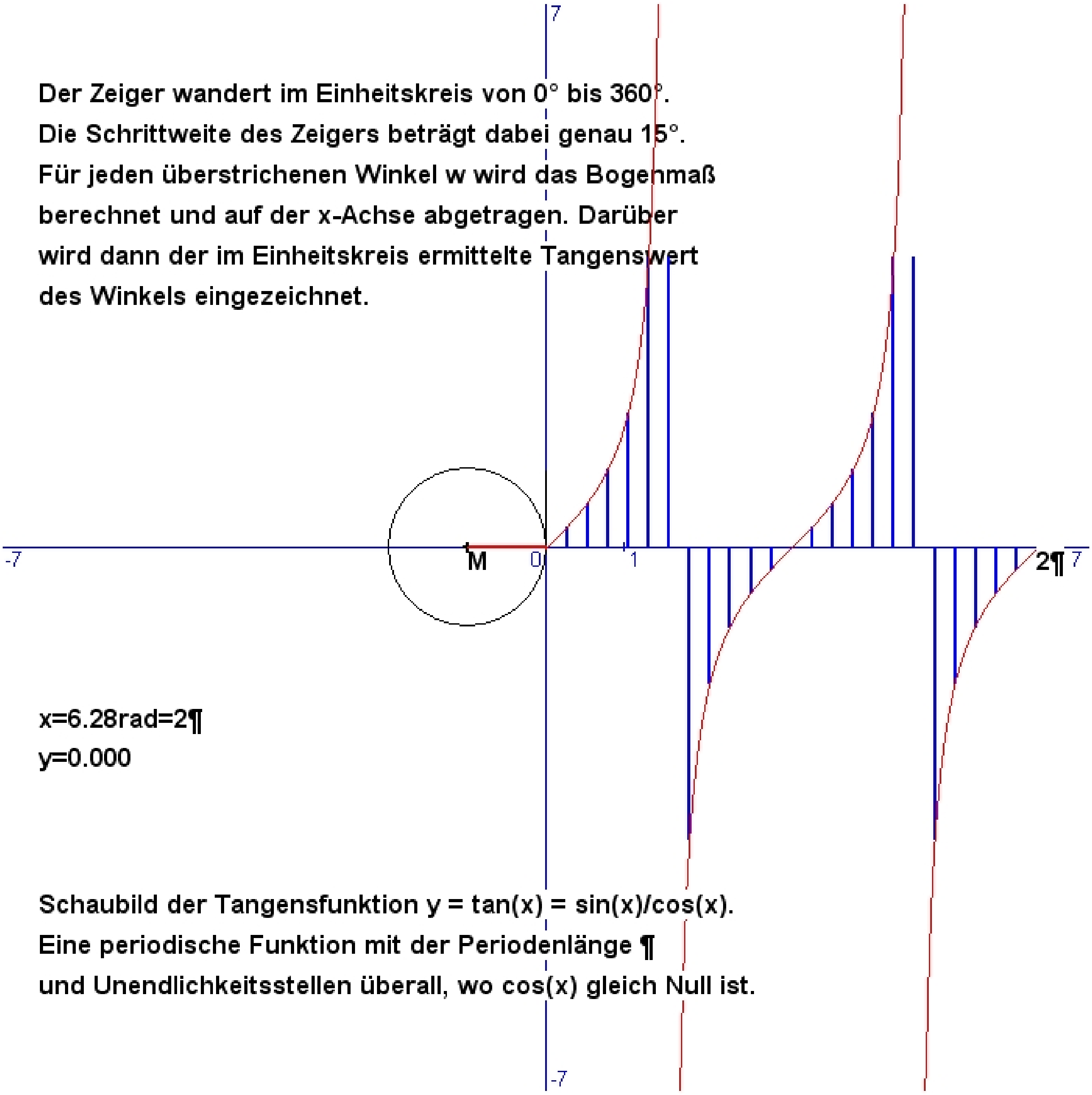


Rechts liegen der Winkel w und sein Komplementärwinkel (90-w).
Die Dreiecke NCD und FEN sind kongruent, weil sie in einer Seite
und in zwei Winkeln übereinstimmen. Also gilt: NC = EF und damit
cos(w) = sin(90-w). Es gilt auch CD = NE, d.h sin(w) = cos(90-w).
Das ist der Grund für den Namen "Co-Sinus".

Es folgen die Schaubilder von Cosinus- und Tangensfunktion.


7
Der Zeiger wandert im Einheitskreis von 0° bis 360°.
Die Schrittweite des Zeigers beträgt dabei genau 15°.
Für jeden überstrichenen Winkel w wird das Bogenmaß
berechnet und auf der x-Achse abgetragen. Darüber
wird dann der im Einheitskreis ermittelte Cosinuswert
des Winkels eingezeichnet.
-7
M
0
1
2¶
7
x=6.28rad=2¶
y=1.000
Schaubild der Cosinusfunktion y = cos(x).
Eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 2¶.
-7

Der Zeiger wandert im Einheitskreis von 0° bis 360°.
Die Schrittweite des Zeigers beträgt dabei genau 15°.
Für jeden überstrichenen Winkel w wird das Bogenmaß
berechnet und auf der x-Achse abgetragen. Darüber
wird dann der im Einheitskreis ermittelte Tangenswert
des Winkels eingezeichnet.



x=6.28rad=2¶
y=0.000

Schaubild der Tangensfunktion y = tan(x) = sin(x)/cos(x).
Eine periodische Funktion mit der Periodenlänge ¶
und Unendlichkeitsstellen überall, wo cos(x) gleich Null ist.

Funktionen

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung von Zahlen.
Dabei werden allen Zahlen (Argumente x) einer bestimmten Definitionsmenge (D) entsprechend einer Vorschrift (f) eindeutig Zahlen (Werte y) aus einer Wertemenge W zugeordnet.

Beispiel

Definitionsmenge R, Wertemenge = R,
Zuordnungsvorschrift (Funktionsformel): y = f(x) = 2 * x,
d.h. jeder rellen Zahl wird das Doppelte zugeordnet.
z.B. f(-3) = -6, f(0) = 0, f(5.5) = 11, usw.

Winkelfunktionen

Bei einer Winkelfunktion wird jedem Winkel x aus dem Intervall D = [0;360[genau eine reelle Zahl y als Wert zugeordnet. Nimmt man das Bogenmaß von x als Argument, dann ist D = [0;2¶ [.

y = sin(x), W = [-1;+1] (Sinusfunktion)
y = cos(x), W = [-1;+1] (Cosinusfunktion)
y = tan(x), W = R (Tangensfunktion)

Arcusfunktionen

Gegeben ist eine Funktion $y = f(x)$. Damit kann entsprechend der Zuordnungsvorschrift zu jedem Argument x der zugehörige Funktionswert y berechnet werden.

Will man aber umgekehrt zu einem Funktionswert y das zugehörige Argument x ermitteln, so wird das als Umkehrfunktion bezeichnet.

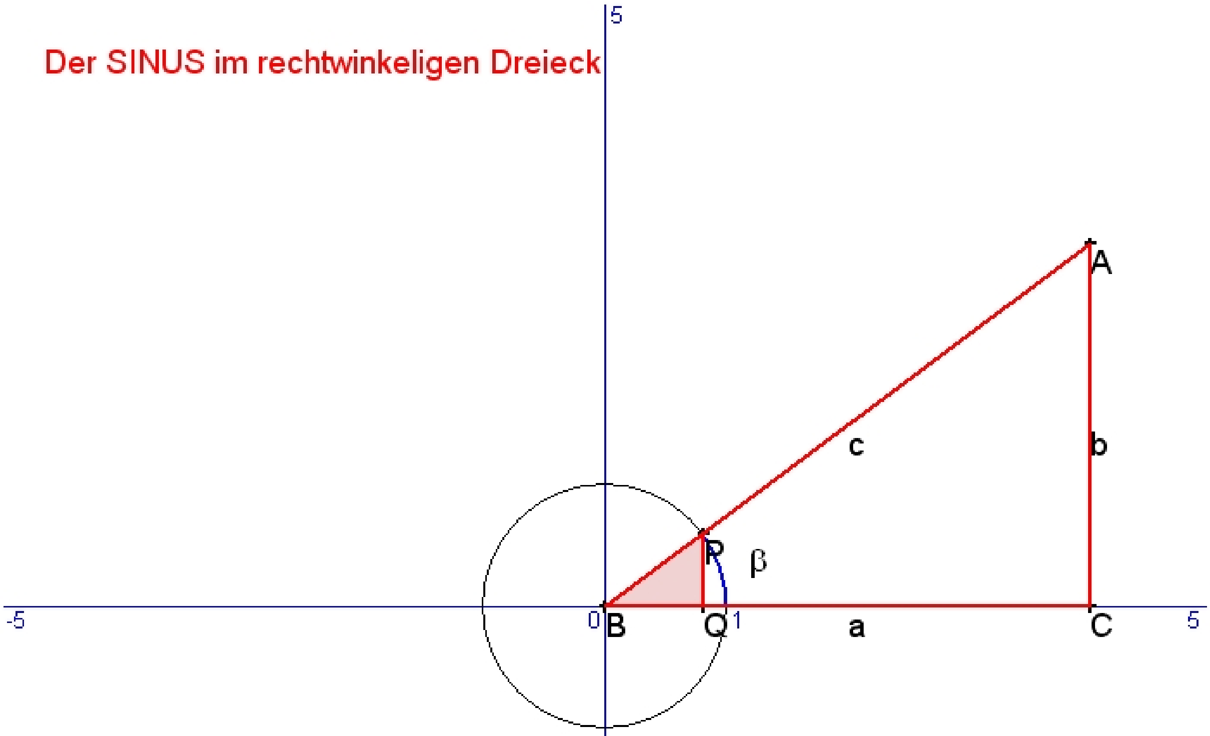
Die Umkehrungen der Winkelfunktionen heißen Arcusfunktionen. Sie liefern zu einem zulässigen Zahlenwert y den entsprechenden Winkel x. Damit diese Umkehrungen eindeutig sind, werden die Winkelfunktionen auf ihrer ersten Periode betrachtet (Hauptwerte).

$y = \sin(x)$ ..... $x = \arcsin(y)$, sprich: "x ist der Arcussinus von y"
$y = \cos(x)$ ..... $x = \arccos(y)$
$y = \tan(x)$ ..... $x = \arctan(y)$

Beispiele

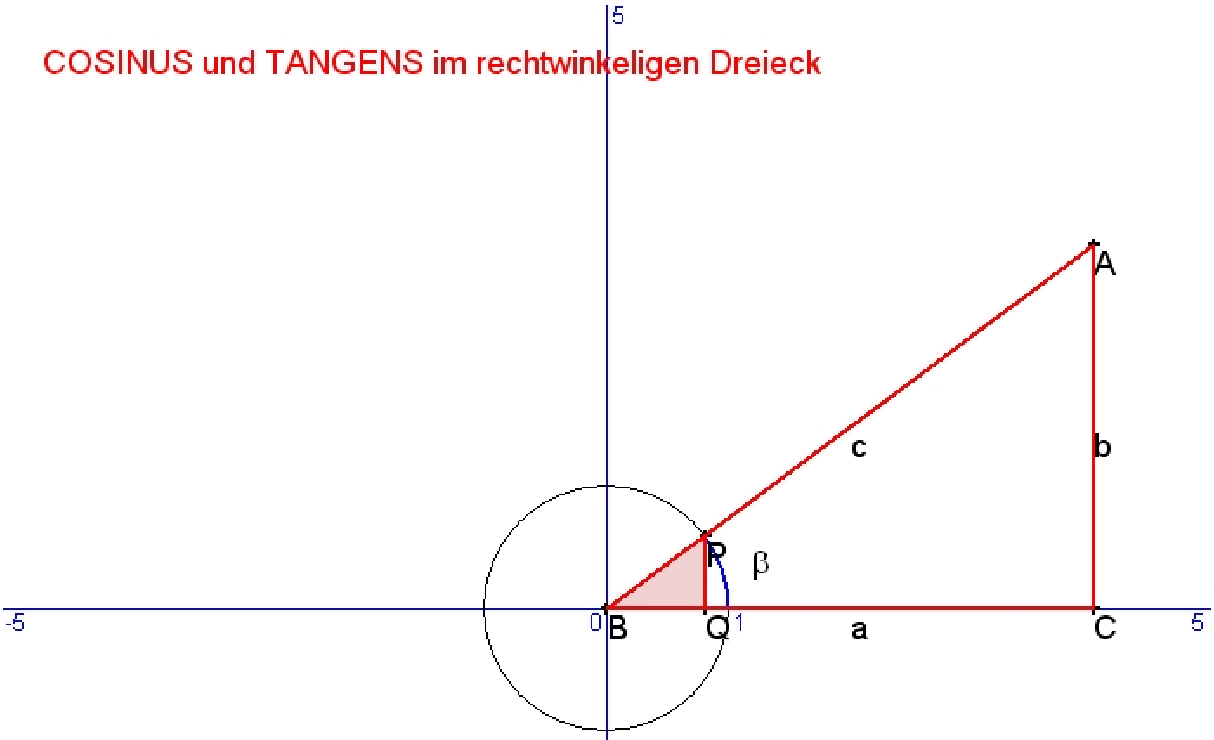
$\cos(90°) = 0$ ..... $\text{arcos}(0) = 90°$
$\sin(30°) = 0.5$ ..... $\arcsin(0.5) = 30°$
$\tan(45°) = 1$ ..... $\arctan(1) = 45°$

Rechtwinkelige Dreiecke



Vom rechtwinkeligen Dreieck ABC kennt man die Katheten a = 4 und b = 3. Die Hypotenuse ist dann c = 5. Dieses Dreieck ABC stimmt mit dem Dreieck PBQ, das im Einheitskreis liegt, in allen Winkeln überein. Die beiden Dreiecke sind daher ähnlich und sie stimmen auch in entsprechenden Seitenverhältnissen überein.
So gilt QP : BP = CA : BA, also sin(ß) : 1 = b : c, also sin(ß) = b / c.

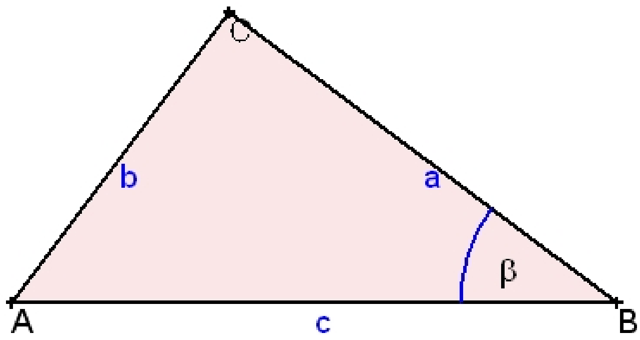
COSINUS und TANGENS im rechtwinkeligen Dreieck



In den ähnlichen Dreiecken ABC und PBQ gelten noch die zusätzlichen Gleichungen:

BQ : BP = BC : BA, also cos(ß) : 1 = a : c, also cos(ß) = a / c.
tan(ß) = sin(ß) / cos(ß) = (b/c) / (a/c) = b / a, also tan(ß) = b / a.

