Herbert Paukert

Schulmathematik in 8 Bänden

Version 6.0, 2016

MATHE 8

Analytische Geometrie

Kegelschnittslinien

Geometrische Abbildungen

MATHE, Band 1

Arithmetik - Unterstufe

MATHE, Band 2

Geometrie - Unterstufe

MATHE, Band 3

Logik
Zahlenmengen
Algebra

MATHE, Band 4

Differenzialrechnung

MATHE, Band 5

Integralrechnung

MATHE, Band 6

Matrizenrechnung
Statistik
Wahrscheinlichkeit

MATHE, Band 7

Trigonometrie

MATHE, Band 8

Analytische Geometrie
Kegelschnittslinien
Geometrische Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

(1) Analytische Geometrie **Seite 05**

(2) Kegelschnittslinien **Seite 55**

(3) Geometrische Abbildungen **Seite 85**

Hinweis: In Dezimalzahlen wird anstelle eines Kommas ein Dezimalpunkt geschrieben.

Hinweis: Auf seiner Homepage ***www.paukert.at*** stellt der Autor viele weitere Lernhilfen aus unterschiedlichen Fachgebieten zur Verfügung.

ANALYTISCHE GEOMETRIE

(1) Grundrechenoperationen mit Vektoren 06

(1.1) Definition von Vektoren 06
(1.2) Addition von Vektoren 08
(1.3) Subtraktion von Vektoren 09
(1.4) Multiplikation mit einer Zahl 10
(1.5) Lineare Kombinationen 12
(1.6) Orthonormierte Basissysteme 14

(2) Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Spatprodukt 15

(2.2) Skalares Produkt 15
(2.3) Vektorielles Produkt (Kreuzprodukt) 18
(2.4) Spatprodukt 19

(3) Gerade in der Ebene 20

(3.1) Eine Gerade in der Ebene 20
(3.2) Zwei Gerade in der Ebene 26

(4) Vier merkwürdige Punkte im Dreieck 31

(5) Ebene und Gerade im Raum 37

(5.1) Eine Ebene im Raum 37
(5.2) Eine Gerade im Raum 40

(6) Lineare Gleichungssysteme 42

(6.1) Lineare Systeme in der Ebene 42
(6.2) Lineare Systeme im Raum 42
(6.3) Die Cramersche Regel 45

(7) Sechs Aufgaben der Analytischen Geometrie 48

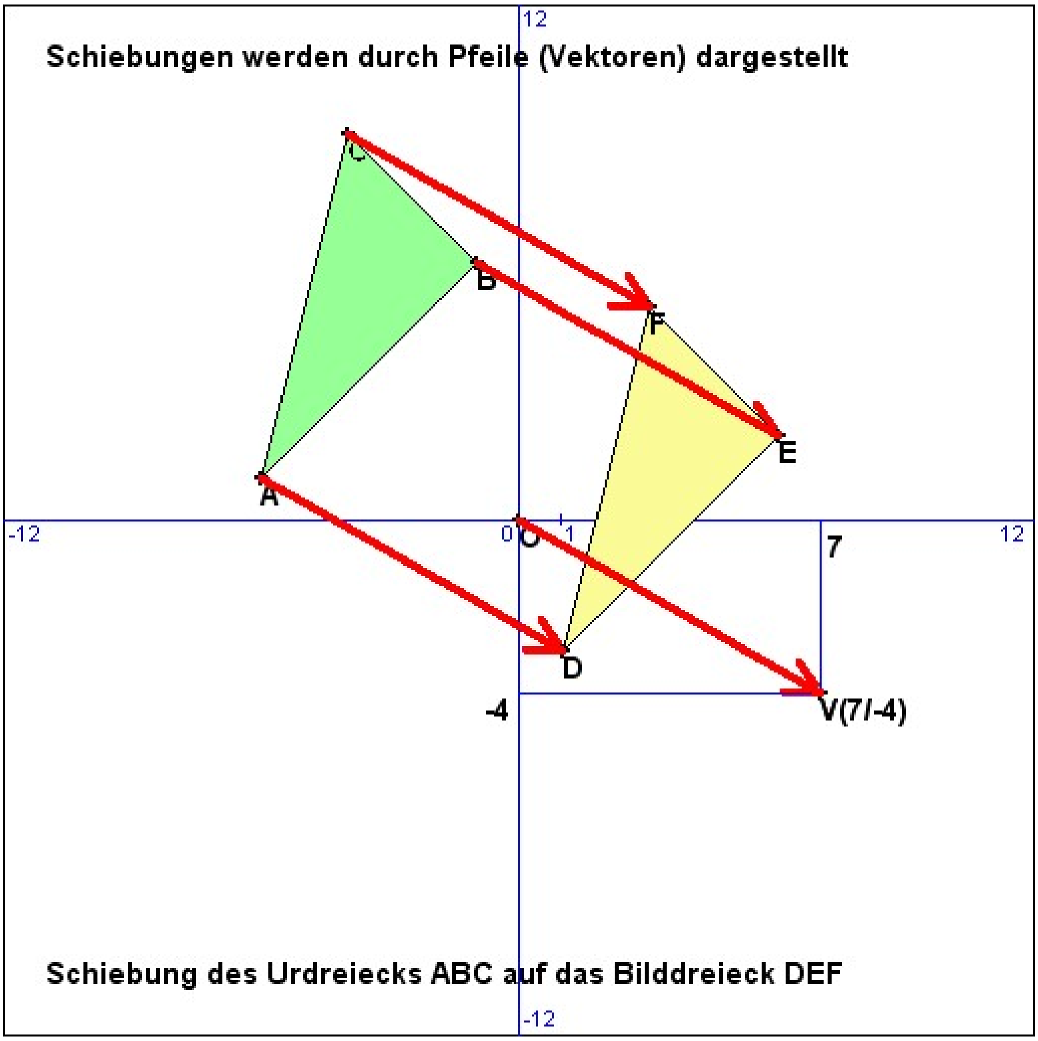
(7.1) Abstand zweier Punkte 48
(7.2) Schnitt von Ebene und Gerade 49
(7.3) Abstand von Punkt und Ebene 50
(7.4) Abstand von Punkt und Gerade 51
(7.5) Zwei Gerade im Raum 53
(7.6) Schnittwinkel von Ebenen 54

(1) Grundrechenoperationen mit Vektoren

(1.1) Definition von Vektoren

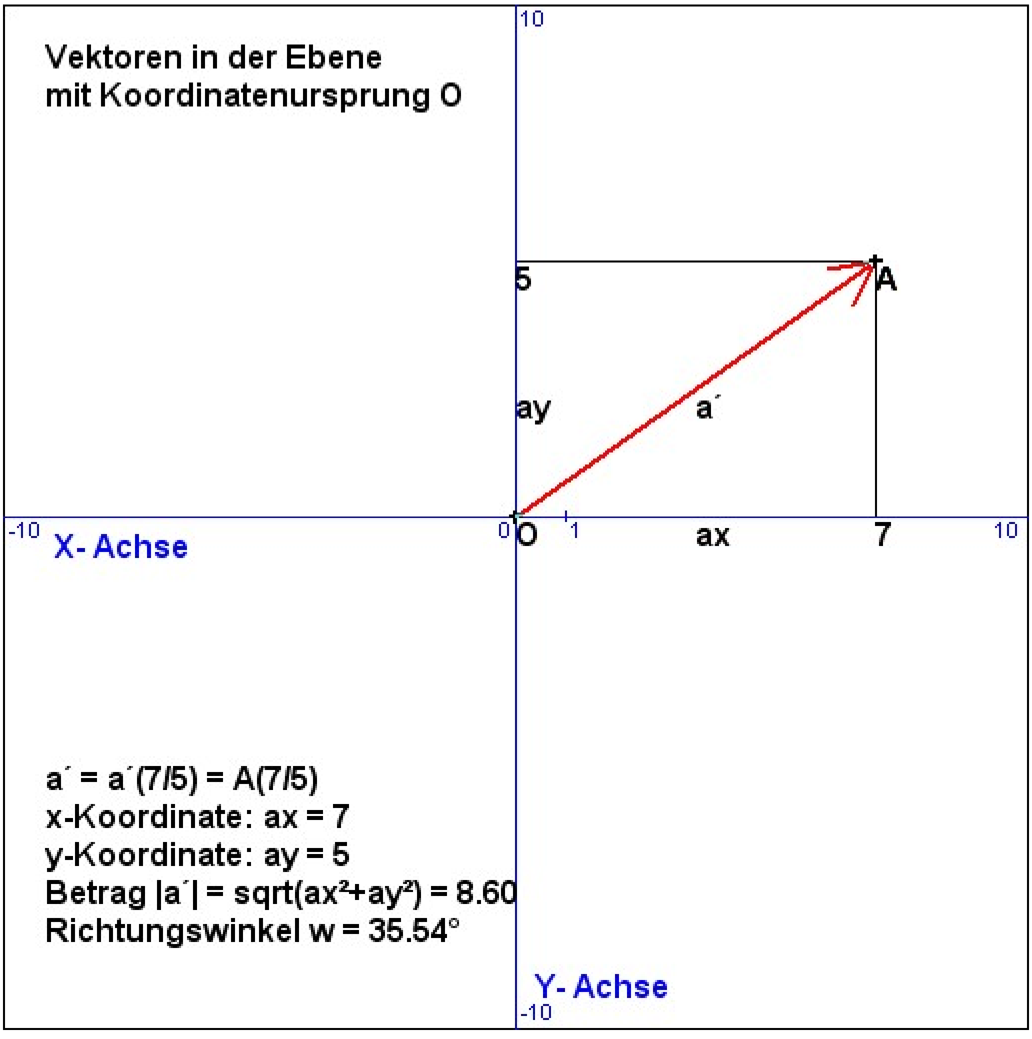
Bei einer Bewegung eines Objektes werden alle Punkte des Objektes (Urpunkte) eindeutig wieder auf Punkte (Bildpunkte) abgebildet. Dadurch entsteht ein Bild des Objektes.

Die Schiebung ist die einfachste Bewegung. Dabei werden die Punkte um die gleiche Länge und in die gleiche Richtung verschoben. Solche Schiebungen werden anschaulich mit Pfeilen dargestellt. Jeder Pfeil ist durch seine Länge und Richtung gegeben. Die Menge aller gleich gerichteter und gleich langer Schiebepfeile nennt man einen Vektor. Ein solcher Schiebepfeil heißt dann ein Vertreter des Vektors. Der Urpunkt bei einer Schiebung heißt Fuß und der Bildpunkt heißt Kopf des entsprechenden Schiebepfeiles.



Vektoren werden hier mit Kleinbuchstaben mit einer hochgestellten Pfeilspitze oder einfach nur mit Großbuchstaben (so wie Punkte) bezeichnet (a´, b´, c´, . . .).

Um Vektoren festzulegen, müssen Länge und Richtung bestimmt werden. Dazu braucht man ein Koordinatensystem. Dann nimmt man vom Vektor a´ jenen Vertreter, dessen Fuß der Koordinatenursprung O ist und dessen Kopf der Punkt A ist. Man schreibt a´ = OA´ oder auch kurz a´ = A. Den Pfeil OA´ nennt man den Ortsvektor des Punktes A.



Richtung und Länge des Vektors a´ sind durch die Koordinaten (a_x/a_y) des Kopfpunktes A bestimmt. Der Betrag des Vektors a´ ist die Länge von OA´ und wird mit |a´| bezeichnet. Die Richtung des Vektors kann auch mit dem Richtungswinkel w zwischen x-Achse und OA´ beschrieben werden. Wegen des Lehrsatzes von Pythagoras gilt für den Betrag des Vektors $|a´|^2 = a_x^2 + a_y^2$. Für Richtungswinkel w gilt: $\tan(w) = a_y:a_x$

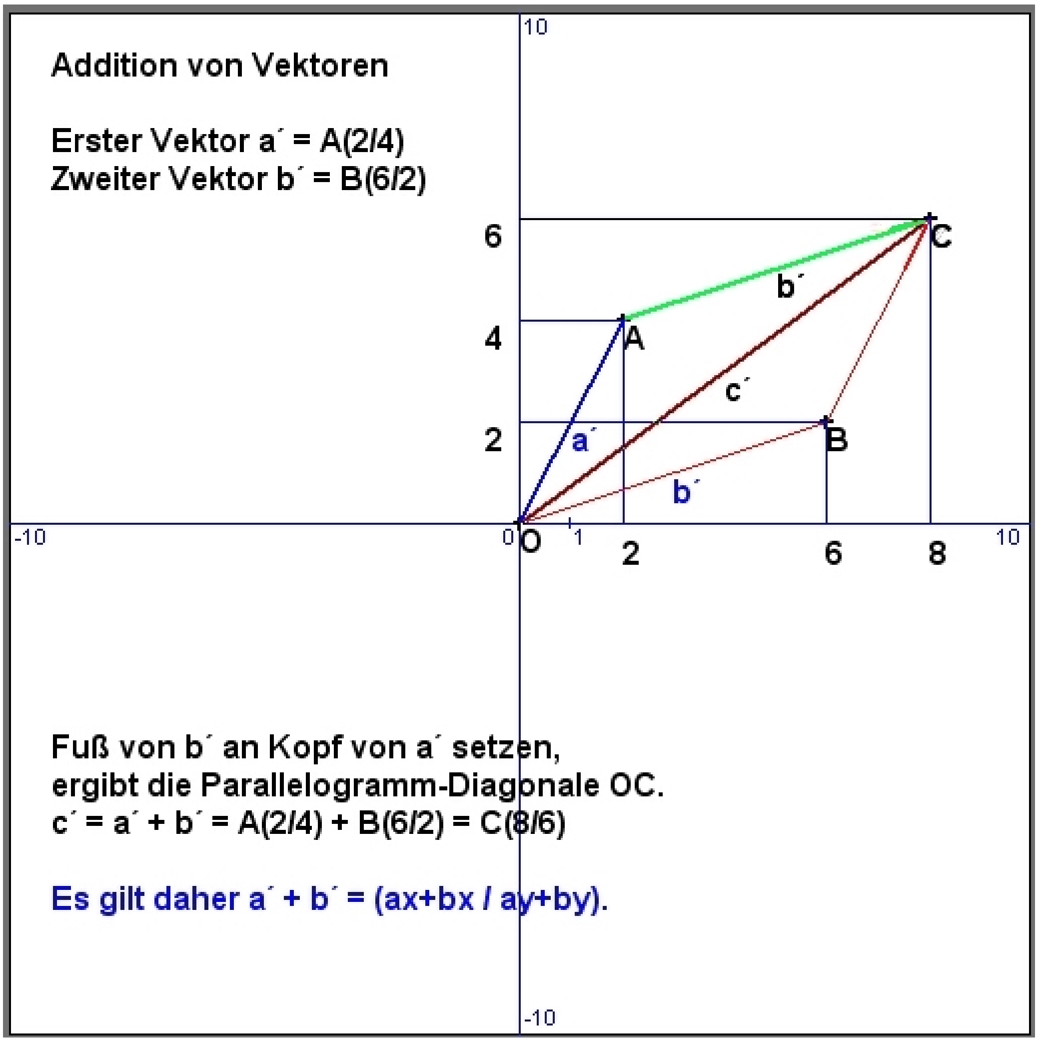
(1.2) Addition von Vektoren

Schiebungen (Vektoren) können hintereinander ausgeführt werden. Dabei wird der Fußpunkt des zweiten Schiebepfeiles an den Kopfpunkt des ersten Schiebepfeiles gesetzt. Merkregel "Fuß bei Kopf". Verkettet man nun zwei Schiebepfeile a´ und b´ in solcher Weise, dann erhält man einen neuen Schiebepfeil c´ = a´ + c´, der auch Summenpfeil oder Summenvektor genannt wird.

Wenn a´= (a_x/a_y) und b´= (b_x/b_y) zwei Vektoren sind, dann gilt für die Koordinaten des Summenvektors c´ = a´+ b´:

$c_x = (a_x + b_x)$
$c_y = (a_y + b_y)$

$(a_x/a_y) + (b_x/b_y) = (a_x + b_x/a_y + b_y)$



Ortsvektor OC´ = Ortsvektor OA´ + Verbindungsvektor AC´

(1.3) Subtraktion von Vektoren

Der Gegenvektor -a´ zu einem Vektor a´ ist jener Vektor, der den gleichen Betrag wie a hat, d.h. |-a´| = |a´|. Doch zeigt -a´ in die entgegengesetzte Richtung von a. Für die Koordinaten des Gegenvektors gilt -a´ = ($-a_x$/$-a_y$).