SINUS, COSINUS, TANGENS im rechtwinkeligen Dreieck

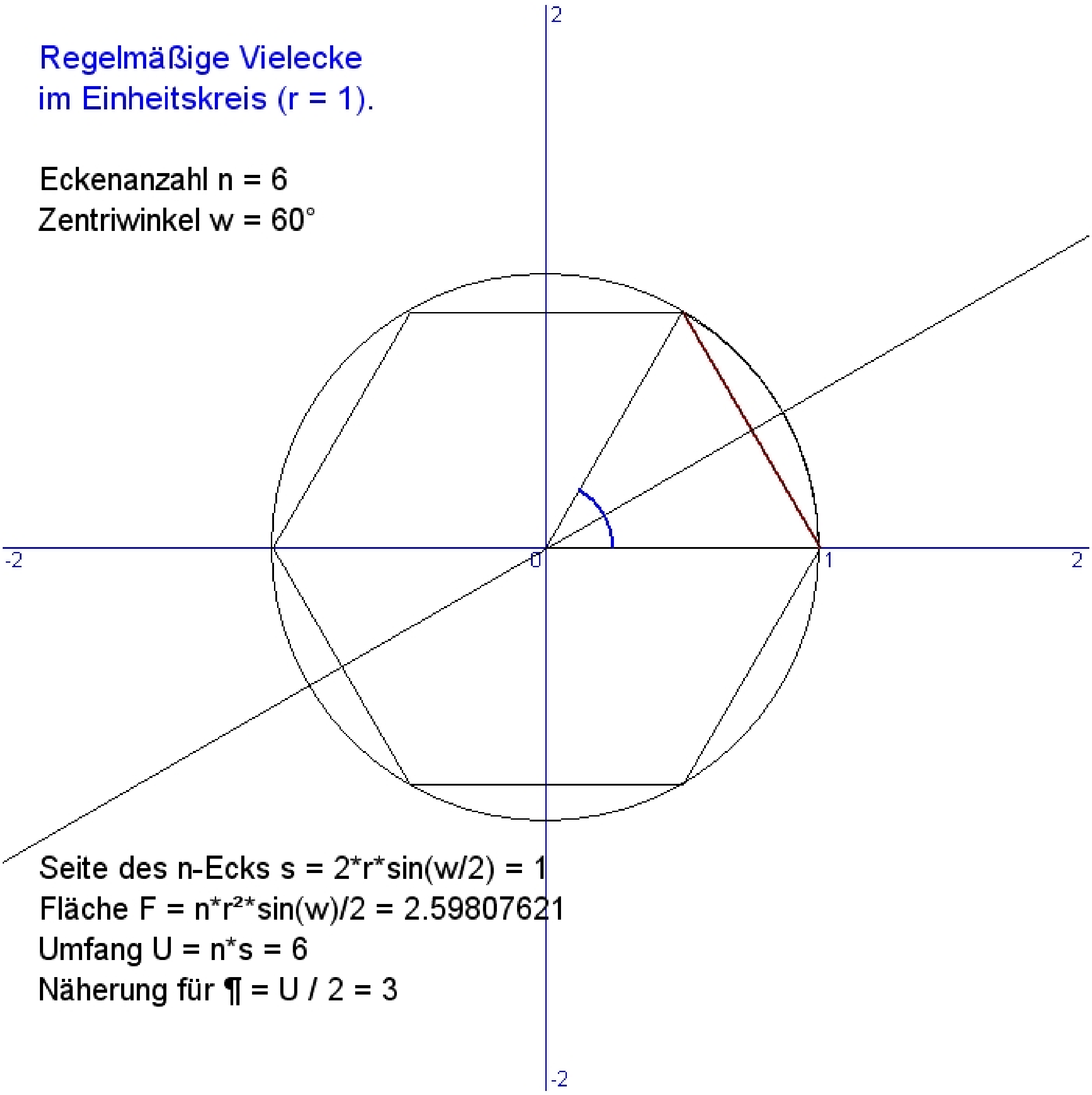


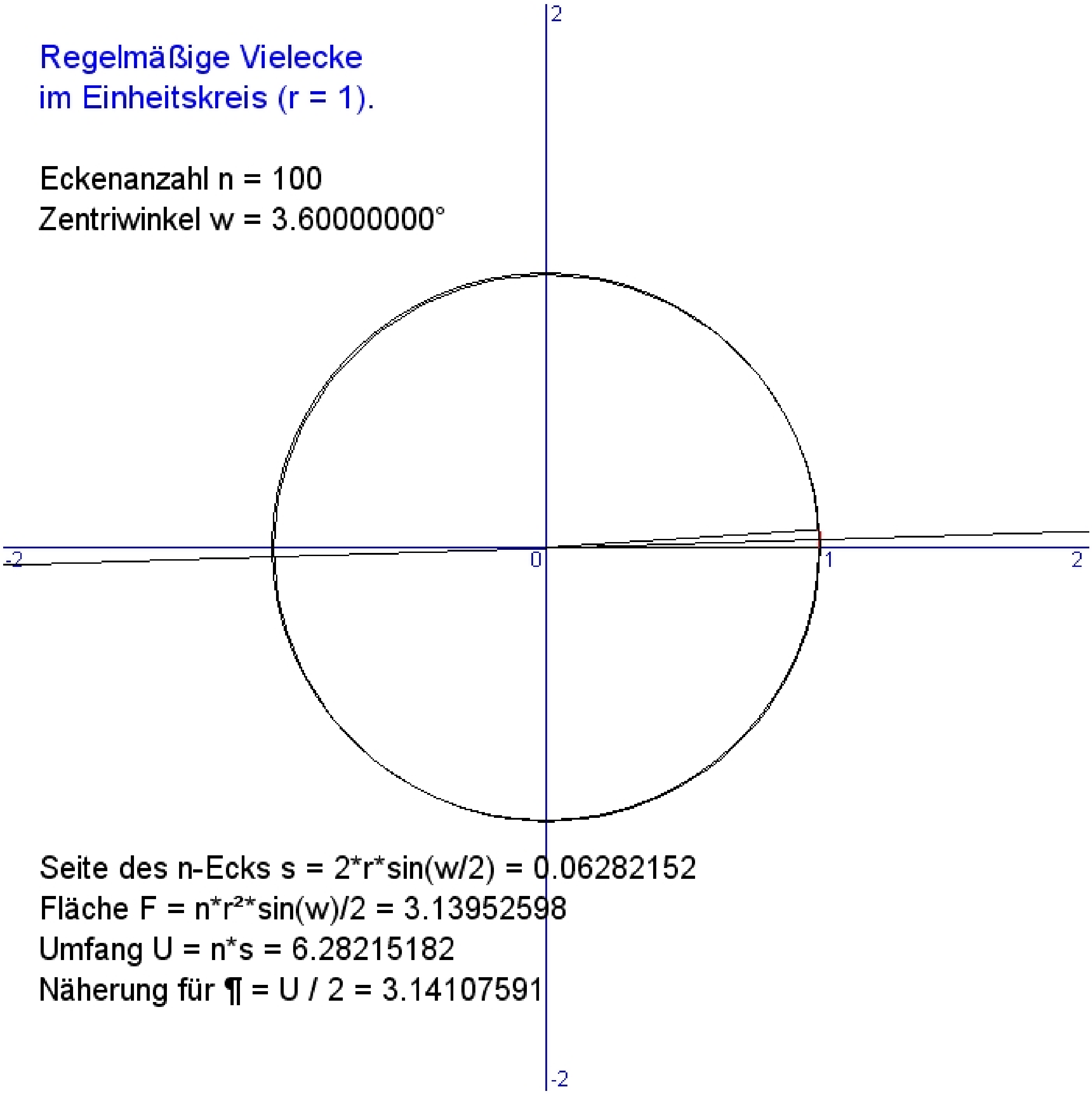
Wir haben bewiesen, dass in jedem rechtwinkeligen Dreieck zwischen dem Winkel ß = w(ABC) und den Seiten des Dreiecks a, b, c folgende Beziehungen bestehen:

sin(ß) = b/c = Gegenkathete / Hypotenuse
cos(ß) = a/c = Ankathete / Hypotenuse
tan(ß) = b/a = Gegenkathete / Ankathete

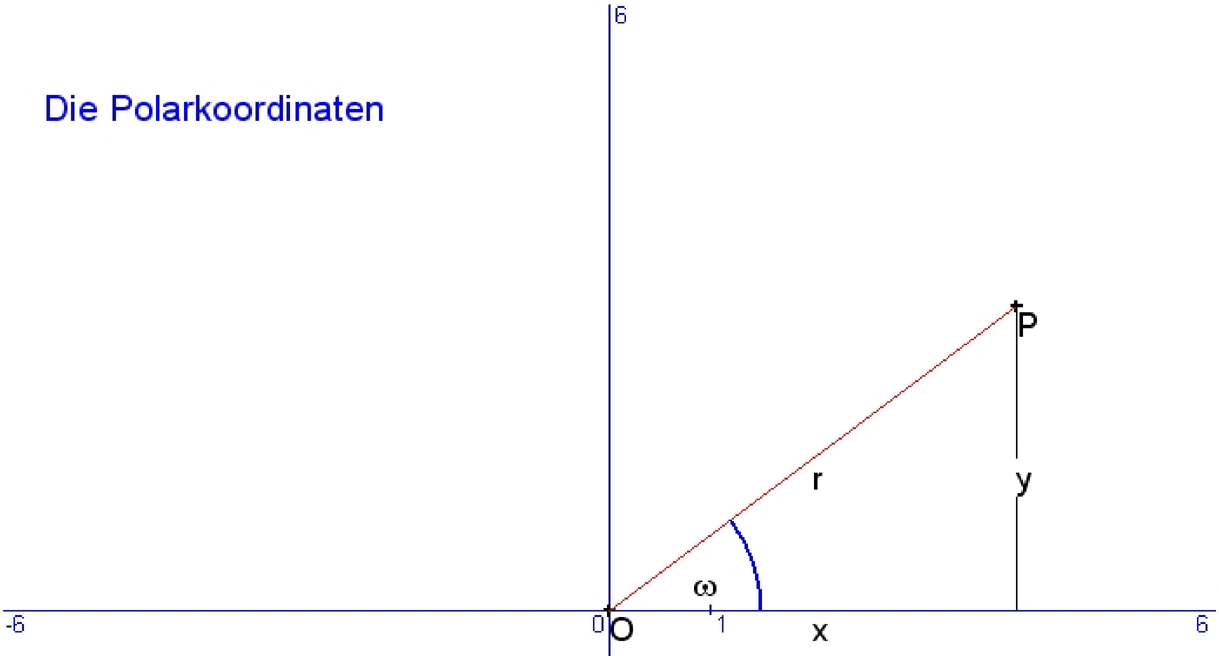
Diese Beziehungen gelten analog für beide spitze Winkel.

Regelmäßige Vielecke



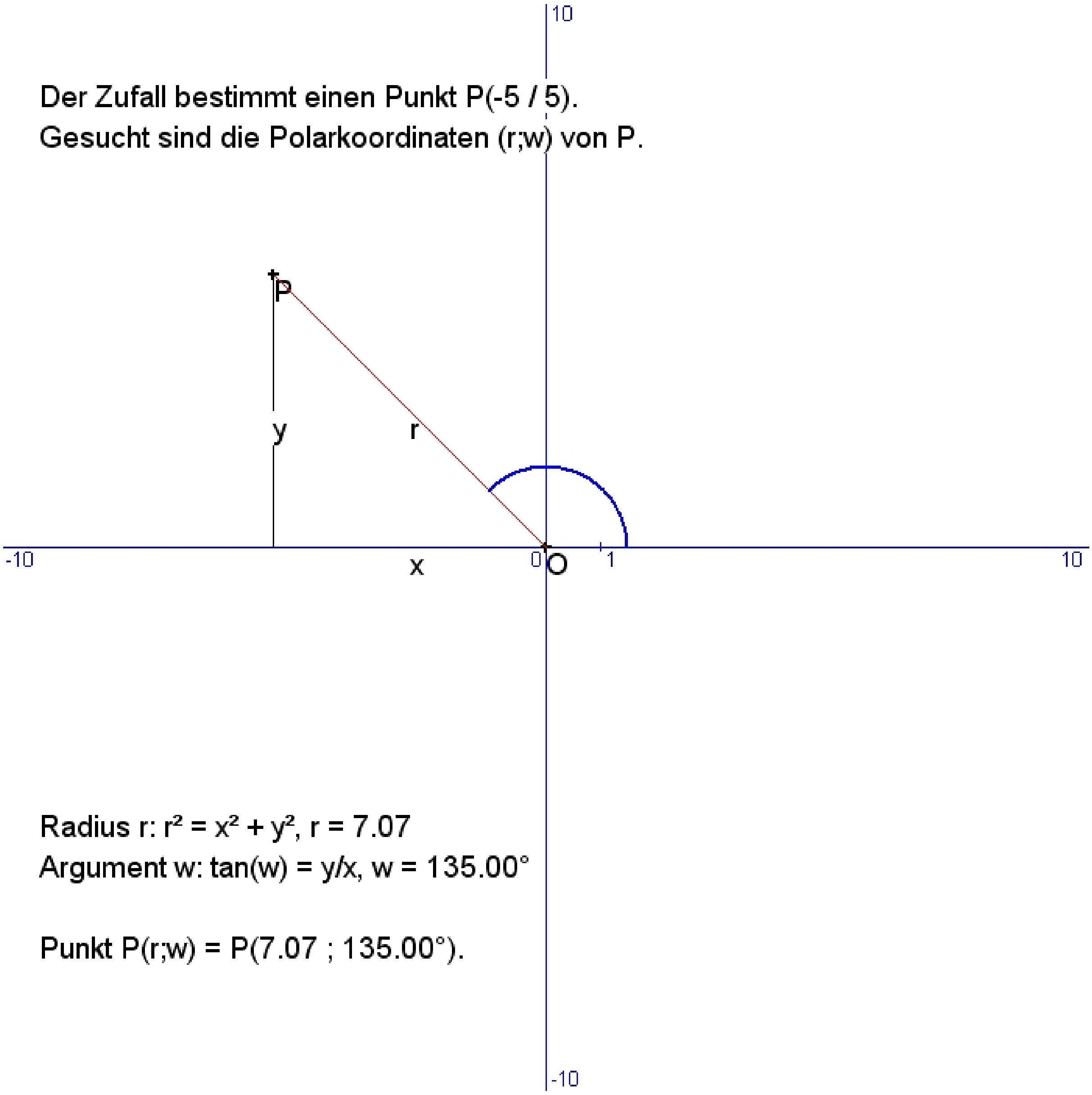

Regelmäßige Vielecke
im Einheitskreis (r = 1).
Eckenanzahl n = 100
Zentriwinkel w = 3.60000000°
Seite des n-Ecks s = 2*r*sin(w/2) = 0.06282152
Fläche F = n*r²*sin(w)/2 = 3.13952598
Umfang U = n*s = 6.28215182
Näherung für ¶ = U / 2 = 3.14107591
2
-2
0
1
2
-2

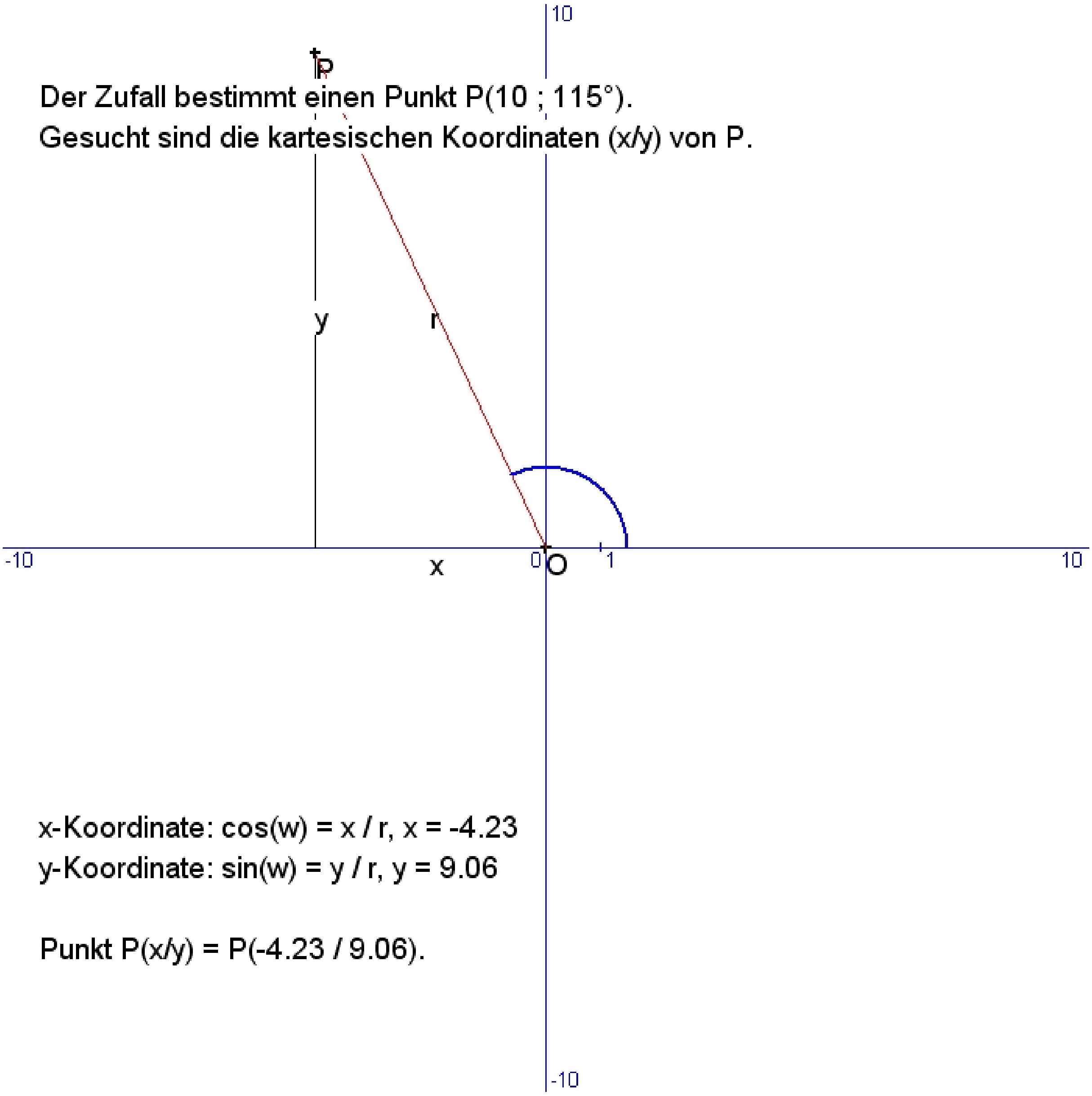
Die Polarkoordinaten



Die Ortsbestimmung eines Punktes P in der Ebene erfolgt durch die Angabe seiner kartesischen Koordinaten (x/y).

Ein anderes Verfahren der Ortsbestimmung besteht darin, dass man die Länge der Strecke OP = r (Radius) und den Steigungswinkel w (Argument) ermittelt. Man nennt (r;w) die Polarkoordinaten des Punktes P und es gelten dabei die Formeln: $r^2 = x^2 + y^2$ und $\tan(w) = y / x$.

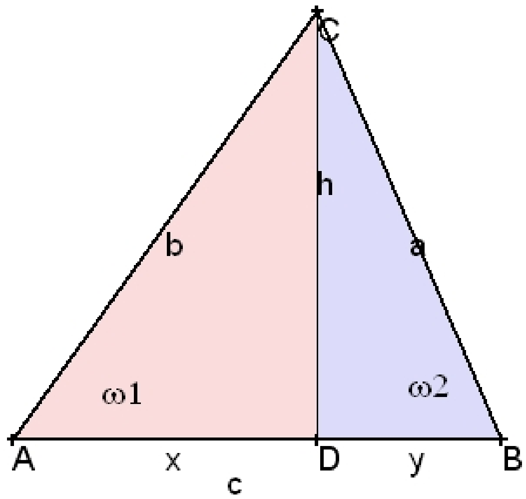

10
Der Zufall bestimmt einen Punkt P(-5 / 5).
Gesucht sind die Polarkoordinaten (r;w) von P.
P
y
r
-10
x
0
O
1
10
Radius r: r² = x² + y², r = 7.07
Argument w: tan(w) = y/x, w = 135.00°
Punkt P(r;w) = P(7.07 ; 135.00°).
-10


10
P
Der Zufall bestimmt einen Punkt P(10 ; 115°).
Gesucht sind die kartesischen Koordinaten (x/y) von P.
y
r
-10
x
0
O
1
10
x-Koordinate: cos(w) = x / r, x = -4.23
y-Koordinate: sin(w) = y / r, y = 9.06
Punkt P(x/y) = P(-4.23 / 9.06).
-10

Schiefwinkelige Dreiecke

Der Sinussatz

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie
die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.



Beweis:

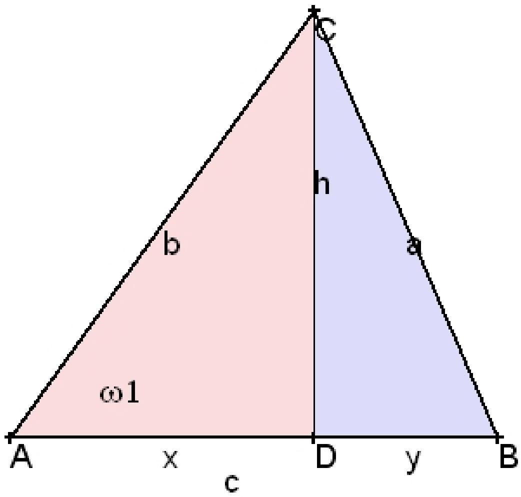
Die Höhe h zerlegt das Dreieck ABC in zwei rechtwinkelige
Dreiecke ADC und BDC. Dort gelten dann folgende Formeln:
sin(w1) = h / b und h = b * sin(w1)
sin(w2) = h / a und h = a * sin(w2)
Also gilt a * sin(w2) = b * sin(w1) und daher

a : b = sin(w1) : sin(w2)

Der Cosinussatz

In jedem Dreieck gilt folgende Formel:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2*c*b*\cos(w1)$



Beweis:

Im Dreieck ADC gilt: $x = b*\cos(w1)$ und $h = b*\sin(w1)$

Im Dreieck BDC gilt: $y = c - x$ und $a^2 = h^2 + y^2$

Durch Einsetzen erhält man:

$a^2 = b^2*\sin^2(w1) + c^2 - 2*c*b*\cos(w1) + b^2*\cos^2(w1)$

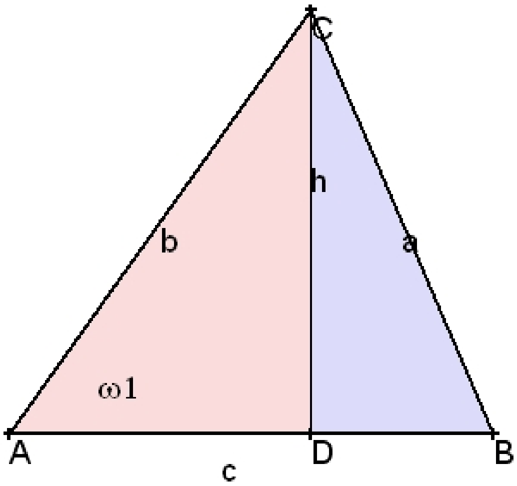
$a^2 = b^2*(\sin^2(w1) + \cos^2(w1)) + c^2 - 2*c*b*\cos(w1)$

Weil nun $\sin^2(w1) + \cos^2(w1) = 1$, gilt somit

$a^2 = b^2 + c^2 - 2*c*b*\cos(w1)$

Die trigonometrische Flächenformel.

In jedem Dreieck gilt folgende Flächenformel:
F = c * b * sin(w1) / 2



Beweis:

Im jedem Dreieck ABC gilt für die Fläche F = c*h/2.
Im Dreieck ADC gilt h = b*sin(w1). Daraus folgt nun:

F = c * b * sin(w1) / 2

Die entsprechenden Formeln gelten analog
auch für die anderen Winkel.

Die Winkelfunktionen von zusammengesetzten Winkeln

Der erste Summensatz

Die doppelten Winkel

Die halben Winkel

Der zweite Summensatz

Hinweis: Winkel werden im Text immer mit lateinischen Buchstaben bezeichnet: a, b, c, d, e, f. In Zeichnungen werden sie mit griechischen Buchstaben bezeichnet: α, β, γ, δ, ε, ϕ.