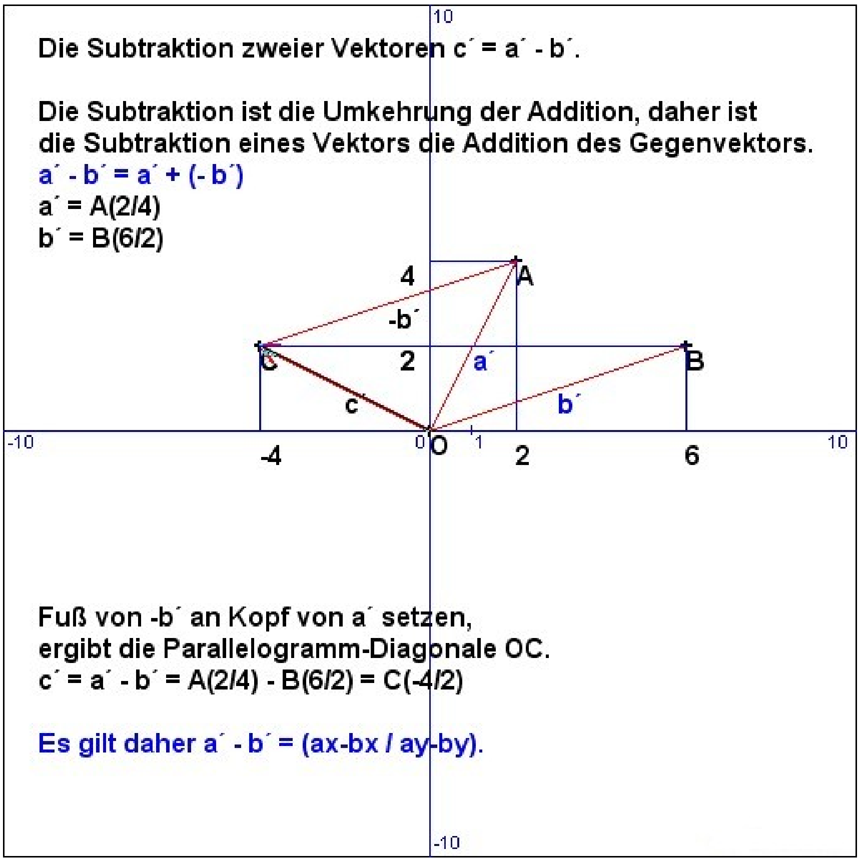
Der Nullvektor o´ ist ein Vektor mit der Länge 0 (|o´| = 0). Setzt man den Gegenvektor -a´ mit seinem Fuß an den Kopf des Vektors a´, dann erhält man den Nullvektor o´. Also gilt a´ + (-a´) = o´.

Die Subtraktion eines Vektors c´ = a´ - b´ entspricht der Addition mit seinem Gegenvektors c´ = a´ + (-b´), so wie bei Zahlen auch.

a´ - b´ = a´ + (-b´)

Wenn a´= (a_x/a_y) und b´= (b_x/b_y) zwei Vektoren sind, dann gilt für die Koordinaten des Differenzvektors c´ = a´- b´:

$c_x = (a_x + (-b_x)) = (a_x - b_x)$
$c_y = (a_y + (-b_y)) = (a_y - b_y)$



Ein Verbindungsvektor ist immer die Differenz der Ortsvektoren. AC´= OC´- OA´ (Merkregel: "Kopf weniger Fuß"), weil OA´+ AC´= OC´.

Zusammenfassung

Summenvektor: a´ + b´ = $(a_x + b_x/a_y + b_y)$
Gegenvektor: -a´ = $(-a_x/-a_y)$
Differenzvektor: a´ - b´ = $(a_x - b_x/a_y - b_y)$

Für die Addition von Vektoren gelten folgende Rechenregeln, die mit Hilfe der Verkettung von Pfeilen anschaulich bewiesen werden können.

(1) Assoziativgesetz a´ + (b´ + c´) = (a´ + b´) + c´
(2) Neutrales Element (Nullvektor) a´ + o´ = a´
(3) Inverses Element (Gegenvektor) a´ + (-a´) = o´
(4) Kommutativgesetz a´ + b´ = b´ + a´

Die Vektoren bilden daher eine additive kommunikative Gruppe.

Alle hier hergeleiteten Gesetze und Beweise gelten nicht nur für Vektoren in der Ebene, sondern natürlich auch für Vektoren im Raum. Zu den beiden x- und y-Koordinaten kommt dann noch eine z-Koordinate dazu.

(1.4) Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Es sei k eine reelle Zahl und a´ ein beliebiger Vektor. Das Produkt k*a´ ist ein Vektor b´, dessen Länge das |k|-fache von a´ beträgt, und dessen Richtung vom Vorzeichen von k abhängt.

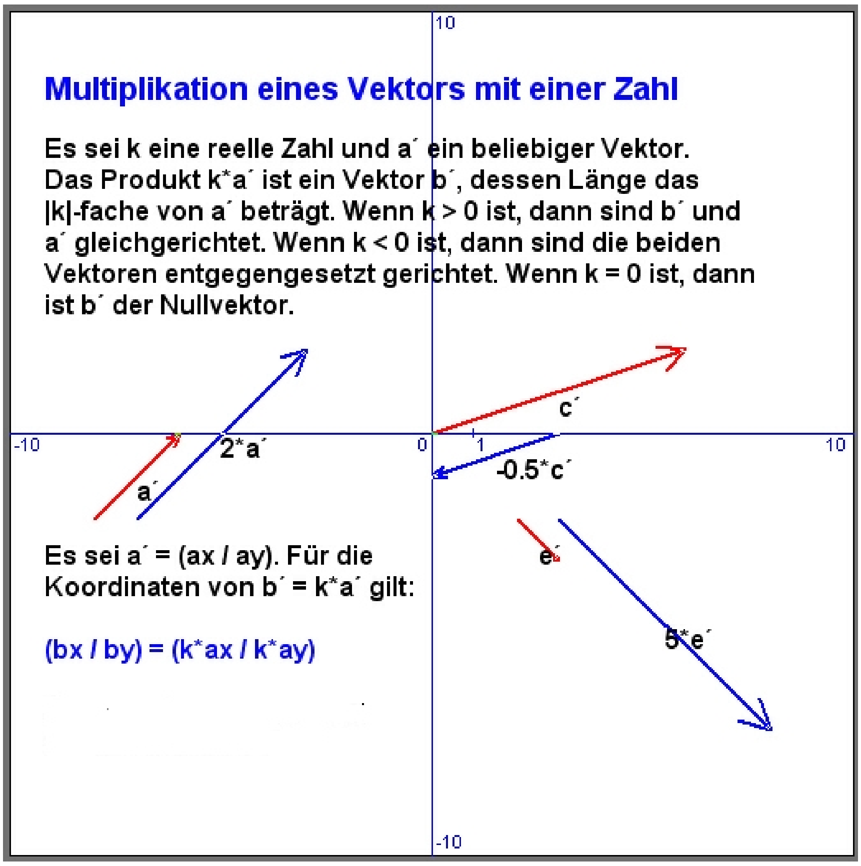
Für die Multiplikation b´ = k*a´ mit einer Zahl k gilt:
$b_x = k*a_x$
$b_y = k*a_y$

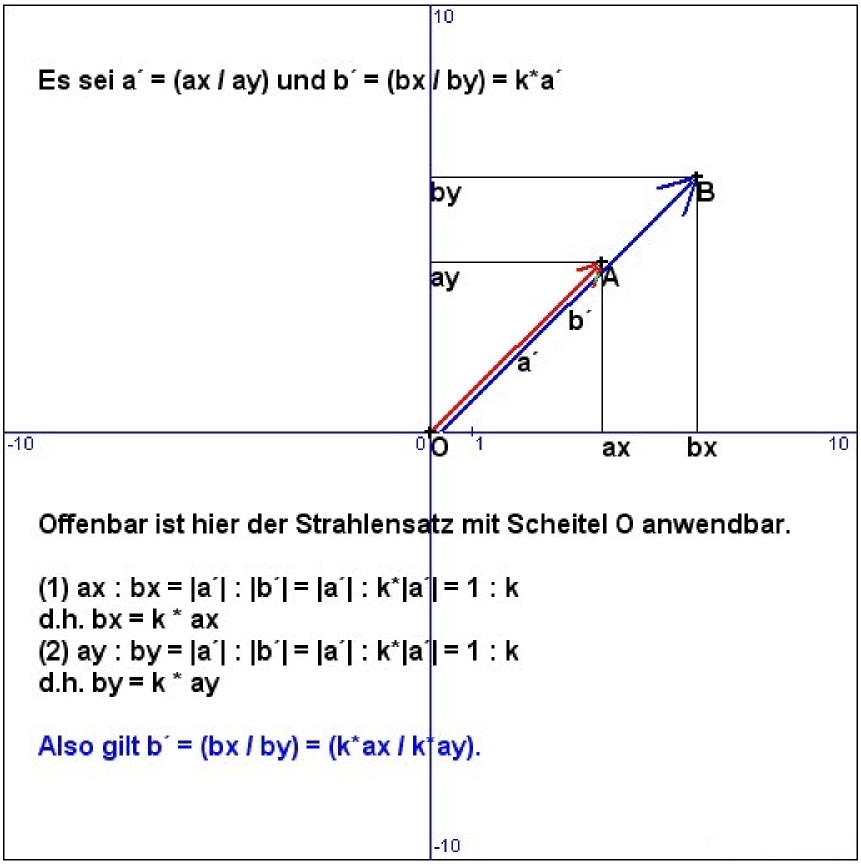
$k*(a_x/a_y) = (k*a_x/k*a_y)$

Diese Formeln gelten, weil für die Streckung von a´ auf b´= k*a´ der Strahlensatz im Koordinatensystem angewendet werden kann. Siehe dazu die nachfolgenden Grafiken.

Zusätzlich gilt das Distributivgesetz: k*(a´+ b´) = k*a´ + k*b´. Das ist direkt ersichtlich an den Koordinatenformeln.

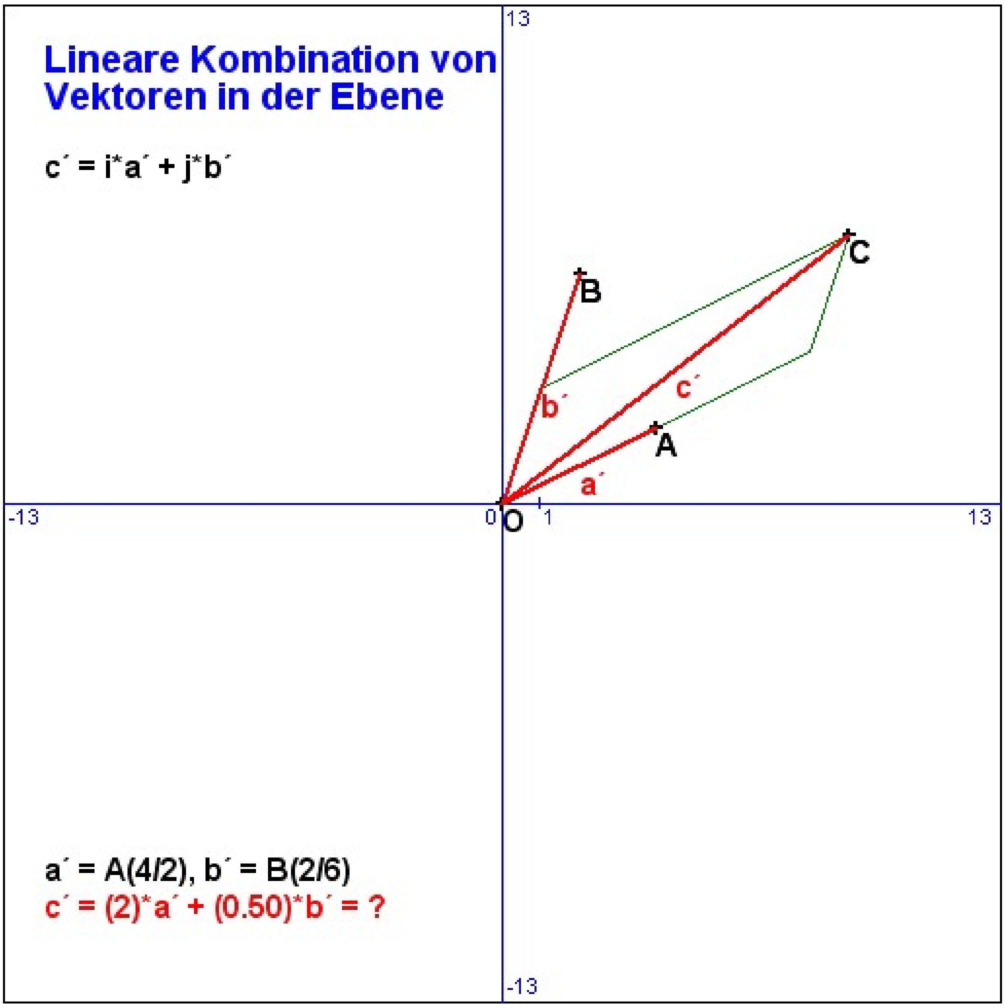
Ein Spezialfall ist der normierte Vektor e´ = (1/|a´|)*a´. Er hat die gleiche Richtung wie der Vektor a´, jedoch die Länge 1.
Z.B.: a´=(4/3), |a´| = sqrt(4^2+3^2) = 5, e´= 0.2*(4/3) = (0.8/0.6)


10
Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl
Es sei k eine reelle Zahl und a´ ein beliebiger Vektor.
Das Produkt k*a´ ist ein Vektor b´, dessen Länge das
|k|-fache von a´ beträgt. Wenn k > 0 ist, dann sind b´ und
a´ gleichgerichtet. Wenn k < 0 ist, dann sind die beiden
Vektoren entgegengesetzt gerichtet. Wenn k = 0 ist, dann
ist b´ der Nullvektor.
c´
-10
2*a´
0
1
10
-0.5*c´
a´
e´
Es sei a´ = (ax / ay). Für die
Koordinaten von b´ = k*a´ gilt:
5*e´
(bx / by) = (k*ax / k*ay)
-10


10
Es sei a´ = (ax / ay) und b´ = (bx / by) = k*a´
by
B
ay
A
b´
a´
-10
0
O
1
ax
bx
10
Offenbar ist hier der Strahlensatz mit Scheitel O anwendbar.
(1) ax : bx = |a´| : |b´| = |a´| : k*|a´| = 1 : k
d.h. bx = k * ax
(2) ay : by = |a´| : |b´| = |a´| : k*|a´| = 1 : k
d.h. by = k * ay
Also gilt b´ = (bx / by) = (k*ax / k*ay).
-10

(1.5) Lineare Kombinationen

Gegeben ist ein 2- oder 3-dimensionaler Punkt- und Vektorraum. Den zusammengesetzten Vektor v´ = r*a´ + s*b´ + t*c´ + ... nennt man eine Linearkombination von N Vektoren a´, b´, c´, ... mit reellen Zahlenkonstanten (Koeffizienten) r, s, t, ...



Beispiel in der Ebene:
a´= (4/2), b´= (2/6). Wir wollen nun die einfache Linearkombination c´ = 2*a´ + ($^1/_2$)*b´ berechnen. Durch Einsetzen in die entsprechenden Koordinatenformeln erhält man c´ = (8/4) + (1/3) = (9/7).

Beispiel im Raum:
a´= (1/2/3), b´= (2/0/1) und c´= (6/4/8). Wir wollen nun die Linearkombination d´ = 3*a´ - 2*b´ + ($^1/_2$)*c´ berechnen. Durch Einsetzen in die entsprechenden Koordinatenformeln erhält man d´ = (3/6/9) – (4/0/2) + (3/2/4) = (2/8/11).

N Vektoren heißen linear abhängig (l.a.), wenn ein Vektor davon eine Linearkombination (Vielfachensumme) der übrigen Vektoren ist. Andernfalls heißen die N Vektoren linear unabhängig (l.u.a.).

Beispiel in der Ebene:

a´= (4/6), b´= (6/9). Wir wollen nun prüfen, ob diese zwei Vektoren in der Ebene linear unabhängig sind. Dazu testen wir, ob beispielsweise b´ ein Vielfaches von a´ ist. b´ = s*a´, d.h. 6 = s*4, also ist s = $^{6}/_{4}$ = $^{3}/_{2}$. Einsetzen in die zweite Koordinatengleichung ergibt 9 = $^{3}/_{2}$ * 6 = 9. Daher gilt b´= $^{3}/_{2}$ * a´. Die Vektoren sind also linear abhängig, und sie heißen kollinear, weil sie auf einer Geraden liegen.