Der erste Summensatz

Im vorliegenden trigonometrischen Projekt geht es um die Frage, wie die Winkelfunktion von einem zusammengesetzten Winkel auf Winkelfunktionen der einzelnen Winkel zurückgeführt werden kann. Der so genannte erste Summensatz liefert die Antwort in Form von zwei fundamentalen Lehrsätzen:

[S1.1] sin(a+b) = sin(a)*cos(b) + cos(a)*sin(b)
[S1.2] cos(a+b) = cos(a)*cos(b) - sin(a)*sin(b)

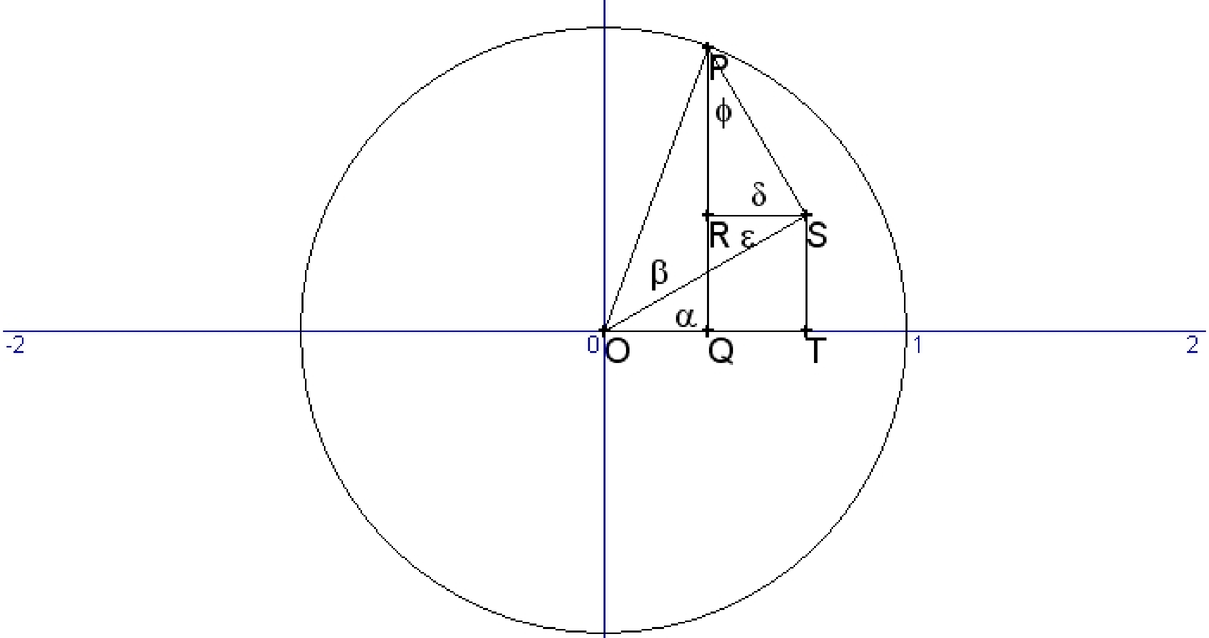
Aus diesen beiden Lehrsätzen, die auf den nächsten Seiten ausführlich bewiesen werden, folgen verschiedene weitere Lehrsätze. Die Ersetzung von b durch -b in den Sätzen [S1.1], [S1.2] liefert:

[S1.3] sin(a-b) = sin(a)*cos(b) - cos(a)*sin(b)
[S1.4] cos(a-b) = cos(a)*cos(b) + sin(a)*sin(b)

Weiters gilt: tan(a ± b) = sin(a ± b) / cos(a ± b). Das Einsetzen von den Sätzen [S1.1], [S1.2] in dieser Formel liefert:

[S1.5] tan(a+b) = (tan(a) + tan(b)) / (1 - tan(a)*tan(b))
[S1.6] tan(a-b) = (tan(a) - tan(b)) / (1 + tan(a)*tan(b))

In der obigen Figur bildet der Winkel (a + b) im Einheitskreis das rechtwinkelige Dreieck OQP. Dabei ist PQ normal zu OT und PS ist normal zu OS. Daher sind a und f Normalwinkel. Also gilt: f = a.



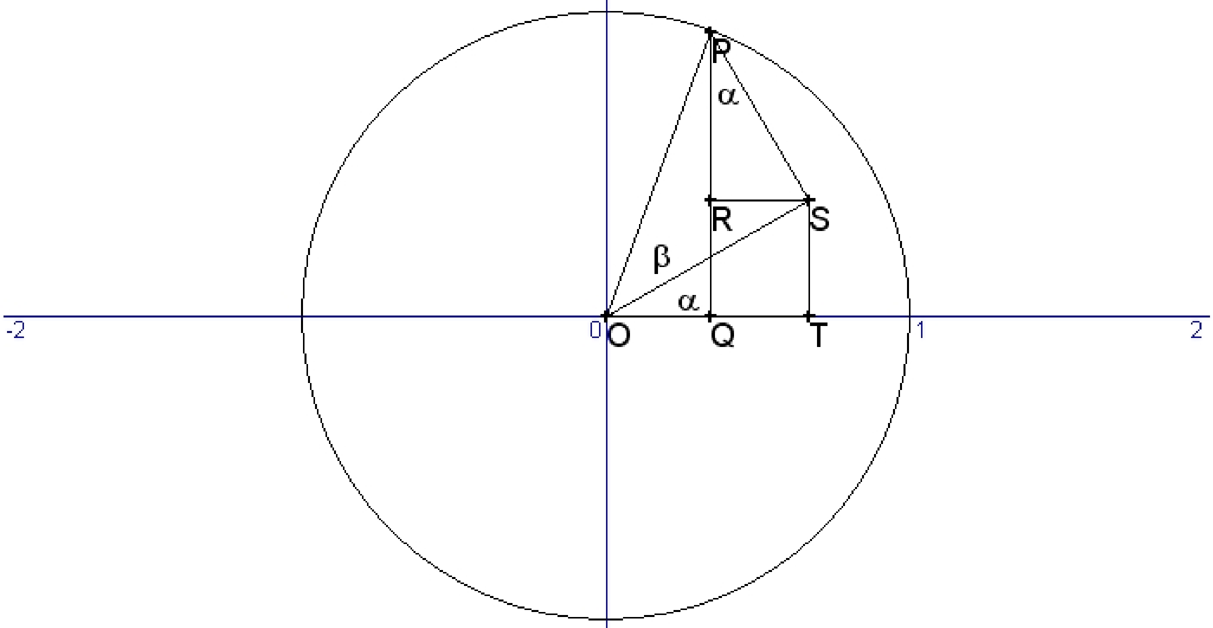
Im rechtwinkeligen Dreieck RSP gilt: d = 90 - f = 90 - a.
Weiters sind a und e Parallelwinkel, also gilt e = a.
e + d = a + (90 - a) = 90°. Also ist Dreieck OSP rechtwinkelig.

Nun können wir den ersten Summensatz [S1.1] beweisen:

Dreieck OQP: QP = sin(a + b)

Dreieck OSP: OS = cos(b) und SP = sin(b)

Dreieck SRP: RP = cos(a) * SP = cos(a) * sin(b)



Dreieck OTS: TS = sin(a) * OS = sin(a) * cos(b) = QR

Dreieck OQP: QP = QR + RP

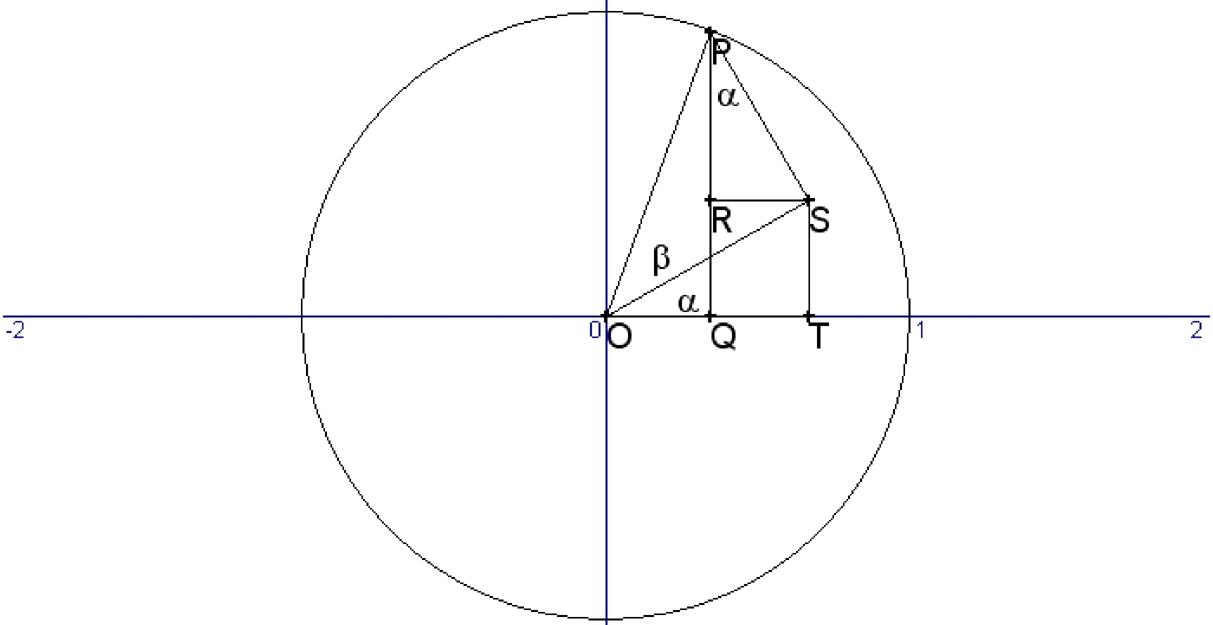
Dreieck OQP: sin(a + b) = sin(a) * cos(b) + cos(a) * sin(b)

Auch den Summensatz [S1.2] können wir nun beweisen:

Dreieck OQP: OQ = cos(a + b)

Dreieck OSP: OS = cos(b) und SP = sin(b)

Dreieck SRP: RS = sin(a) * SP = sin(a) * sin(b) = QT



Dreieck OTS: OT = cos(a) * OS = cos(a) * cos(b)

Dreieck OTS: OQ = OT - QT

Dreieck OTS: cos(a + b) = cos(a) * cos(b) - sin(a) * sin(b)

Die doppelten Winkel

Wir wollen jetzt die Winkelfunktion des doppelten Winkels auf Winkelfunktionen des einfachen Winkels zurückführen. Dazu müssen wir in den ersten Summensätzen b durch a ersetzen.

[S1.1] sin(a+b) = sin(a)*cos(b) + cos(a)*sin(b)
[S1.2] cos(a+b) = cos(a)*cos(b) - sin(a)*sin(b)

sin(2*a) = sin(a+a) = sin(a)*cos(a) + cos(a)*sin(a) = 2*sin(a)*cos(a)
cos(2*a) = cos(a+a) = cos(a)*cos(a) - sin(a)*sin(a) = cos²(a) - sin²(a)

tan(2*a) = sin(2*a) / cos(2*a) = 2*sin(a)*cos(a) / (cos²(a) - sin²(a)) =
(2*sin(a) / cos(a)) / (1 - sin²(a) / (cos²(a)) = 2*tan(a) / (1 - tan²(a))

Damit sind drei weitere Lehrsätze bewiesen:

[S1.7] sin(2*a) = 2*sin(a)*cos(a)
[S1.8] cos(2*a) = cos²(a) - sin²(a)
[S1.9] tan(2*a) = 2*tan(a) / (1 - tan²(a))

Die halben Winkel

Wir wollen jetzt die Winkelfunktion des halben Winkels auf Winkelfunktionen des einfachen Winkels zurückführen. Wir ersetzen dazu in Lehrsatz [S1.8] den Winkel a durch a/2.

[S1.8] $\cos(2*a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

$\cos(a) = \cos^2(a/2) - \sin^2(a/2) = 2*\cos^2(a/2) - 1$
$2*\cos^2(a/2) = 1 + \cos(a)$

[S1.10] $\cos^2(a/2) = (1 + \cos(a)) / 2$

$\cos(a) = \cos^2(a/2) - \sin^2(a/2) = 1 - 2*\sin^2(a/2)$
$2*\sin^2(a/2) = 1 - \cos(a)$

[S1.11] $\sin^2(a/2) = (1 - \cos(a)) / 2$

$\tan^2(a/2) = \sin^2(a/2) / \cos^2(a/2)$

[S1.12] $\tan^2(a/2) = (1 - \cos(a)) / (1 + \cos(a))$

Der zweite Summensatz

Den Abschluss unserer Lehrsätze über Winkelfunktionen bildet der so genannte zweite Summensatz, welcher eigentlich aus vier einzelnen Sätzen besteht:

[S2.1] sin(a) + sin(b) = 2 * sin((a+b)/2) * cos((a-b)/2)
[S2.2] cos(a) + cos(b) = 2 * cos((a+b)/2) * cos((a-b)/2)
[S2.3] sin(a) - sin(b) = 2 * cos((a+b)/2) * sin((a-b)/2)
[S2.4] cos(a) + cos(b) = -2 * sin((a+b)/2) * sin((a-b)/2)

Die Beweise dieser zweiten Summensätze können mit Hilfe der bereits bewiesenen ersten Summensätze erfolgen. Wir ersetzen a/2 durch a und b/2 durch b. Für Satz [S2.1] folgt dann:

sin(a+b) * cos(a-b) =
(sin(a)*cos(b) + cos(a)*sin(b)) * (cos(a)*cos(b) - sin(a)*sin(b)) =
.... =
.... =
.... =
sin(a)*cos(a) + sin(b)*cos(b) =
(sin(2*a) + sin(2*b))/2

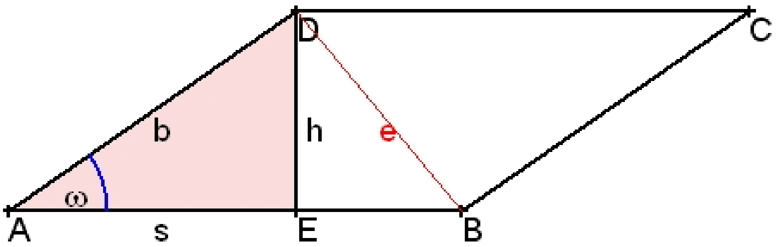
In analoger Weise werden auch die anderen drei Sätze bewiesen.

TRIGONOMETRIE

Teil 2 (Praxis)

Das Parallelogramm, Fall 1

Zufalls-Parallelogramm ABCD, Fall 1



Gegeben: a = AB = 9, b = AD = 7 und h = 4
Gesucht: Winkel wA = w, Strecke s, Diagonale e

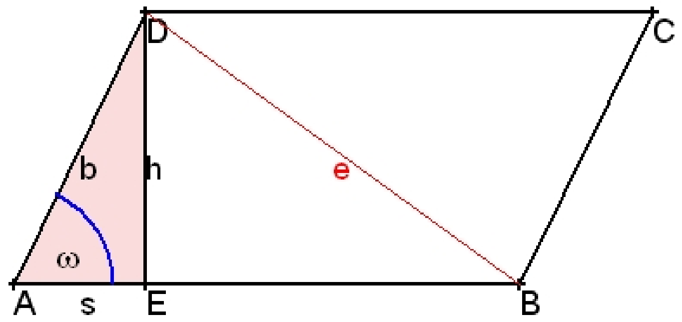
Im rechtwinkeligen Dreieck AED gilt: sin(w) = h/b, cos(w) = s/b

Lösung:

w = 34.85°
s = 5.74
e = 5.16

Das Parallelogramm, Fall 2

Zufalls-Parallelogramm ABCD, Fall 2



Gegeben: a = AB = 10, b = AD = 6 und wA = w = 64°
Gesucht: Höhe h, Strecke s, Diagonale e

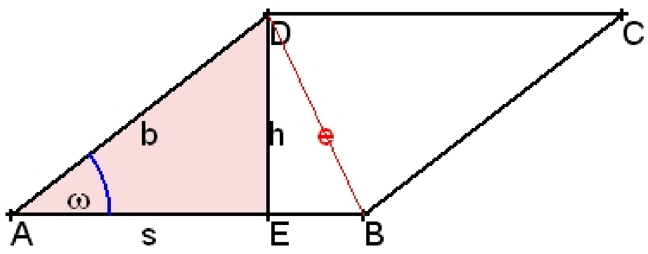
Im rechtwinkeligen Dreieck AED gilt: sin(w) = h/b, cos(w) = s/b

Lösung:

h = 5.39
s = 2.63
e = 9.13

Das Parallelogramm, Fall 3

Zufalls-Parallelogramm ABCD, Fall 3



Gegeben: a = AB = 7, h = ED = 4 und wA = w = 38°
Gesucht: Seite b, Strecke s, Diagonale e

Im rechtwinkeligen Dreieck AED gilt: sin(w) = h/b, cos(w) = s/b

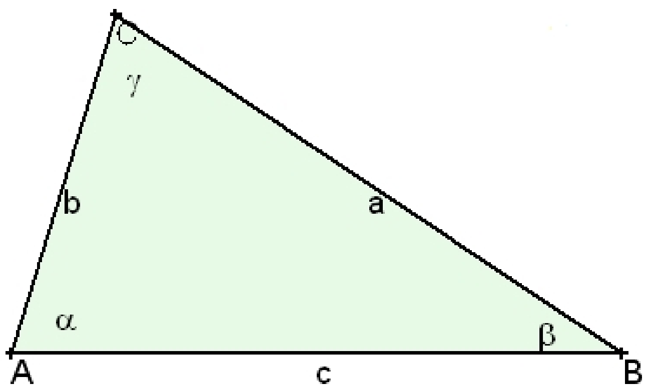
<u>Lösung:</u>

b = 6.50
s = 5.12
e = 4.42

Das Dreieck, Fall SSS

Dreiecke - Erste Grundaufgabe (SSS)

Gegeben: Die Seiten $a = 12$, $b = 7$, $c = 12$.
Gesucht: Die Winkel wA (α), wB (β), wC (γ)
und die Fläche F des Dreiecks.



(1) Cosinus-Satz, $a^2 = b^2 + c^2 - 2*b*c*cos(wA)$, wA = ?
(2) Cosinus-Satz, $b^2 = a^2 + c^2 - 2*a*c*cos(wB)$, wB = ?
(3) Winkelsummen-Satz, wA + wB + wC = 180°, wC = ?
(4) Fläche F = a * b * sin(wC) / 2

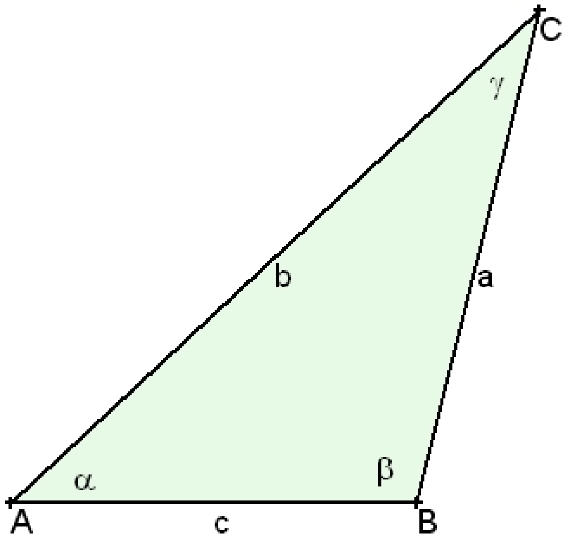
<u>Lösung:</u>

wA = 73.04°
wB = 33.92°
wC = 73.04°
F = 40.17

Das Dreieck, Fall SWW

Dreiecke - Zweite Grundaufgabe (SWW)

Gegeben: c = 8, wA (α) = 43° und wB (β) = 104°.
Gesucht: a, b und wC (γ) und Fläche F.