Die Vektoren a´= (4/6), b´= (6/8) hingegen sind nicht kollinear, weil 6 = ($^{3}/_{2}$)*4, aber 8 = ($^{4}/_{3}$)*6.

Beispiel im Raum:

a´= (1/2/3), b´= (2/0/1) und c´= (6/4/8). Wir wollen nun prüfen, ob diese drei Vektoren im Raum linear unabhängig sind. Dazu testen wir, ob beispielsweise c´ eine Linearkombination von a´ und b´ ist. c´= s*a´ + t*b´, d.h. 6 = 1*s + 2*t, 4 = 2*s + 0*t, 8 = 3*s + 1*t. Aus den ersten beiden Koordinatengleichungen folgt s = 2 und t = 2. Einsetzen in die dritte Koordinatengleichung ergibt 8 = 3*2+1*2 = 8. Daher gilt c´= 2*a´ + 2*b´. Die Vektoren sind also linear abhängig, und sie heißen komplanar, weil sie in einer Ebene liegen.

Die Vektoren a´= (1/2/3), b´= (2/0/1) und c´= (6/4/7) hingegen sind nicht komplanar.

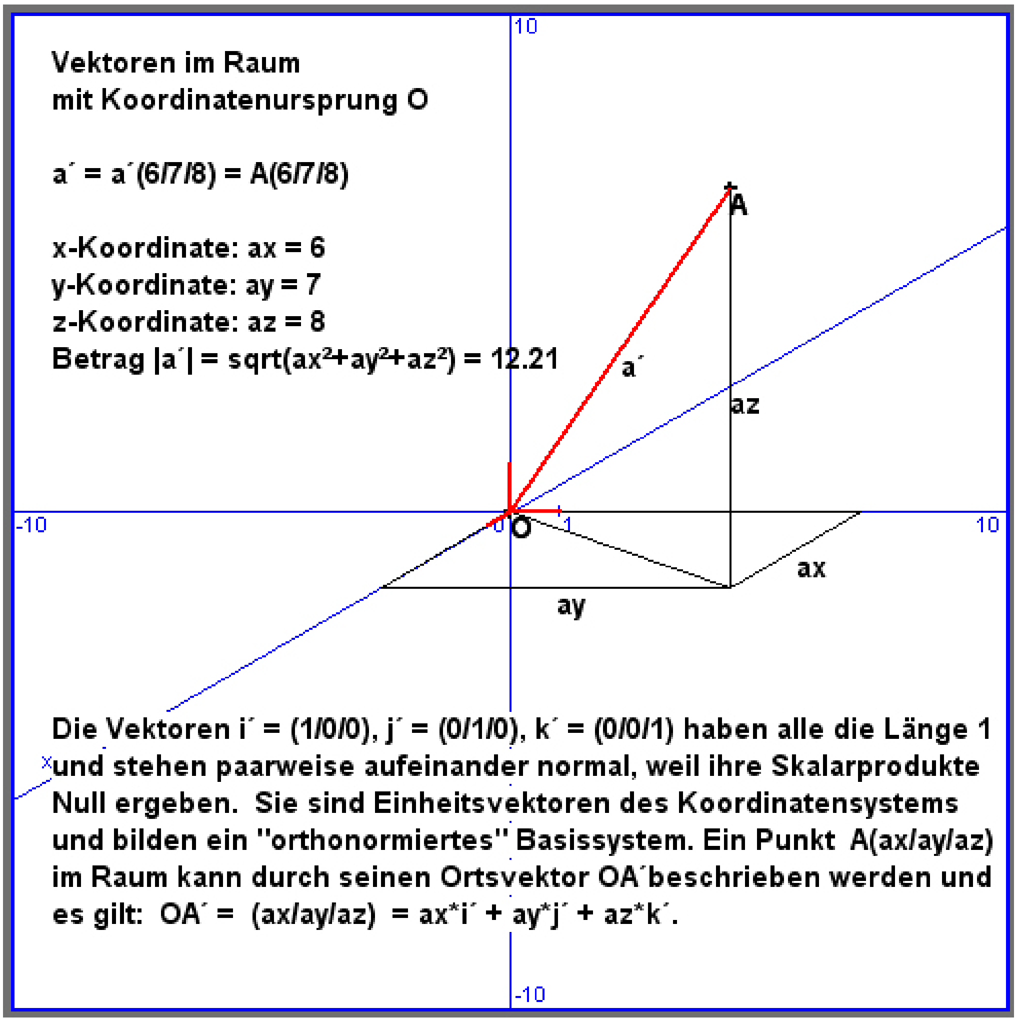
Die Dimension einer Vektormenge ergibt sich aus der maximalen Anzahl von linear unabhängigen Vektoren in dieser Menge.

In der Ebene gibt es maximal zwei linear unabhängige Vektoren. Im Raum aber gibt es maximal drei linear unabhängige Vektoren.

Solche Vektoren heißen ein Basissystem, weil sich jeder andere Vektor als Linearkombination von ihnen darstellen lässt.

(1.6) Ein orthonormiertes Basissystem im Raum

Betrachten wir ein Koordinatensystem im dreidimensionalen Raum etwas genauer. Zunächst wird ein Koordinatenursprung O(0/0/0) als Standpunkt des Beobachters festgelegt. Danach werden drei Gerade bestimmt, die aufeinander paarweise normal (orthogonal) stehen. Das sind die x-, y- und z-Achse. Zuletzt wird noch eine Maßeinheit e für die Längenmessung festgesetzt (z.B. e = 1 cm).



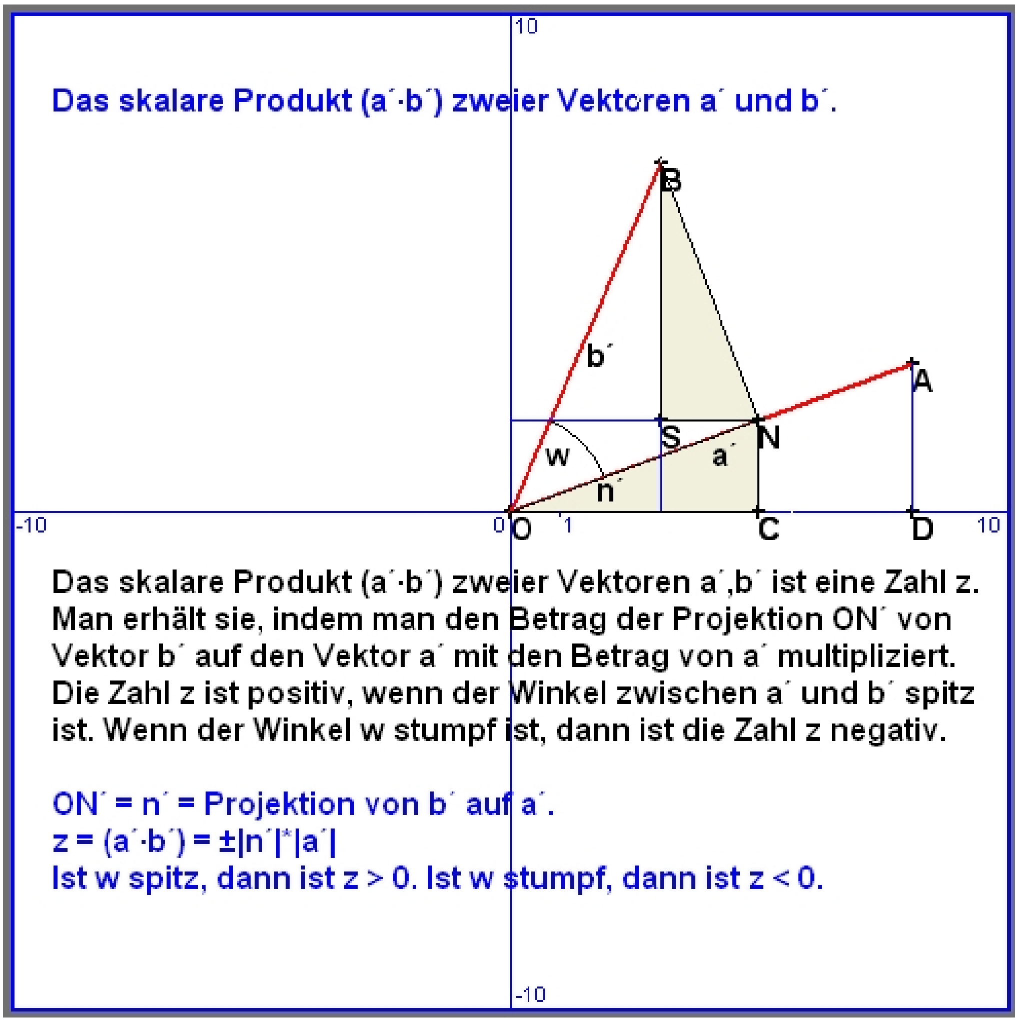
Nun werden drei Vektoren i´, j´ und k´ in Richtung der Achsen erzeugt, die normiert sind, d.h. die Länge 1 haben. i´=(1/0/0), j´=(0/1/0) und k´=(0/0/1). Sie bilden ein orthonormiertes Basissystem. Verbindet man nun den Ursprung O mit einem beliebigen Punkt A, dann erhält man dessen Ortsvektor OA´. Der Ortsvektor OA´ kann nun als Linearkombination von i´, j´, k´ dargestellt werden OA´ = a_x*i´ + a_y*j´+ a_z*k´. Man nennt die Zahlenwerte a_x, a_y, a_z die Koordinaten des Punktes A und schreibt A(a_x/a_y/a_z).

(2) Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Spatprodukt

(2.1) Das skalare Produkt

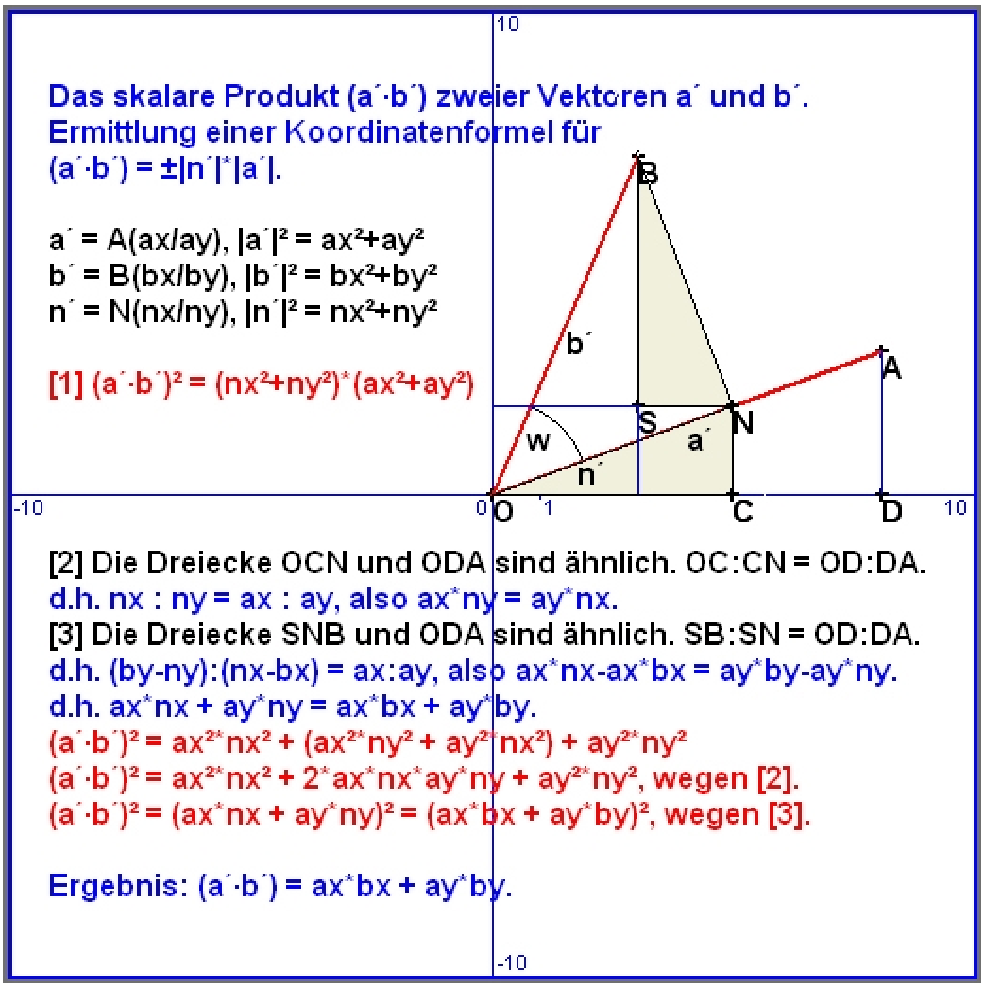
Das skalare Produkt (a´· b´) von Vektoren a´, b´ ist eine Zahl z. Man erhält sie, indem man den Betrag der normalen Projektion n´ von Vektor b´ auf den Vektor a´ mit den Betrag von a´ multipliziert. Die Zahl z ist positiv, wenn der Winkel zwischen a´ und b´ spitz ist. Wenn der Winkel w stumpf ist, dann ist die Zahl z negativ.

n´ = ON´ = Projektion von b´ auf a´.
z = (a´· b´) = ±|n´|*|a´|



Für das skalare Produkt (a´· b´) zweier Vektoren a´=(a_x/a_y) und b´=(b_x/b_y) in der Ebene gilt: (a´· b´) = a_x*b_x + a_y*b_y.

Für das skalare Produkt (a´· b´) zweier Vektoren a´=(a_x/a_y/a_z) und b´=(b_x/b_y/b_z) im Raum gilt: (a´· b´) = a_x*b_x + a_y*b_y + a_z*b_z.



Aus der Koordinatenformel folgt direkt (a´· b´) = (b´· a´), d.h. das skalare Produkt ist kommutativ.

Zwei Vektoren stehen aufeinander normal, wenn ihr skalares Produkt gleich Null ist. Das gilt, weil dann die normale Projektion n´ von Vektor b´ auf den Vektor a´ gleich dem Nullvektor o´(0/0) ist.

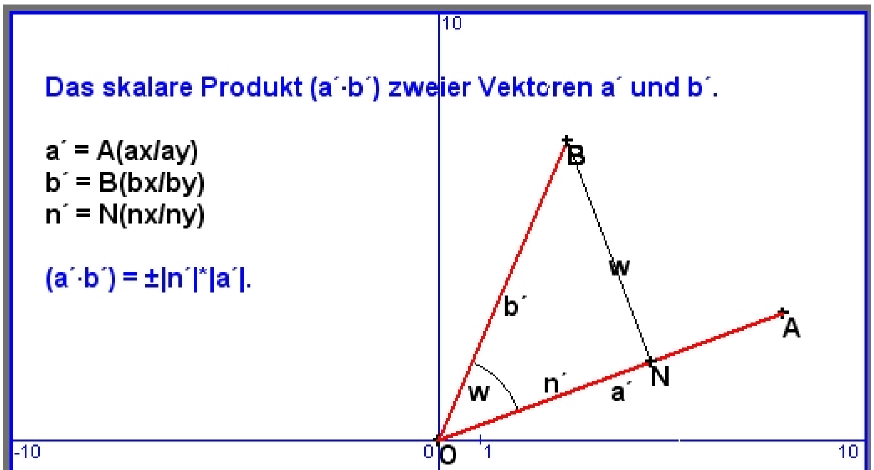
Weiters kann man zeigen, dass für den von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel w gilt: cos(w) = (a´· b´) / (|a´| * |b´|).

Für die Fläche des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms gilt: F² = |a´|²*|b´|² - (a´·b´)². In der Ebene erhält man durch Einsetzen der Koordinaten: F = |a_x*b_y - a_y*b_x| = |DET(a´,b´)|.

Das skalare Produkt (a´·b´) zweier Vektoren a´ und b´.

a´ = A(ax/ay)
b´ = B(bx/by)
n´ = N(nx/ny)

(a´·b´) = ±|n´|*|a´|.



Wir haben bewiesen, dass das skalare Produkt von Vektoren direkt aus den Vektor-Koordinaten berechnet werden kann.

(a´·b´) = ax*bx + ay*by

Im rechtwinkeligen Dreieck gilt |n´| = |b´| * cos(w), d.h. (a´·b´) = |a´|*|b´|*cos(w). So kann aus dem Skalarprodukt der eingeschlossene Winkel w berechnet werden.