(1) Winkelsummen-Satz, wA + wB + wC = 180°, wC = ?
(2) Sinus-Satz, a : c = sin(wA) : sin(wC), a = ?
(3) Sinus-Satz, b : c = sin(wB) : sin(wC), b = ?
(4) Fläche F = a * b * sin(wC) / 2

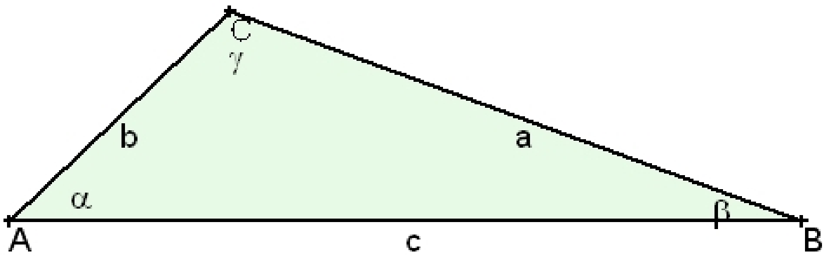
<u>Lösung:</u>

a = 10.02
b = 14.25
wC = 33.00°
F = 38.88

Das Dreieck, Fall SWS

Dreiecke - Dritte Grundaufgabe (SWS)

Gegeben: a = 12, b = 6 und wC (γ) = 116°.
Gesucht: c, wA (α), wB (β) und Fläche F.



(1) Cosinus-Satz, $c^2 = a^2 + b^2 - 2*a*b*\cos(wC)$, c = ?
(2) Cosinus-Satz, $a^2 = b^2 + c^2 - 2*b*c*\cos(wA)$, wA =?
(3) Winkelsummen-Satz, wA + wB + wC = 180°, wB = ?
(4) Fläche F = a * b * sin(wC) / 2

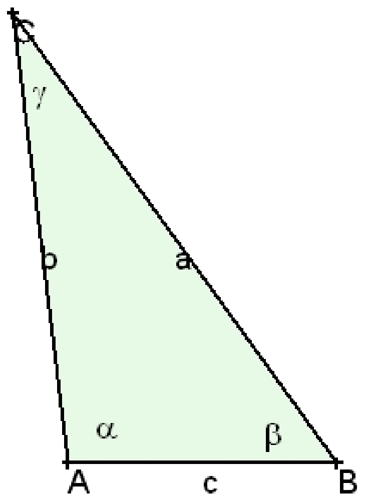
Lösung:

c = 15.59
wA = 43.77°
wB = 20.23°
F = 32.36

Das Dreieck, Fall SsW

Dreiecke - Vierte Grundaufgabe (SsW)

Gegeben sind a = 11, b = 9 und wA (α) = 97.00°.
Gesucht sind c, wB (β), wC (γ) und Fläche F.



(1) Sinus-Satz, sin(wB): sin(wA) = b : a, wB = ?
(2) Winkelsummen-Satz, wA + wB + wC = 180°, wC = ?
(3) Sinus-Satz, c : a = sin(wC) : sin(wA), c = ?
(4) Fläche F = a * b * sin(wC) / 2

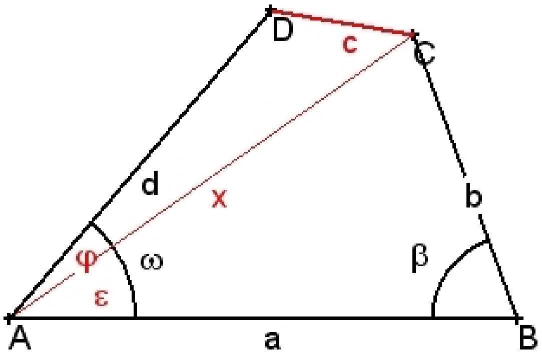
<u>Lösung:</u>

c = 5.32
wB = 54.30°
wC = 28.70°
F = 23.77

Das allgemeine Viereck

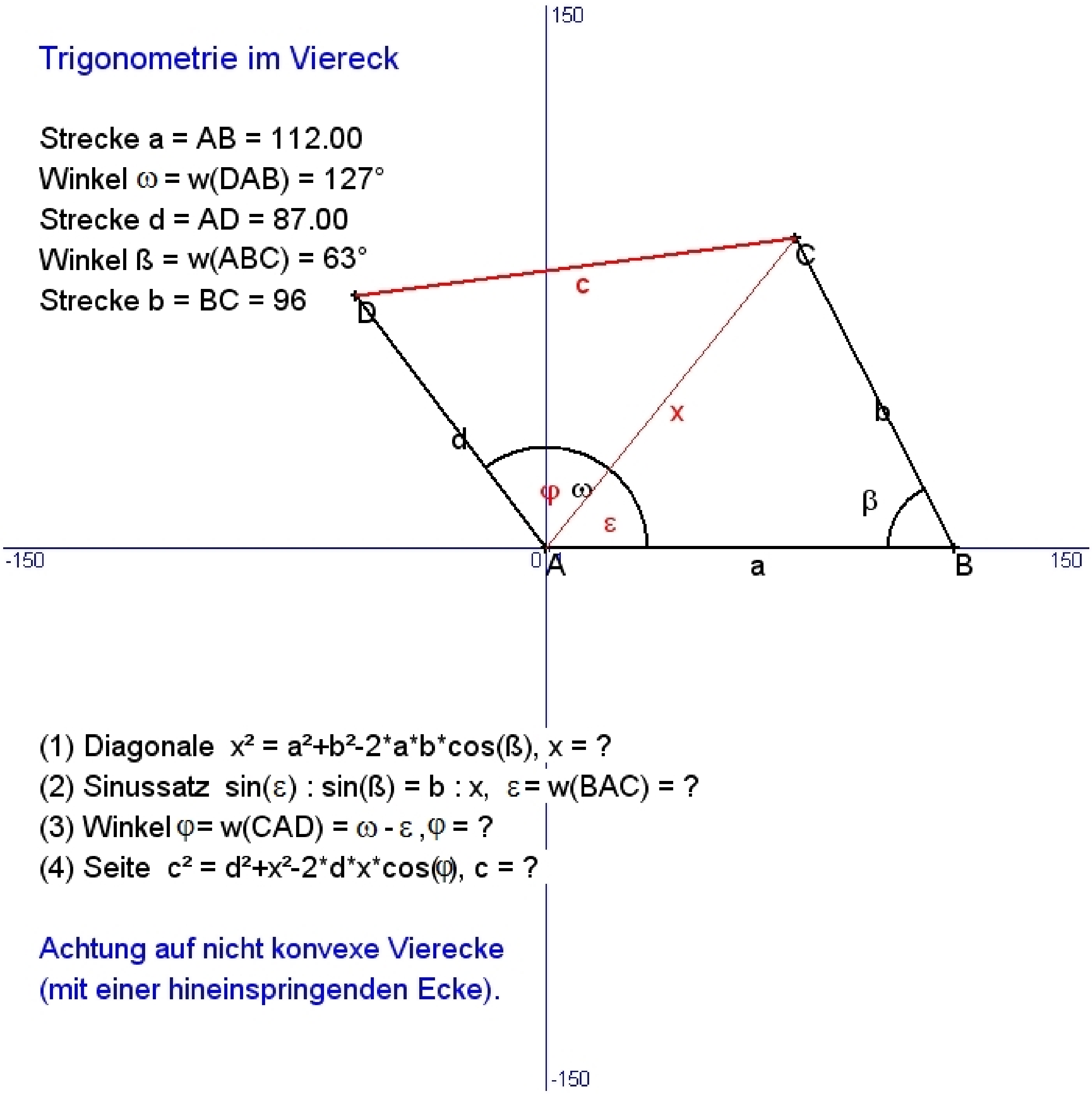
Trigonometrie im Viereck

$a = AB = 100$ cm
$b = BC = 60$ cm
$d = AD = 80$ cm
$\omega = w(BAD) = 50°$
$ß = w(ABC) = 70°$



Von einem viereckigen Grundstück ABCD werden die Seiten $a = AB$, $b = BC$ und $d = AD$ gemessen. Außerdem werden auch die zwei Winkel $\omega = w(BAD)$ und $ß = w(ABC)$ bestimmt. Damit soll die unbekannte Seite $c = BC$ ermittelt werden.

(1) Diagonale $x^2 = a^2+b^2-2*a*b*\cos(ß)$, $x = 97.4462$
(2) Sinussatz $\sin(\varepsilon) : \sin(ß) = b : x$, $\varepsilon = w(BAC) = 35.3516°$
(3) Winkel $\varphi = w(CAD) = \omega - \varepsilon$, $\varphi = 14.6484$
(4) Seite $c^2 = d^2+x^2-2*d*x*\cos(\varphi)$, $c = 28.4808$

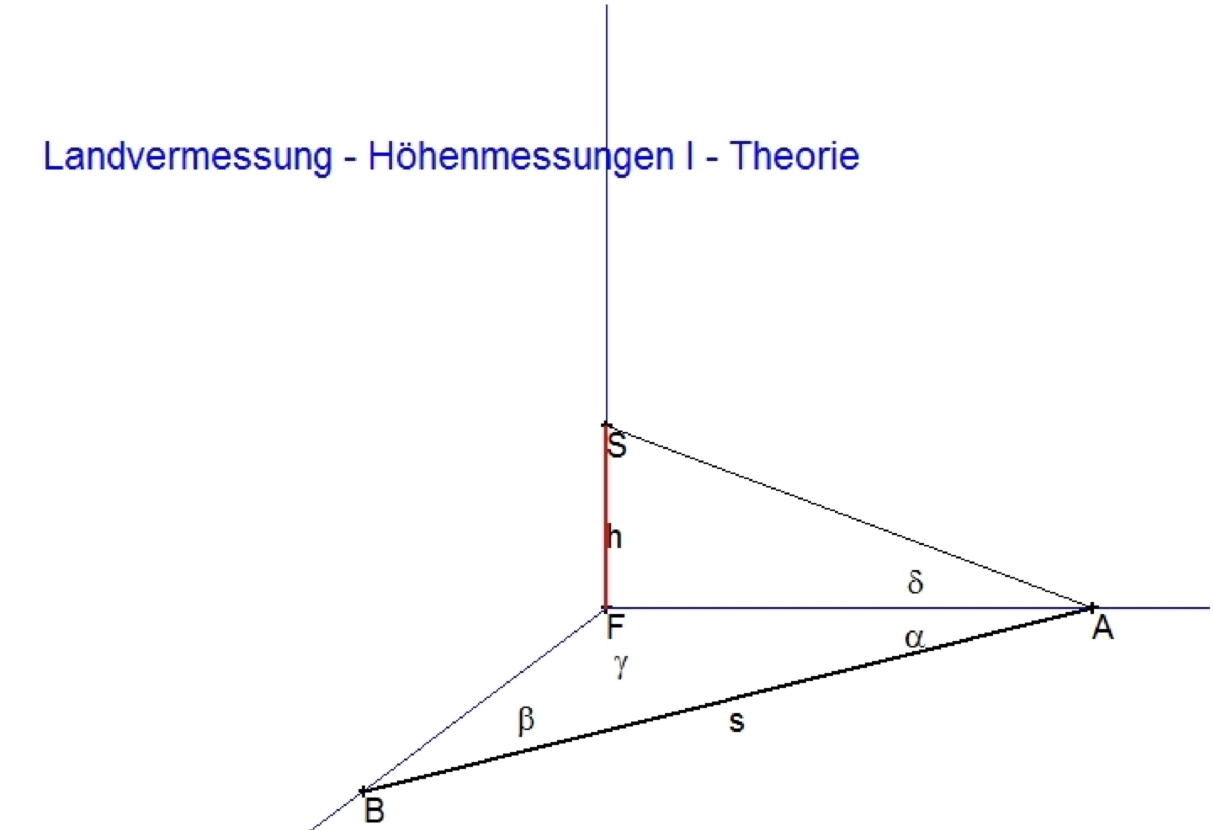


<u>Lösung:</u>

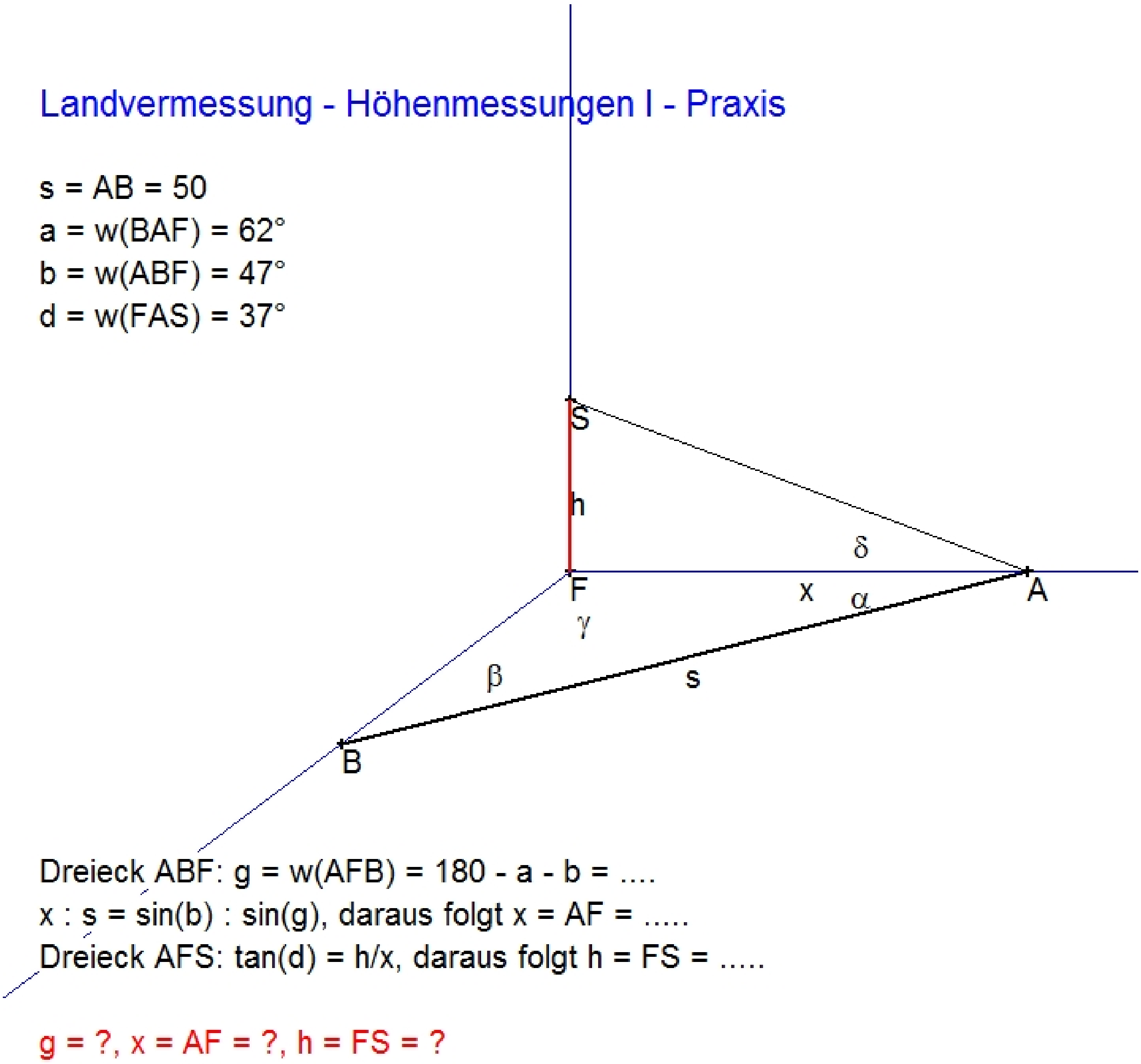
Diagonale x = 109.53
Winkel w(BAC) = 51.35°
Winkel w(CAD) = 75.65°
Seite c = 121.84

LANDVERMESSUNG

Höhenmessungen I



Auf der Ebene steht ein lotrechter Turm mit unzugänglichem Fußpunkt F und unbekannter Höhe h = FS. Um diese Höhe zu ermitteln, werden in der Ebene die Standlinie s = AB und die Winkel a = w(BAF) und b = w(ABF) gemessen. Vom Punkt A wird zur Turmspitze S der Höhenwinkel d = w(FAS) bestimmt. Aus diesen Daten kann die Höhe h = FS berechnet werden.



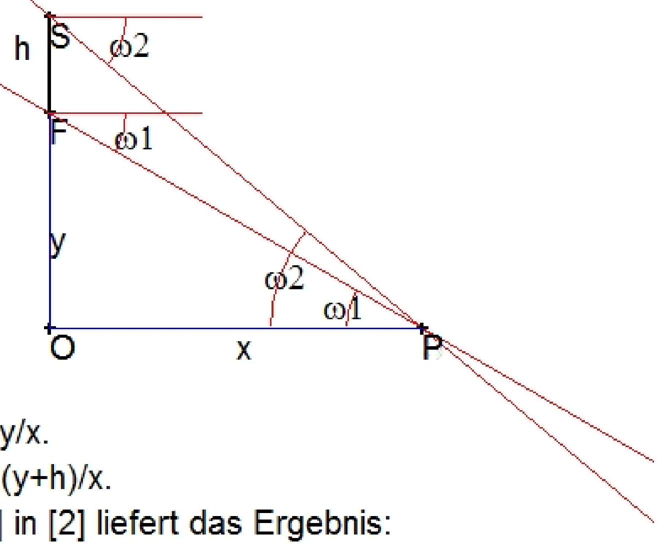
<u>Lösung:</u>

w(AFB) = 71°
x = 38.67 m
h = 29.14 m

Höhenmessungen II

Landvermessung - Höhenmessungen II - Theorie

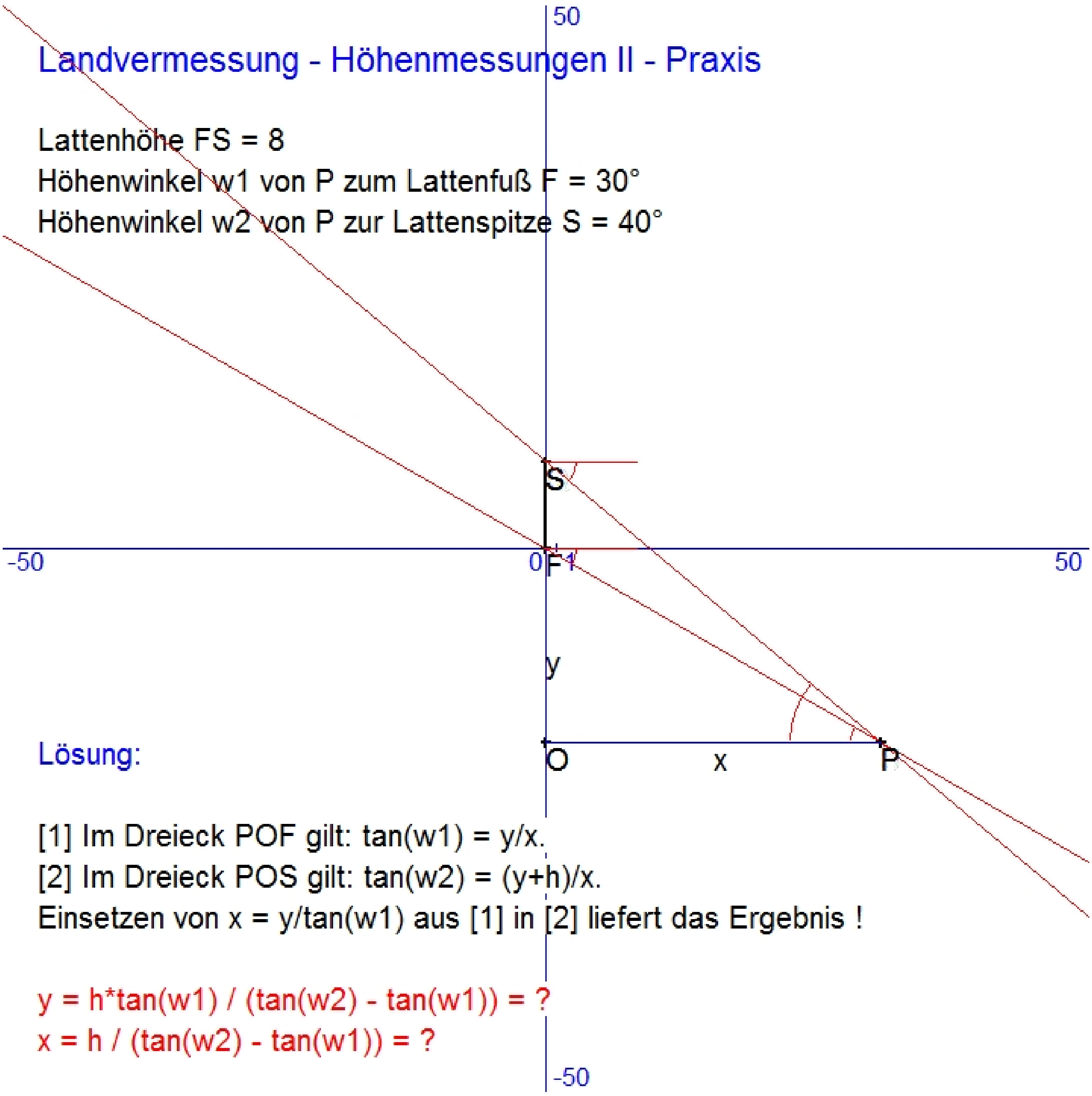
Von zwei Punkten F und P im nicht ebenen Gelände soll der Horizontalabstand (x=OP) und der Höhenunterschied (y=OF) ermittelt werden. Dazu wird im höheren Punkt F eine Messlatte mit der Höhe h=FS aufgestellt. Dann wird vom tieferen Punkt P zum Punkt F der Höhenwinkel w1 = w(FPO) und zur Lattenspitze S der Höhenwinkel w2 = w(SPO) gemessen. Aus diesen Daten werden die Entfernungen x, y berechnet.