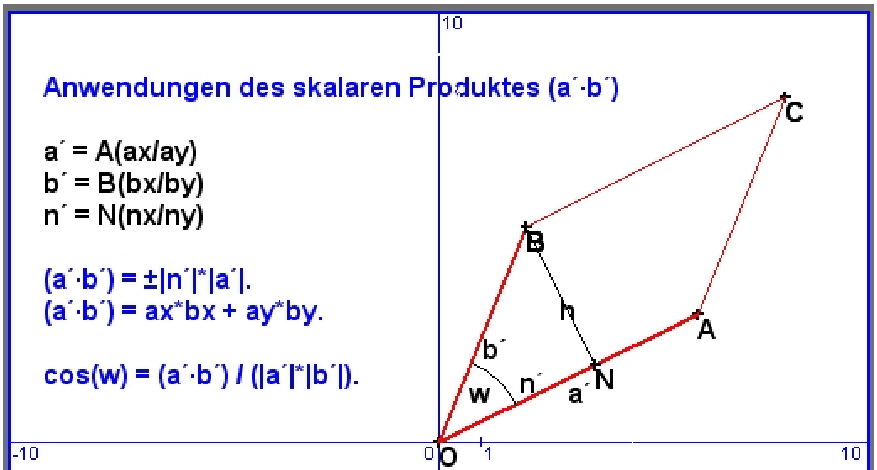
cos(w) = (a´·b´) / (|a´|*|b´|).

Anwendungen des skalaren Produktes (a´·b´)

a´ = A(ax/ay)
b´ = B(bx/by)
n´ = N(nx/ny)

(a´·b´) = ±|n´|*|a´|.
(a´·b´) = ax*bx + ay*by.

cos(w) = (a´·b´) / (|a´|*|b´|).



Die Vektoren a´ und b´ spannen das Parallelogramm OACB auf.
Für dessen Fläche F gilt: F = |a´|*h mit $h^2 = |b'|^2 - |n'|^2$.
$F^2 = |a'|^2*|b'|^2 - |a'|^2*(a'\cdot b')^2 / |a'|^2 = |a'|^2*|b'|^2 - (a'\cdot b')^2$.

$F^2 = |a'|^2*|b'|^2 - (a'\cdot b')^2$

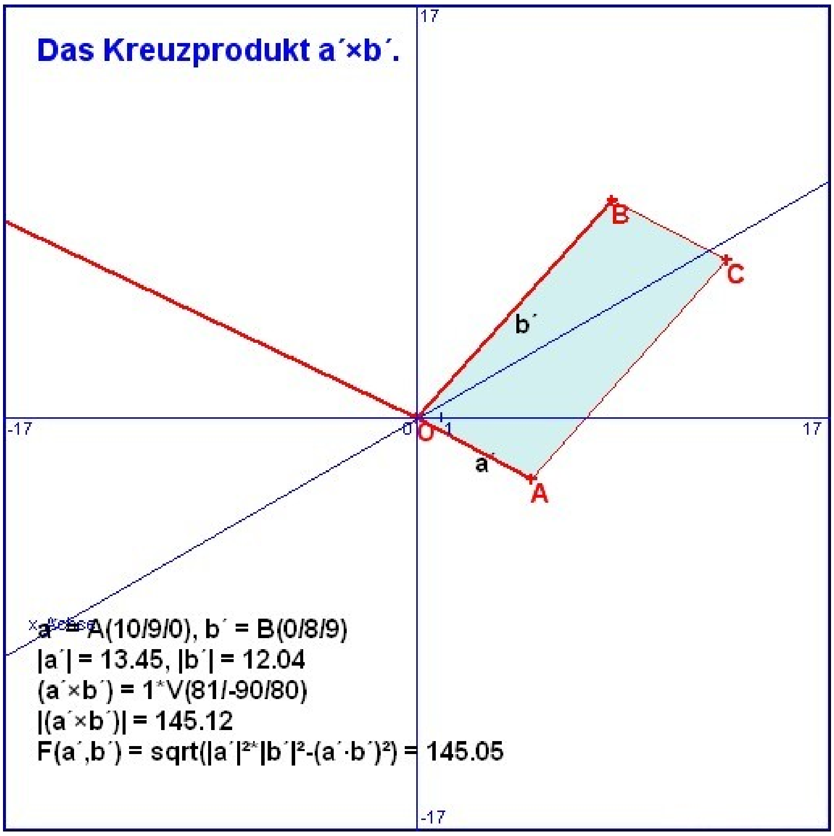
Wenn die Vektoren a´ und b´ aufeinander normal stehen, dann ist die Projektion n´ der Nullvektor o´ und daher ist das skalare Produkt (a´·b´) = 0. Auch die Umkehrung gilt !

(2.2) Vektorielles Produkt (Kreuzprodukt)

Das vektorielle Produkt (Kreuzprodukt) c´ = a´× b´ von Vektoren a´=(a_x/a_y/a_z) und b´=(b_x/b_y/b_z) im Raum ist ein Vektor c´=(c_x/c_y/c_z), für den zwei Eigenschaften gelten:

(1) c´ steht normal auf die durch a´ und b´ aufgespannte Ebene. Dabei liegen a´, b´ und c´ wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der gestreckten rechten Hand (rechtshändige Orientierung).

(2) Die Länge von c´ ist gleich der Fläche des Parallelogramms mit den Seitenvektoren a´ und b´, d.h. |c´| = F(a´,b´).



Für die Koordinaten des Kreuzproduktes c´ = (c_x/c_y/c_z) gilt

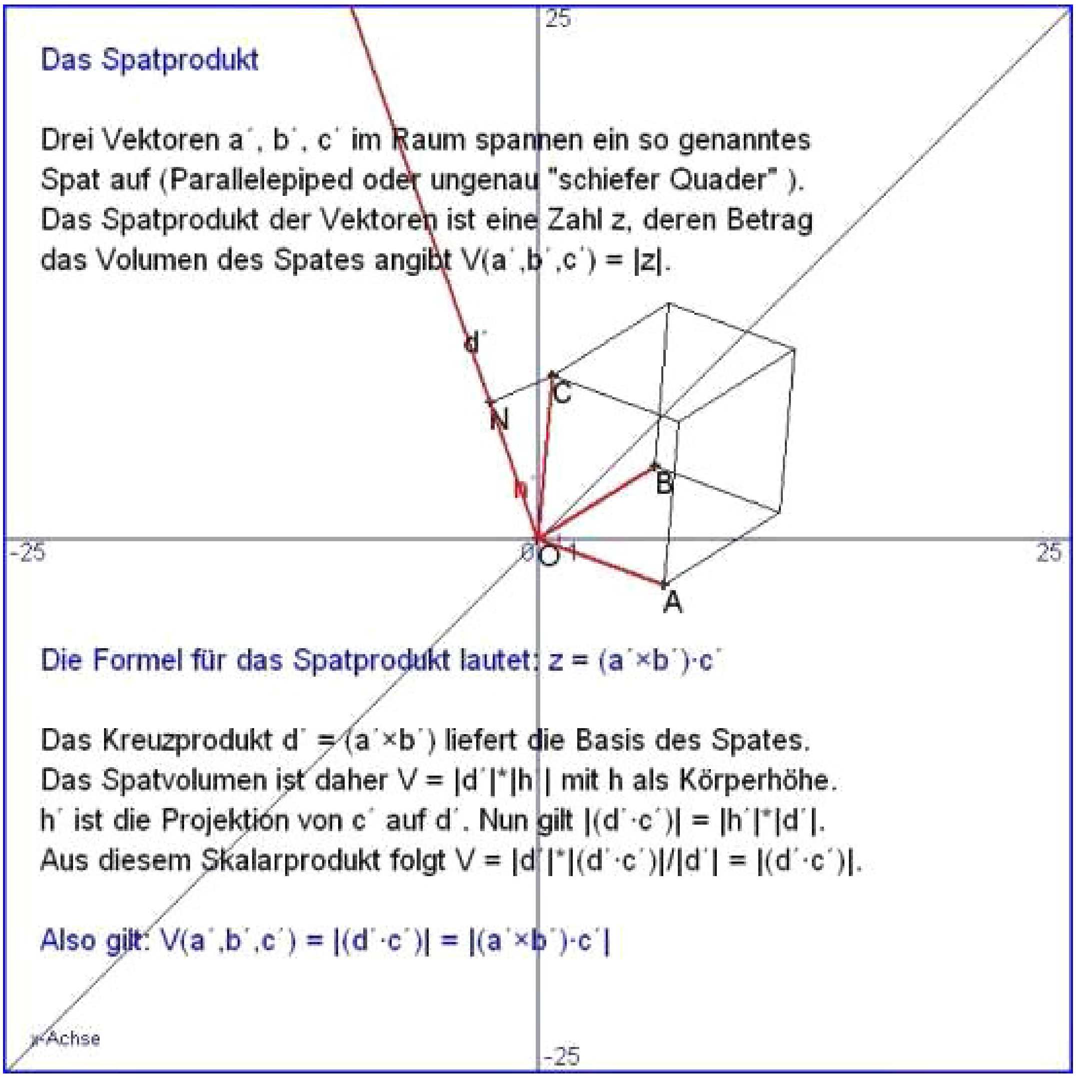
$c_x = \ \ (a_y*b_z - a_z*b_y)$
$c_y = -(a_x*b_z - a_z*b_x)$
$c_z = \ \ (a_x*b_y - a_y*b_x).$

Die Richtgkeit dieser Koordinatenformeln wird überprüft, indem die Erfüllung der Eigenschaften nachgerechnet wird:
(1) (c´· a´) = 0 und (c´· b´) = 0.
(2) |c´| = F(a´,b´) = sqrt(|a´|²*|b´|² - (a´·b´)²).