Lösung:

[1] Im Dreieck POF gilt: tan(w1) = y/x.
[2] Im Dreieck POS gilt: tan(w2) = (y+h)/x.
Einsetzen von x = y/tan(w1) aus [1] in [2] liefert das Ergebnis:

y = h*tan(w1) / (tan(w2) - tan(w1))
x = h / (tan(w2) - tan(w1))



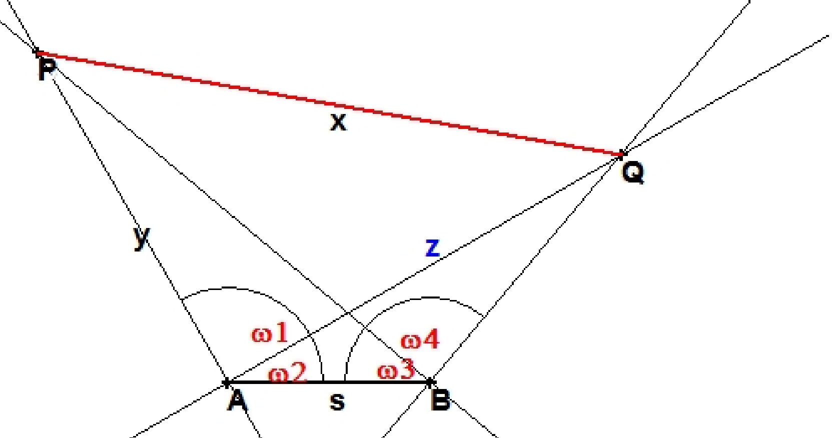
Lösung:

x = 30.56 m
y = 17.65 m

Vorwärtseinschneiden

Landvermessung - Vorwärtseinschneiden - Theorie

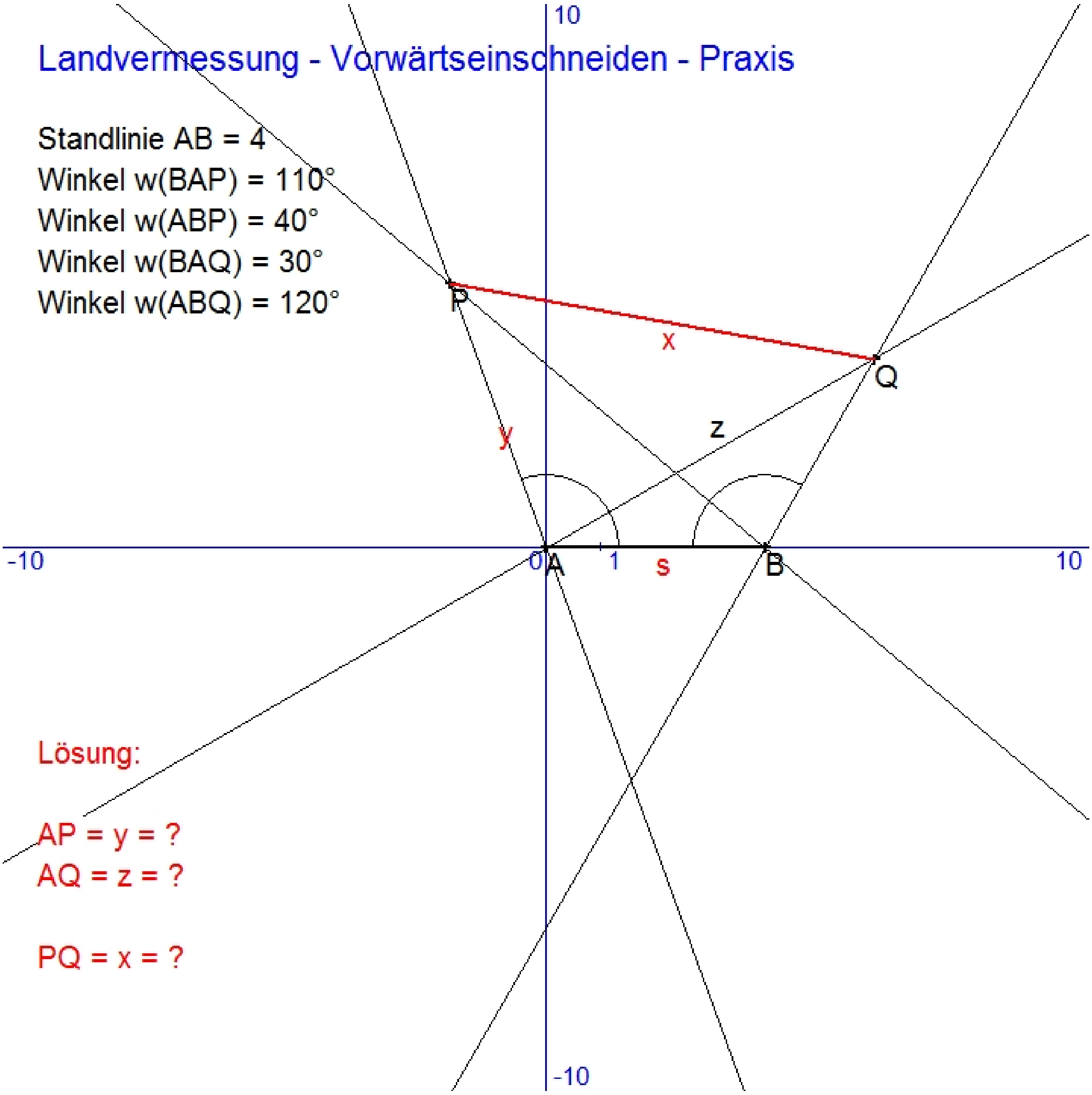
Gesucht ist die Entfernung x zweier unzugänglicher Punkte P, Q im Gelände. Dazu werden eine Standlinie s = AB und die vier Sichtwinkel von den Standpunkten A, B zu den Punkten P, Q gemessen: w1 = w(BAP) und w2 = w(BAQ) und w3=w(ABP) und w4=w(ABQ).



Lösung:

[1] Alle Winkel in den Dreiecken ABP und ABQ bestimmen.
[2] Sinussatz in ABP y : s = sin(w3) : sin(w1+w3), ... y = ...
[3] Sinussatz in ABQ z : s = sin(w4) : sin(w2+w4), ... z = ...
[4] Cosinussatz in PAQ x² = y² + z² -2*y*z*cos(w1-w2), ... x = ...

x = PQ

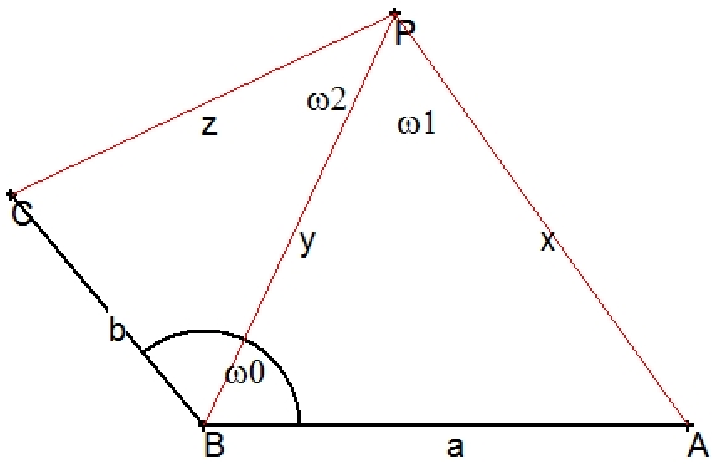


Lösung:

y = 5.14 km
z = 6.93 km
x = 7.88 km

Rückwärtseinschneiden

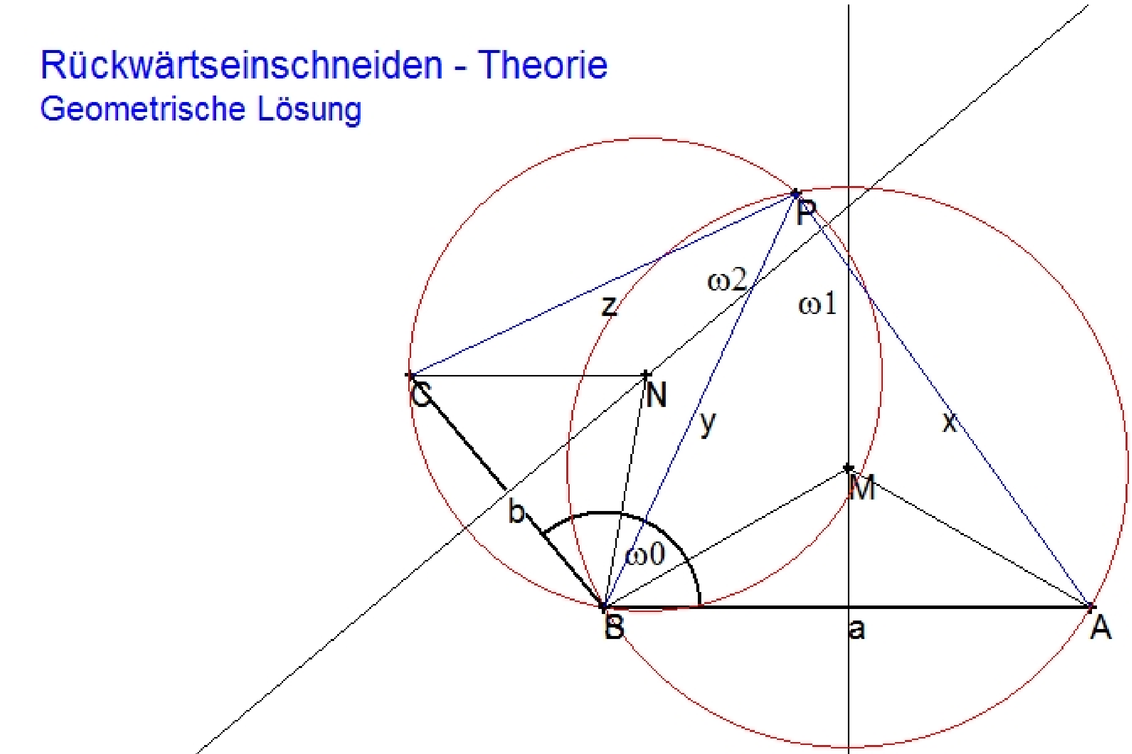
Rückwärtseinschneiden - Theorie



In einem ebenen Gelände liegen die vier Punkte P und A, B, C. Die Orte der Punkte A, B, C sind bekannt und daher auch die Größen a = AB, b = BC und w0 = w(ABC). Der Landvermesser befindet sich im Punkt P, dessen Lage nicht bekannt ist, und misst von dort die Sichtwinkel w1 = w(APB) und w2 = w(BPC).

Aus diesen Daten sollen die unbekannten Entfernungen x, y, z vom Punkt P zu den drei Punkten A, B, C ermittelt werden.

Rückwärtseinschneiden - Theorie
Geometrische Lösung

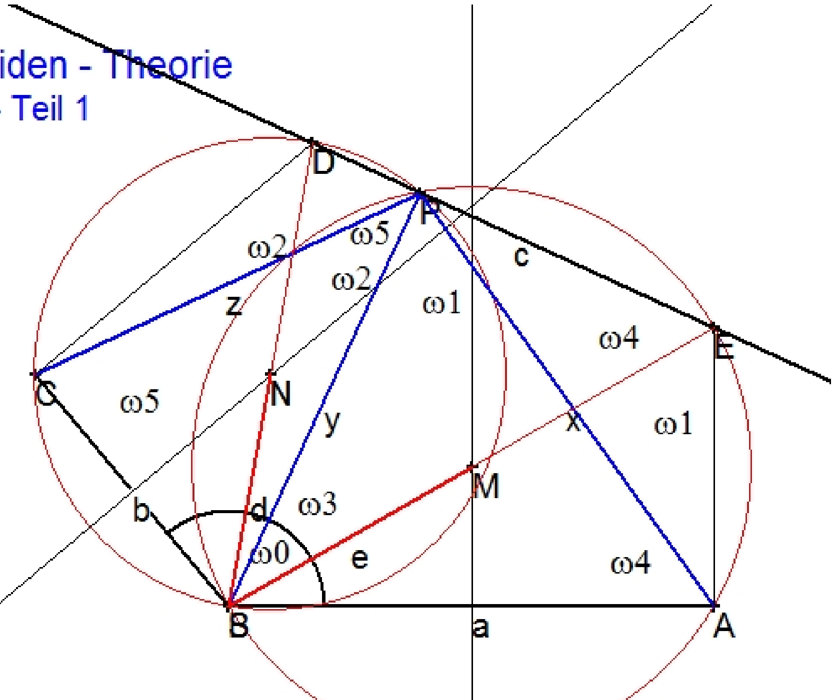


Gegeben: a=AB, b=BC, w0=w(ABC), w1=w(APB), w2=w(BPC).

[1] Standlinien a und b mit Winkel w0 im Maßstab zeichnen.
[2] Ersten Randwinkelkreis k[M,r=MA] konstruieren,
M liegt auf der Streckensymmetrale von AB, w(AMB) = 2*w1.
[3] Zweiten Randwinkelkreis k[N,r=NB] analog konstruieren.
[4] Die beiden Randwinkelkreise schneiden, ergibt Punkt P.
[5] Entfernungen x = AP, y = BP, z = CP ermitteln.

Rückwärtseinschneiden - Theorie

Arithmetische Lösung - Teil 1



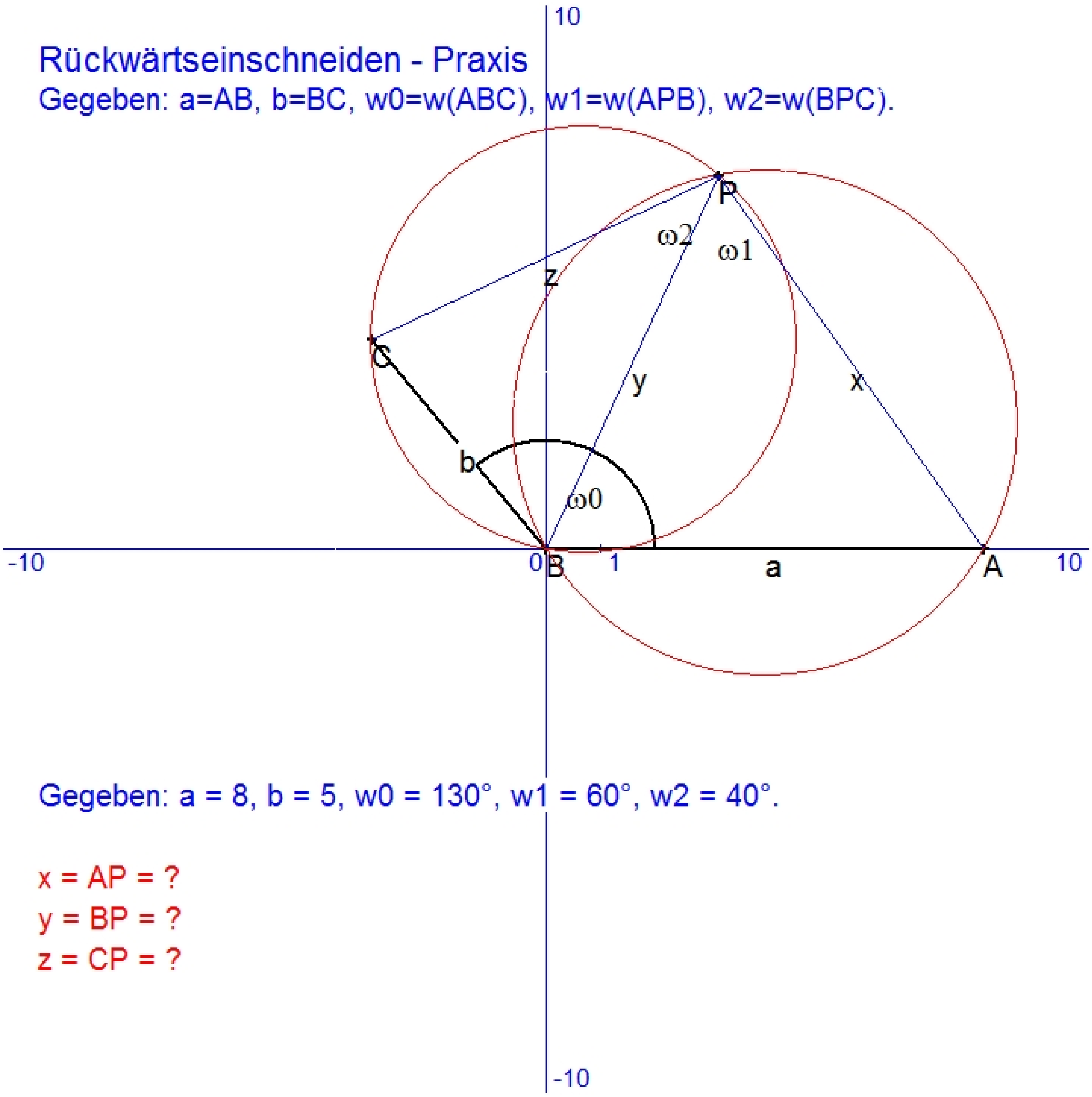
Gegeben: a=AB, b=BC, w0=w(ABC), w1=w(APB), w2=w(BPC).

Erste Standlinie a = AB.
Zweite Standlinie b = BC.
Erster Randwinkelkreis.
Zweiter Randwinkelkreis.
Die Randwinkelkreise schneiden einander im Punkt P.
Eine Normale auf die Strecke BP zeichnen.
Die Normale mit den Randwinkelkreisen schneiden.

Arithmetische Lösung - Teil 2

Gegeben: a = AB, b = BC, w0 = w(ABC), w1 = w(APB), w2 =w(BPC).

[1] Wir ziehen eine normale Gerade n auf die Strecke BP und schneiden
sie mit den beiden Randwinkelkreisen, das ergibt die Punkte D und E.
[2] Der Winkel w(AEB) ist, so wie w1, ein Randwinkel über der Sehne AB,
er ist also genau so groß wie w1. Das Dreieck BEA ist rechtwinkelig,
weil es in einem Halbkreis liegt (Thalessatz). Also ist der dritte Winkel
im Dreieck w(ABE) = 90 - w1.
[3] Die gleiche Überlegung [2] kann auch für das Dreieck BDC angestellt
werden. Somit ist der Winkel w(CBD) = 90 - w2.
[4] Aus [2] und [3] folgt für w(DBE) = w3 = w0 - (90-w1) - (90-w2).
also gilt: w3 = w0+w1+w2-180.
[5] Im Dreieck BAE gilt sin(w1) = a/(2*e) mit e = MB, also ist e = a/(2*sin(w1)).
[6] Im Dreieck BCD gilt sin(w2) = b/(2*d) mit d = NB, also ist d = b/(2*sin(w2)).
[7] Im Dreieck BDE gilt $c^2 = 4d^2 + 4e^2$ - 8*d*e*cos(w3).
[8] Im Dreieck BDE gilt sin(w4) : sin(w3) = 2*d : c, d.h. w4 = arcsin(2*d*sin(w3)/c).
[9] Im Dreieck BDE gilt w5 = 180 - w3 - w4.
[10] Im Dreieck EPB gilt sin(w4) = y/(2*e).
Also gilt: y = 2*e*sin(w4).
[11] Im Dreieck ABP gilt x : a = sin(w1+w4) : sin(w1).
Also gilt: x = a*sin(w1+w4)/sin(w1).
[12] Im Dreieck BCP gilt z : b = sin(w2+w5) : sin(w2).
Also gilt: z = b*sin(w2+w5)/sin(w2).



<u>Lösung:</u>

AP = x = 8.40 km
BP = y = 7.54 km
CP = z = 7.04 km

SCHWINGUNGEN

Viele Schwingungsvorgänge in der Natur und in der Technik können mit Hilfe der Sinusfunktion beschrieben werden, beispielsweise die Wellen des Wassers, die Dichteschwingungen der Luft oder die Ausschläge eines Pendels.

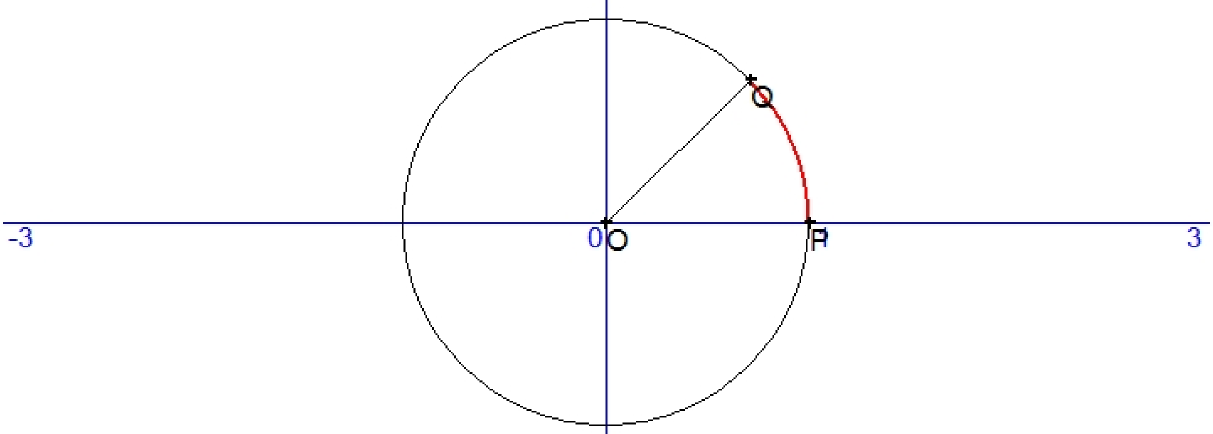
Solche Schwingungsvorgänge können sich auch überlagern. Bei dieser so genannten Interferenz entstehen dann neuartige Schwingungen. Ein Sonderfall sind Schwebungen, bei welchen zwei Schwingungen mit hohen, aber wenig unterschiedlichen Frequenzen sich überlagern.

Weil alle Schwingungsvorgänge in einem Medium erfolgen, werden sie auf Grund der Reibung gedämpft. Daher muss bei ungedämpften Schwingungen dauernd Energie zugeführt werden - beispielsweise bei einer Schaukel. Zur Beschreibung von gedämpften Schwingungen wird zusätzlich zu der Sinusfunktion auch noch die Exponentialfunktion verwendet.

(1) Die Sinusfunktion y = sin(x)

Das Bogenmaß eines Winkels

Wir zeichnen einen Winkel in der Koordinatenebene. Der Scheitel liegt im Koordinatenursprung O und ein Schenkel auf der x-Achse. Wir schneiden nun den zweiten Winkelschenkel mit dem Einheitskreis mit Mittelpunkt O und Radius r = 1 cm. Der Winkel w wird im Gradmaß (°) gemessen. Daneben gibt es aber auch das Bogenmaß.



Einem vollen Drehwinkel von 360° entspricht der Umfang U = 2*¶.
Einem Grad (1°) entspricht ein Bogen von U/360 cm Länge und den w Graden entspricht der Bogen PQ von b = (U/360)*w = (2*¶/360)*w, also von ¶*w/180 cm Länge. Für den Winkel w mit der Bogenlänge 1 gilt: 1 = ¶*w/180° und w = 180°/¶ = 57.30°. Diesem Winkel w wird nun das Bogenmaß von 1 Radiant (rad) zugeordnet.

Der Winkel w = 45° hat das Bogenmaß von ¶ *45 / 180 = 0.79 rad.

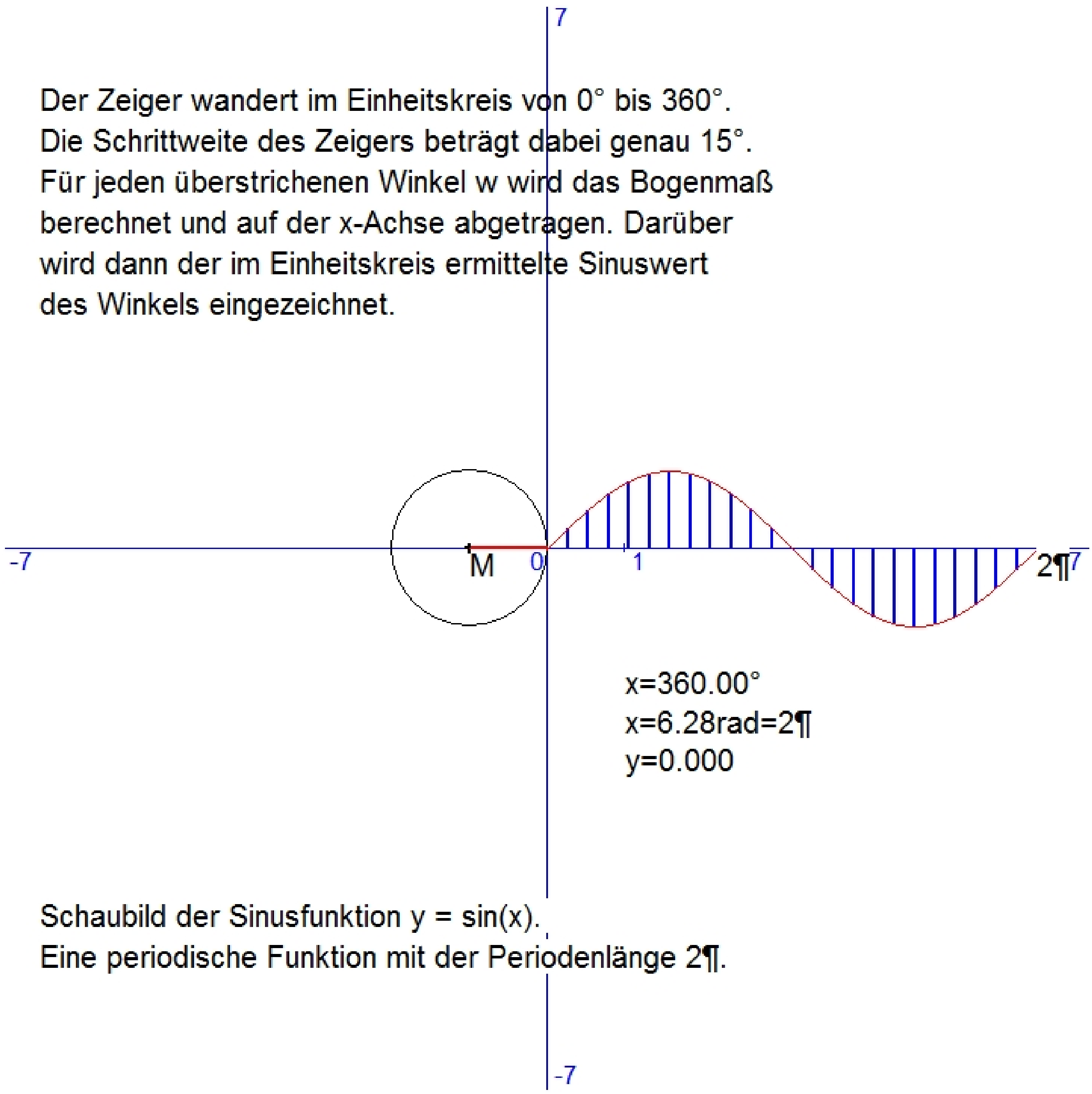
Der Sinus eines Winkels

Um den Sinuswert eines Winkels w zu erhalten, müssen wir seinen Schenkel mit dem Einheitskreis schneiden, und vom Schnittpunkt P die y-Koordinate bestimmen. Diese nennt man dann den Sinuswert des Winkels: sin(w) = y.

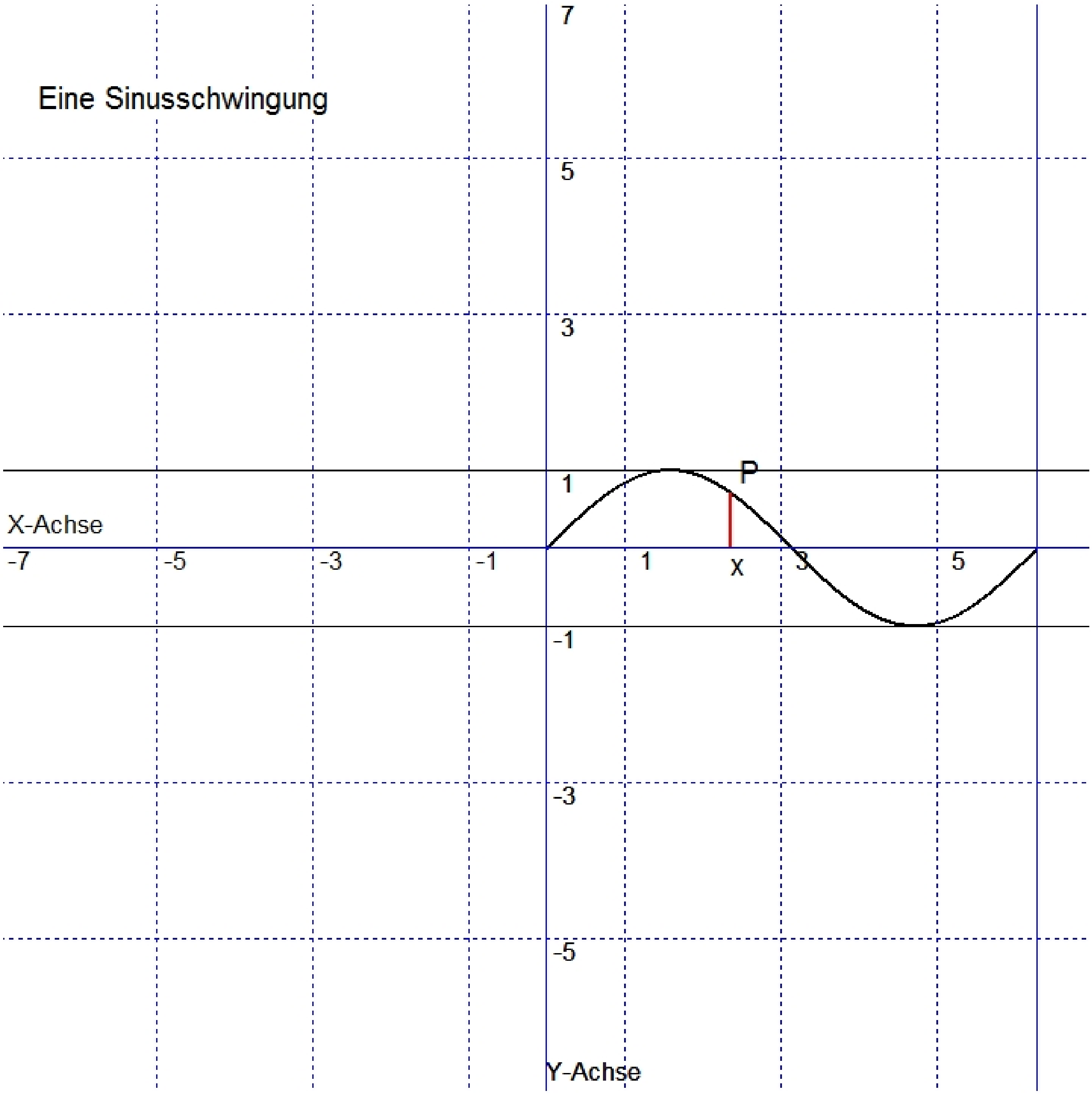
Winkel w = 60°, sin(w) = 0.87

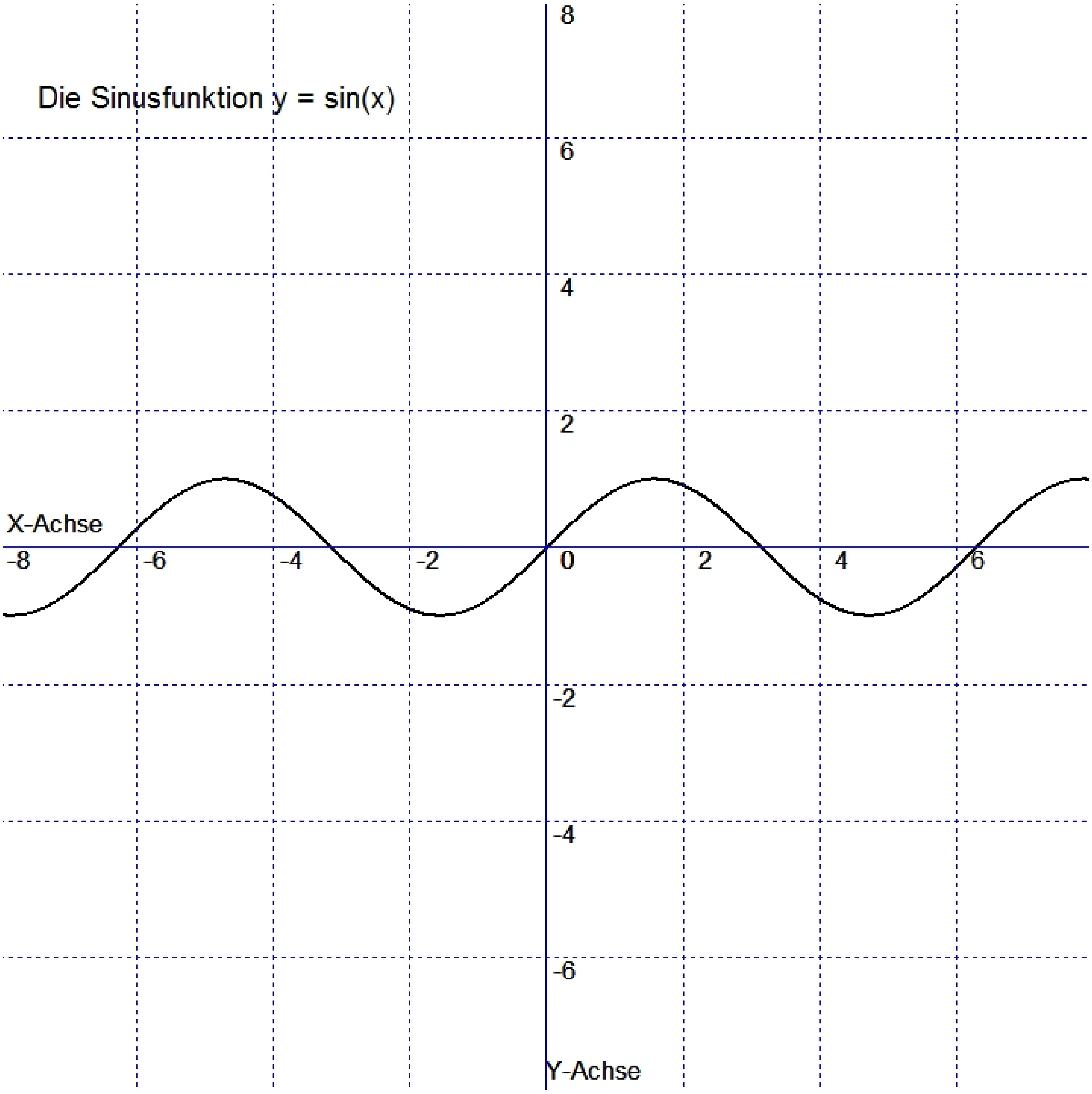
Auf diese Weise wird jedem Winkel w von 0° bis 360° eindeutig eine reelle Zahl zwischen -1 und +1 zugeordnet (Winkelfunktion). Auf der folgende Seite wird die Sinusfunktion anschaulich dargestellt.
Die Winkel werden im Gradmaß oder im Bogenmaß gemessen.

Wir tragen auf der x-Achse die Winkel x im Bogenmaß auf, d.h. dem Intervall (0°;360°) entspricht (0;2π ≈ 6.28). Parallel zur y-Achse werden die entsprechenden Sinuswerte aufgetragen. Verbinden wir dann alle so gezeichneten Punkte P(x/sin(x)), dann erhalten wir das grafische Schaubild der Sinusfunktion y = sin(x). Die Sinuswerte liegen alle zwischen -1 und +1, d.h. -1 ≤ y ≤ +1.



Erweitert man den Definitionsbereich auf alle reelle Zahlen R, dann erkennt man, dass sich die Funktionswerte periodisch wiederholen: Für alle x aus R gilt $f(x + n*p) = f(x)$, wobei p die Periodenlänge und n eine beliebige ganze Zahl ist. Für die Sinusfunktion ist diese Periodenlänge $p = 2\pi \approx 6.28$.

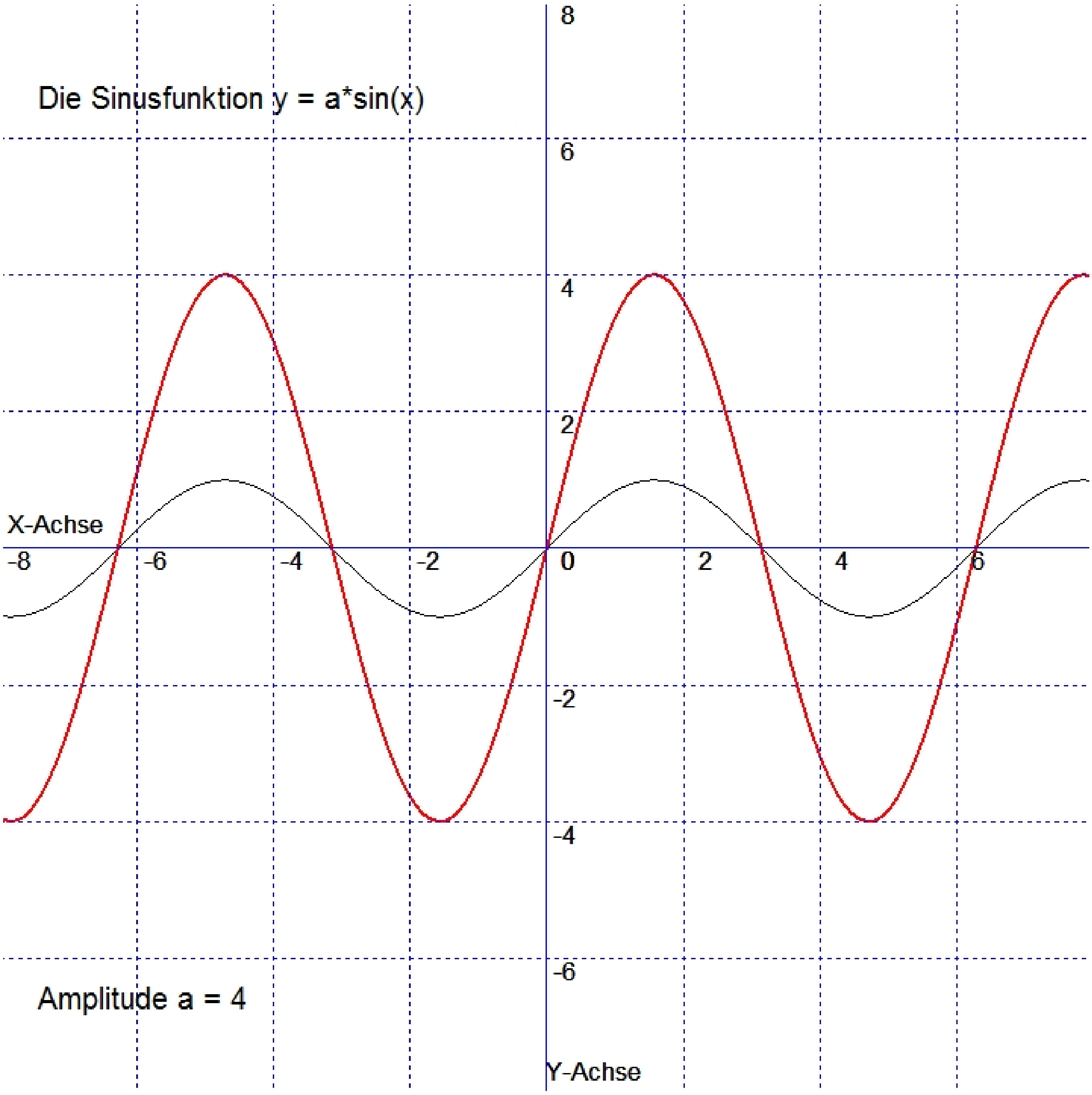




Die Sinusfunktion y = sin(x)
X-Achse
Y-Achse
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
2
4
6

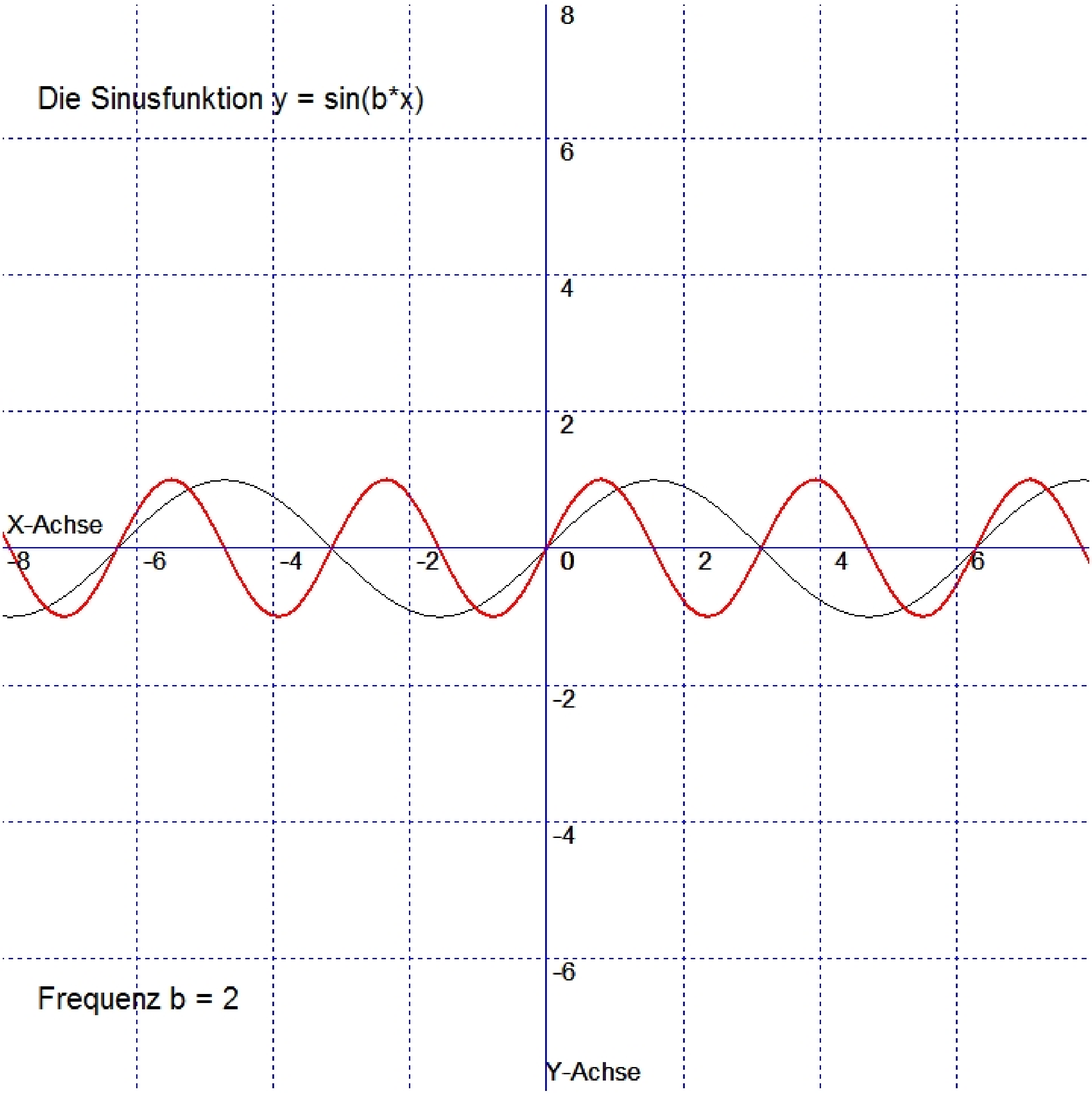
(2) Die Sinusfunktion y = a*sin(x)

Die Funktion y = a*sin(x) entsteht durch Multiplikation aller Funktionswerte mit dem konstanten Faktor a. Die Wertemenge ist somit $-a \le y \le +a$ und man nennt a auch die maximale Schwingungsweite (Amplitude).



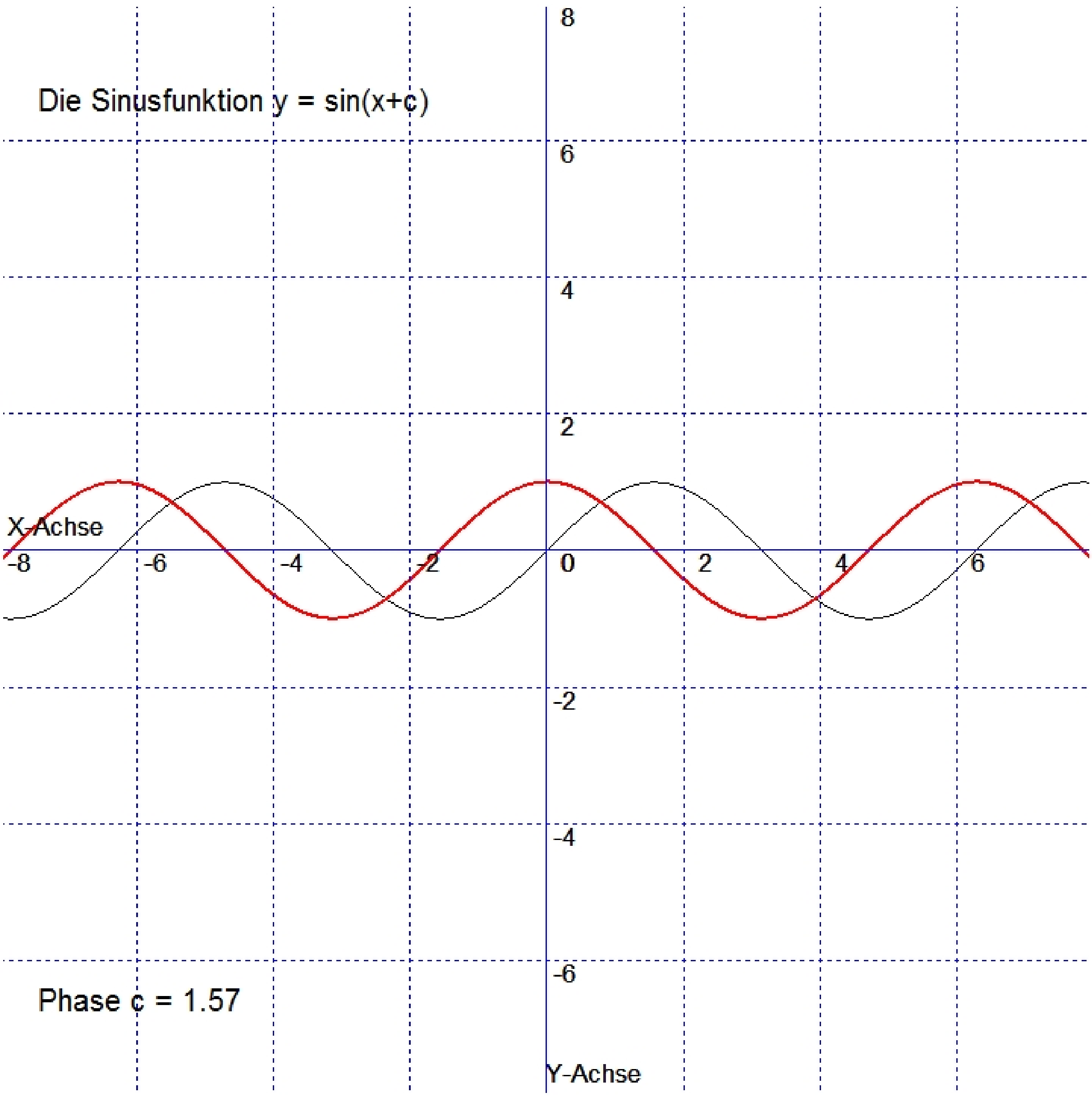
(3) Die Sinusfunktion y = sin(b*x)

Die Funktion y = sin(b*x) entsteht durch Hintereinanderausführen der linearen Funktion g(x) = b*x und der einfachen Sinusfunktion. Für b = 2 beispielsweise enthält der Definitionsbereich $0 \leq x < 2\pi$ genau zwei Perioden der Sinusfunktion, weil die Argumente b*x zwischen 0 und 4π liegen. Die Konstante b bestimmt also genau die Anzahl der Perioden im Intervall $(0;2\pi)$ und wird Frequenz der Schwingung genannt.



(4) Die Sinusfunktion y = sin(x+c)

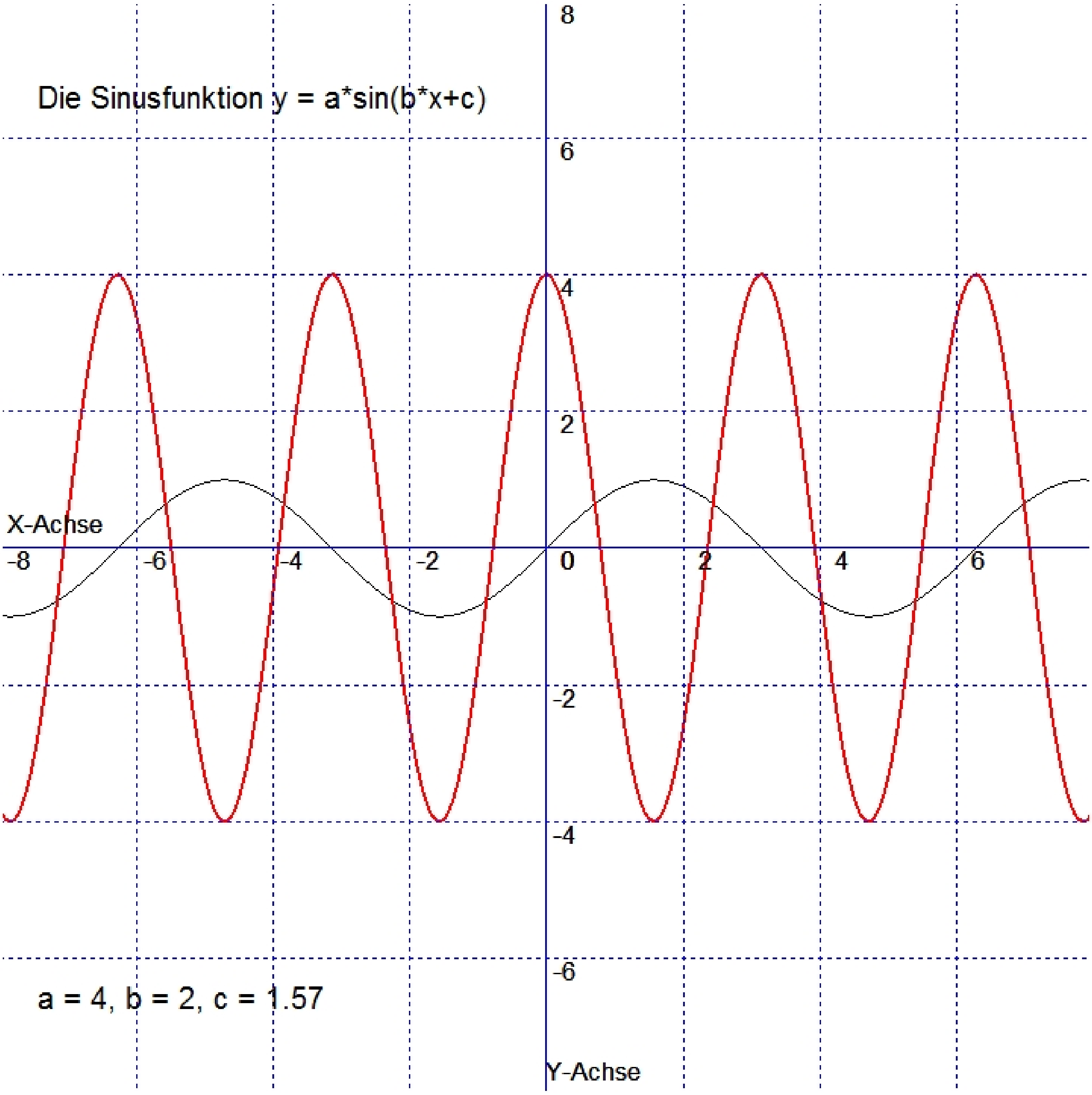
Die Funktion y = sin(x+c) entsteht durch Hintereinanderausführen der linearen Funktion g(x) = x+c und der einfachen Sinusfunktion. Dabei wird die ursprüngliche Sinusfunktion um die Konstante c längs der x-Achse verschoben. Das wird als Phasenverschiebung bezeichnet.



(5) Die Sinusfunktion y = a*sin(b*x+c)

Die Funktion y = a*sin(b*x+c) entsteht durch Hintereinanderausführen der linearen Funktion g(x) = b*x+c und der Sinusfunktion.

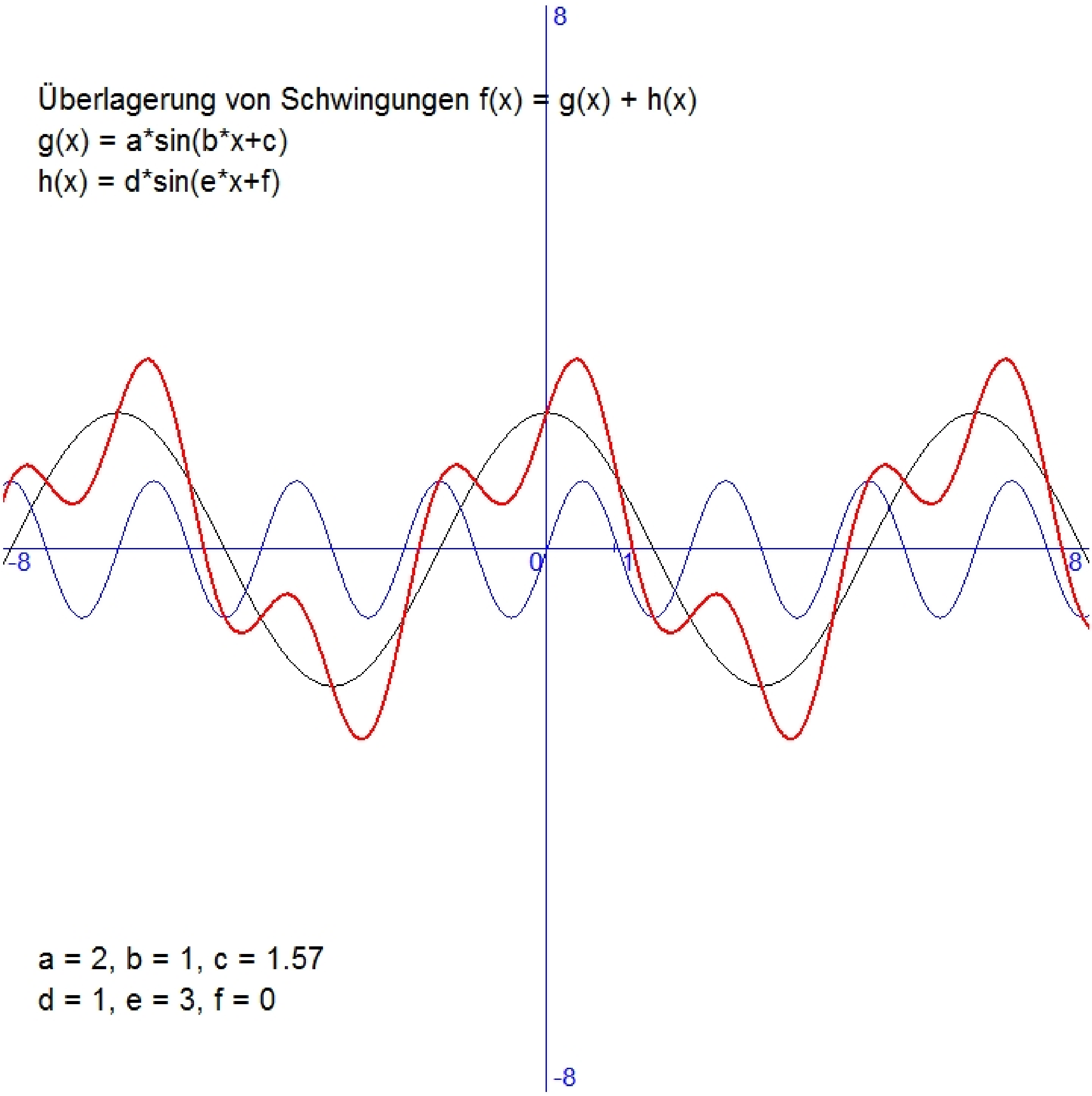
a ... Amplitude
b ... Frequenz
c ... Phasenverschiebung



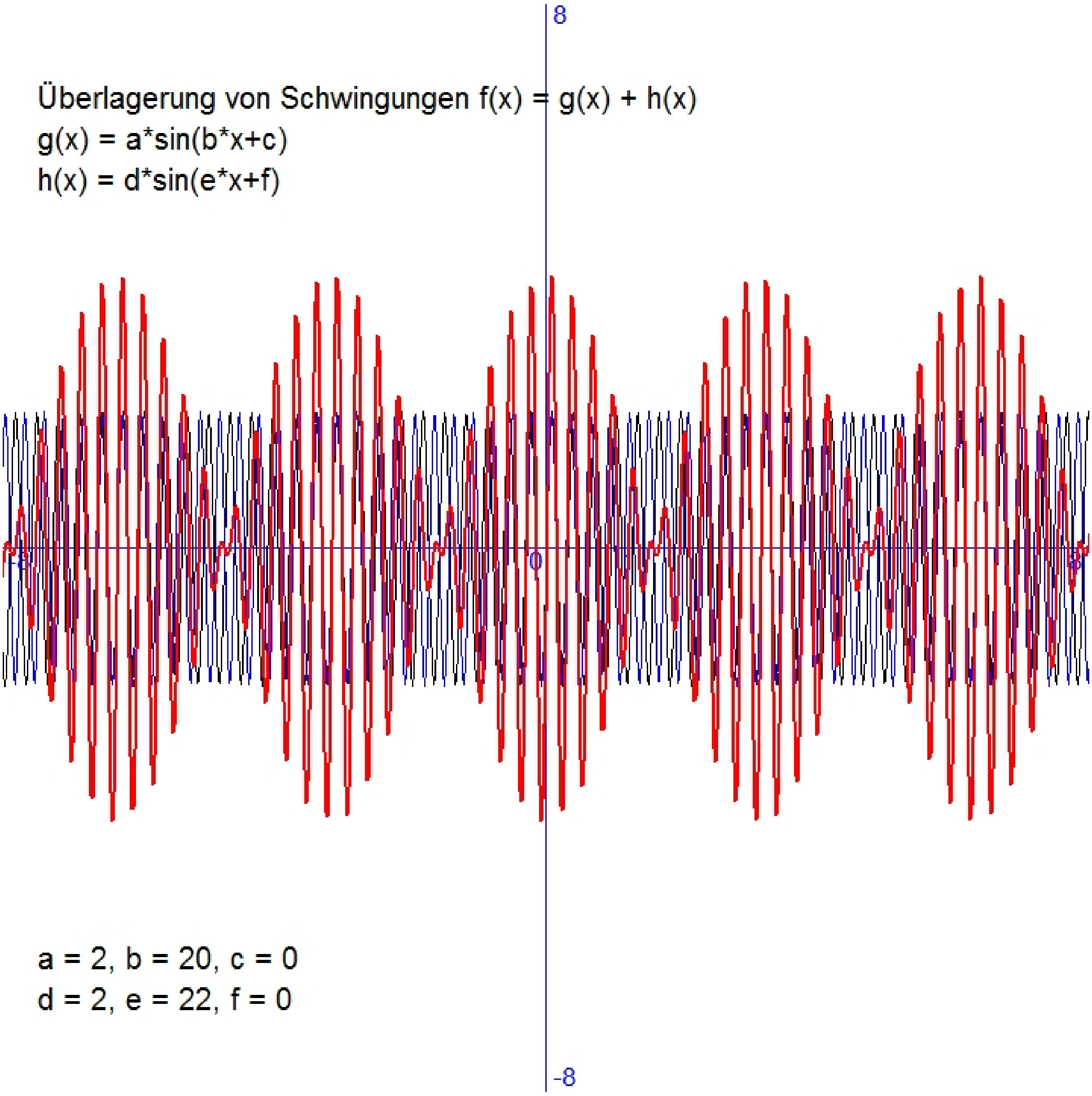
(6) Überlagerung von Schwingungen

Erste Schwingung: g(x) = a*sin(b*x+c)
Zweite Schwingung: h(x) = d*sin(e*x+f)

Summenfunktion: f(x) = g(x) + h(x)

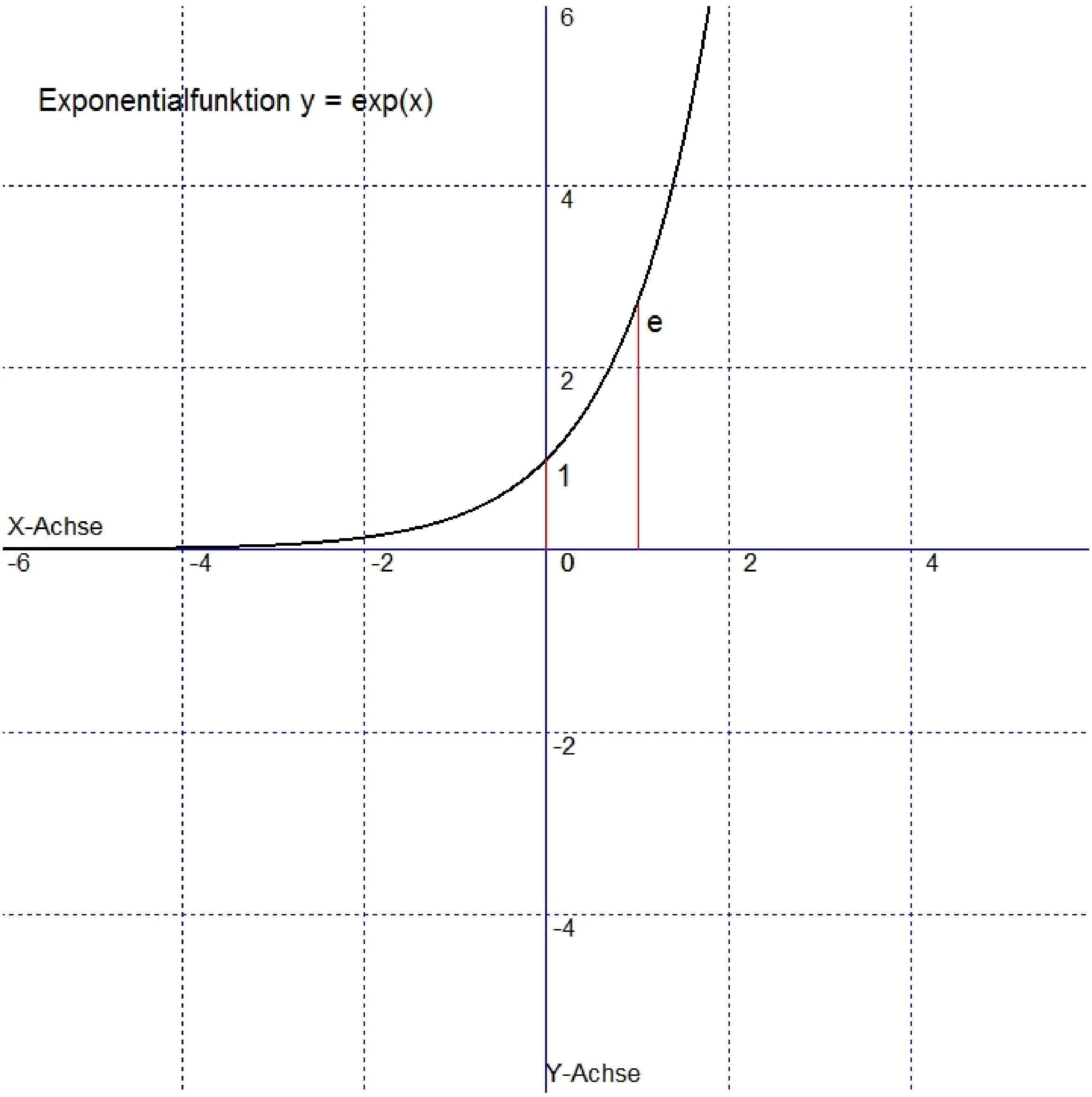


Schwebungen:



(7) Exponentialfunktion $y = \exp(x) = e^x$

Die natürliche Exponentialfunktion $y = \exp(x) = e^x$ entsteht durch Potenzierung der Eulerschen Konstanten e = 2.71828... mit den veränderlichen Hochzahlen x. Die Definitionsmenge ist die Menge aller reellen Zahlen R. Die Wertemenge enthält nur positive reelle Zahlen. Die Funktion ist stetig und streng monoton steigend. Wenn x gegen $-\infty$ strebt, dann strebt y gegen 0, d.h. die x-Achse ist eine Asymptote der Kurve.

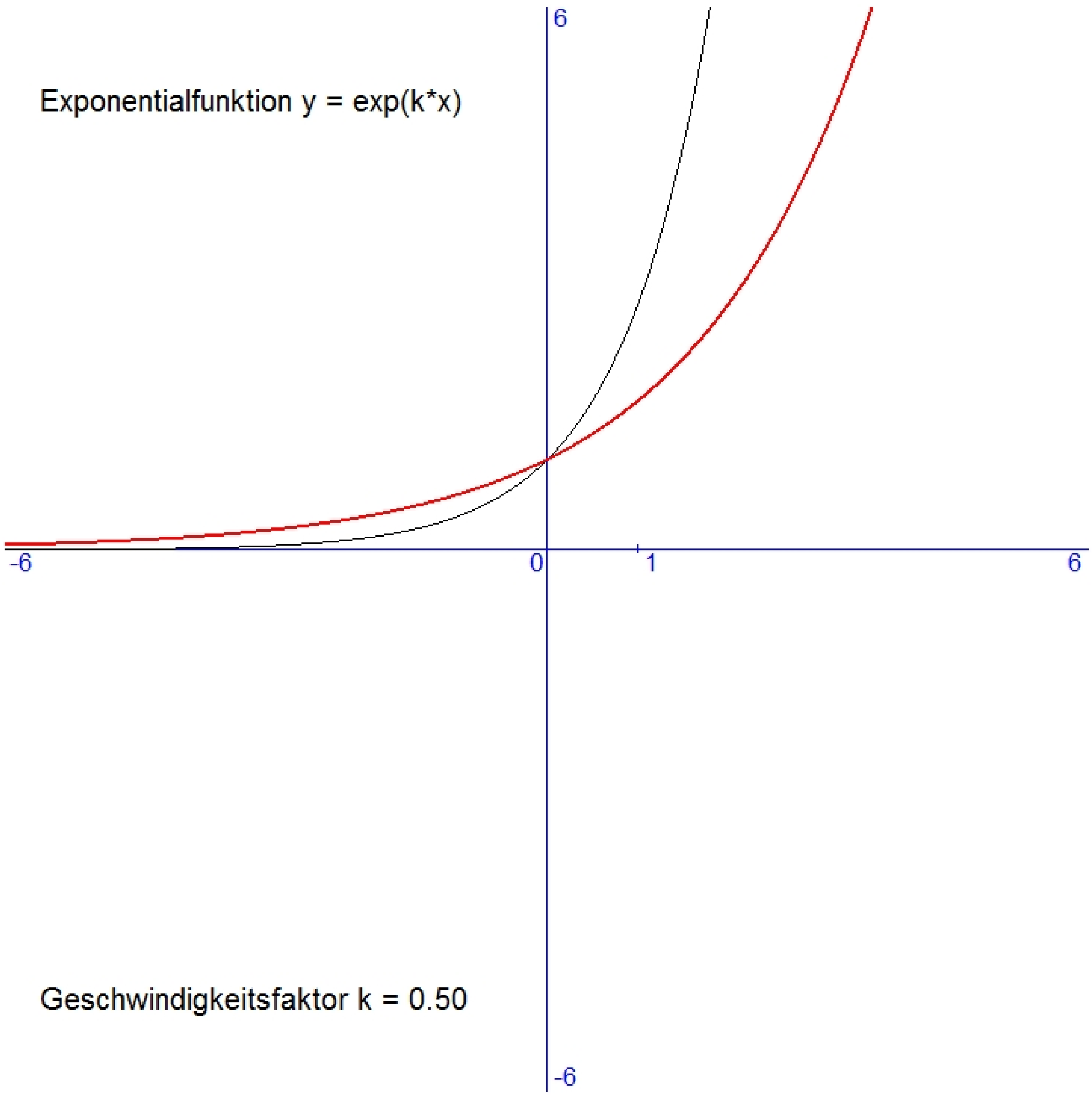


(8) Exponentialfunktion y = exp(k*x)

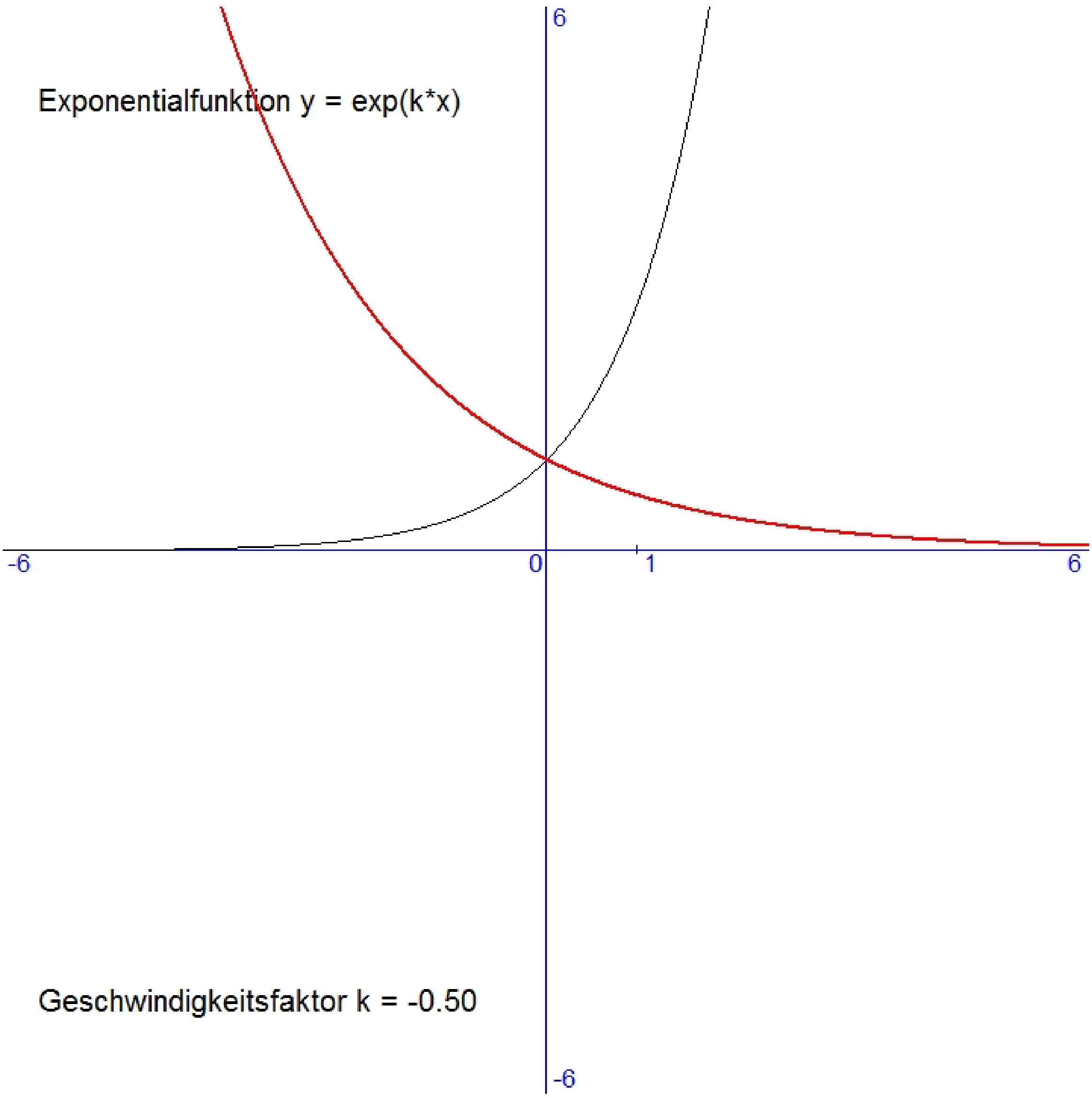
Die Funktion y = exp(k*x) entsteht durch Hintereinanderausführen der Funktion g(x) = k*x und der natürlichen Exponentialfunktion.

Für k > 0 ist die Kurve streng monoton steigend.
Für k = 0 ist die Kurve konstant (exp(0) = 1).
Für k < 0 ist die Kurve streng monoton fallend.

Der Betrag der Konstanten k bestimmt daher die Stärke der Zu- oder Abnahme und heißt daher auch Wachstumsgeschwindigkeit.



Monoton fallende Exponentialfunktion:

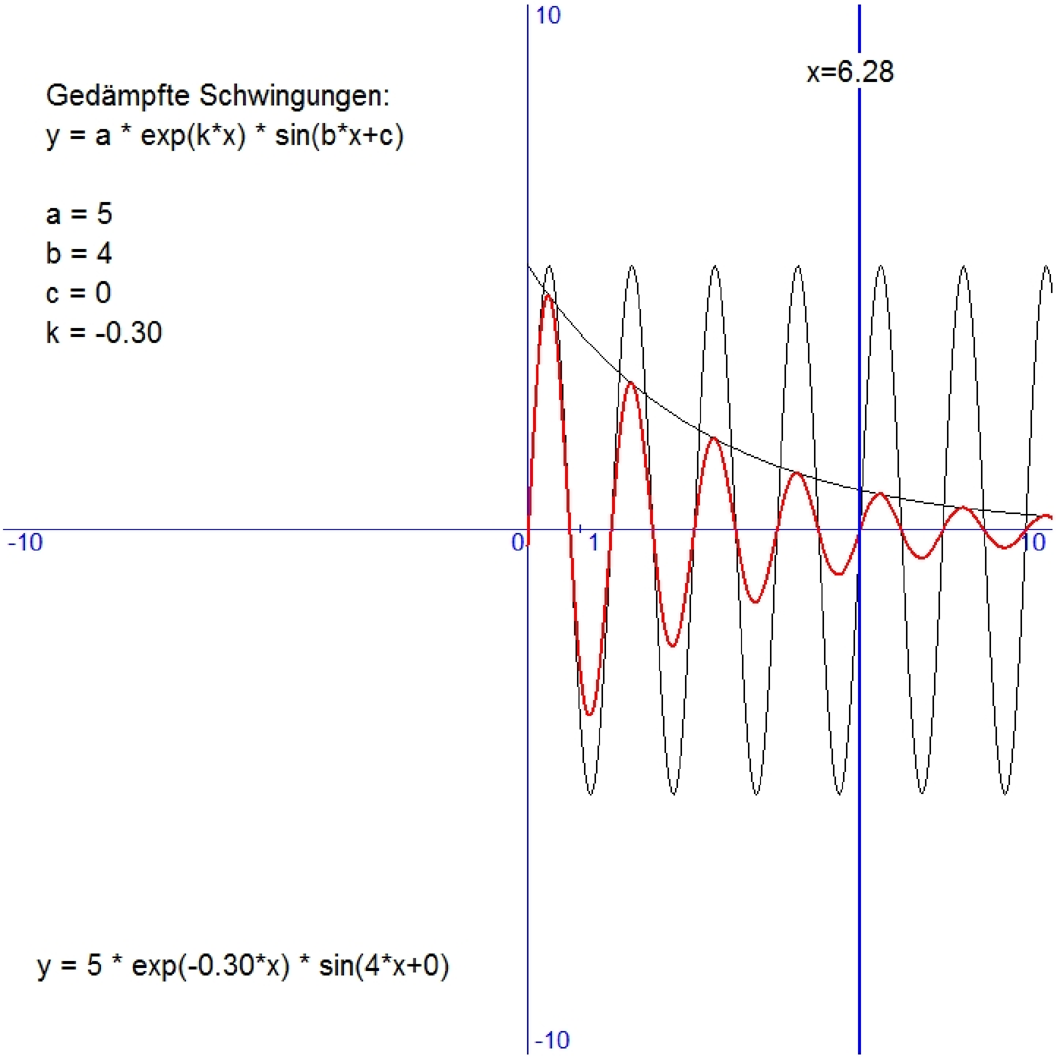


(9) Gedämpfte Schwingungen: y = a * exp(k*x) * sin(b*x+c)

Die gedämpfte Schwingung y = a * exp(k*x) * sin(b*x+c) entsteht durch die Multiplikation einer periodischen Sinusfunktion (sin) mit einer fallenden Exponentialfunktion (exp).

a ... Amplitude (maximale Schwingungsweite)
b ... Frequenz (Anzahl der Schwingungen innerhalb 2*¶)
c ... Phasenverschiebung im Bogenmaß (2*¶ = 6.2832 ... 360°)
k ... Wachstumsfaktor (k > 0) bzw. Dämpfungsfaktor (k < 0)

Hinweis: Durch geeignete Wahl der Konstanten (a, b, c, k) können ungedämpfte Schwingungen (k = 0) dargestellt und die Bedeutung von Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung gezeigt werden.



ENDE von MATHE 7