Aus den Koordinatenformeln folgt direkt a´× b´ = -(a´× b´), d.h. Das Kreuzprodukt ist antikommutativ.

(2.3) Das Spatprodukt

Drei Vektoren a´, b´, c´ im Raum spannen ein so genanntes Spat auf (Parallelepiped oder ungenau "schiefer Quader"). Das Spatprodukt der Vektoren ist eine Zahl z, deren Betrag das Volumen des Spates angibt V(a´,b´,v´) = |z|.



Die Formel für das Spatprodukt lautet: z = (a´× b´) · c´
Die Richtigkeit dieser Formel kann folgendermaßen bewiesen werden: Der Betrag des Kreuzprodukts d´ = (a´× b´) liefert die Basisfläche des Spates. Das Spatvolumen ist daher V = |d´|*|h´| mit h als Körperhöhe. Diese Höhe h´ ist die normale Projektion von c´ auf d´ und es gilt somit (d´· c´) = |h´|*|d´|. Aus dem Skalarprodukt folgt für das Volumen V = |d´|*|(d´· c´)|/|d´| = |(d´· c´)| = |(a´× b´)· c´|.

V(a´,b´,c´) = (d´· c´) = (a´× b´) · c´ =

= $|(a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z - a_z*b_y*c_x)|$

(3) Gerade in der Ebene

(3.1.1) Eine Gerade in der Ebene (lineare Gleichung)

Ausgangspunkt ist eine lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y von der Form y = k*x, wobei k ein konstanter Zahlenwert ist. Berechnet man zu verschiedenen x-Werten die zugeordneten y-Werte, so erhält man eine lineare Funktion.

Trägt man in einem Koordinatensystem beliebige x-Werte auf der x-Achse und die zugeordneten y-Werte dann parallel zur y-Achse auf, erhält man eine Menge von Punkten P(x/y), die alle auf einer Geraden liegen.

Das Schaubild einer linearen Funktion der Form y = k*x ist eine steigende oder fallende Gerade, welche immer durch den Ursprung O(0/0) des Koordinatensystems geht.

**Solche Funktionen heißen homogene lineare Funktionen.
Die Konstante k bestimmt die Steigung der Geraden. Das Vorzeichen von k entscheidet, ob die Gerade ansteigt (k > 0) oder ob die Gerade abfällt (k < 0). Der Betrag von k gibt an, wie stark die Gerade steigt oder fällt.**

Wenn wir nun die allgemeine lineare Funktion y = k*x + d betrachten, wobei die Konstanten k und d nicht Null sind, so stellen wir fest, dass für x = 0 das zugehörige y = d ist. Also liegt der Punkt P(0/d) auf der Geraden, d.h. die Gerade geht nicht durch den Koordinatenursprung O(0/0).

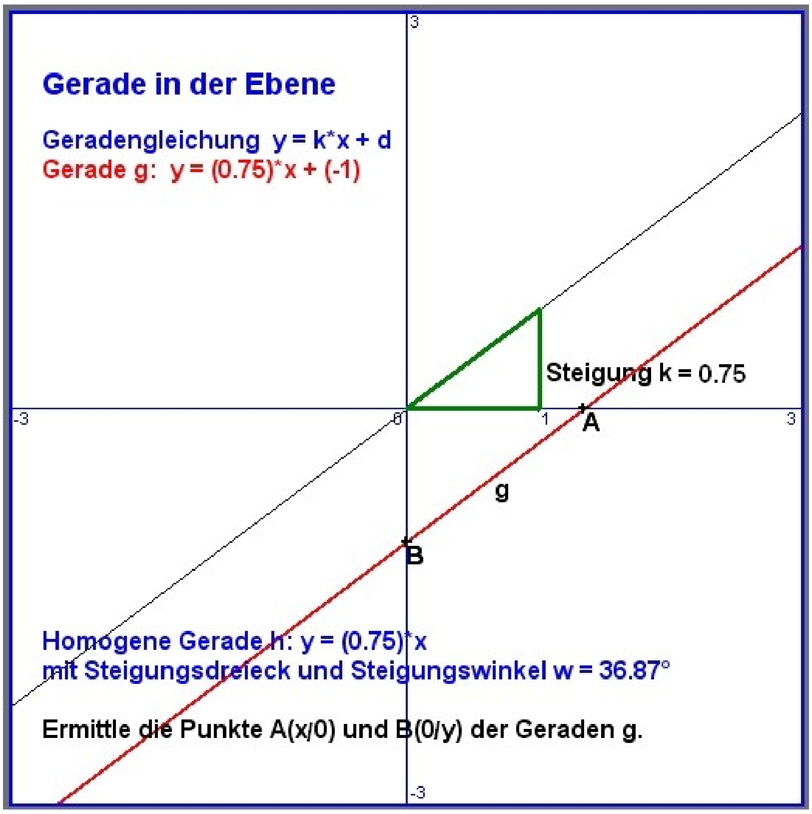
Der Punkt P(0/d) liegt aber auch auf der y-Achse, weil dort für alle Punkte x = 0 ist. Er ist somit der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Die Konstante d heißt y-Abschnitt.

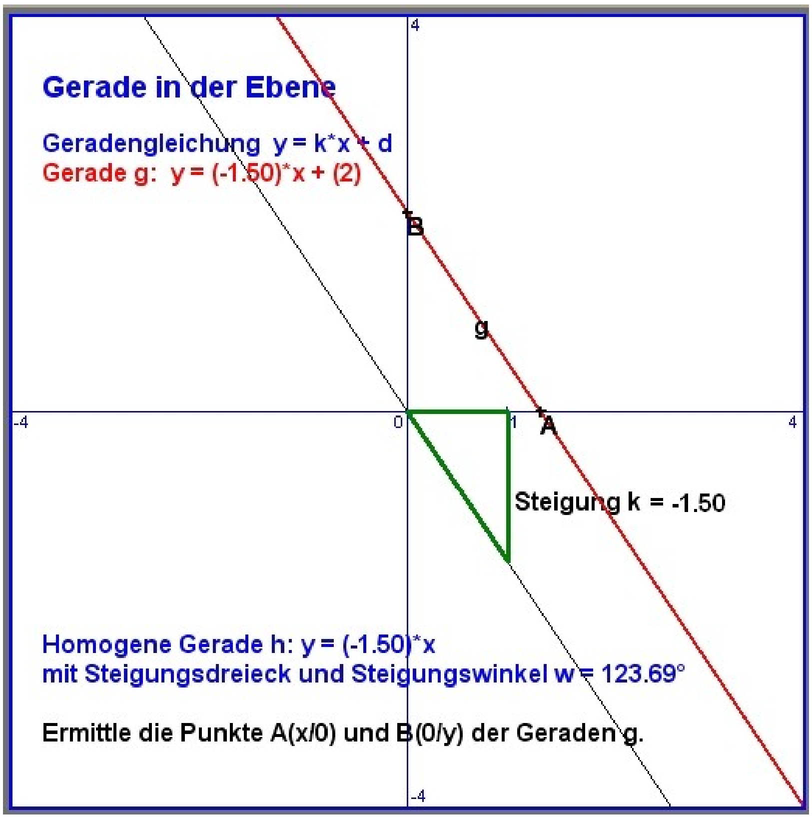
Die Funktion y = k*x + d heißt inhomogene lineare Funktion.

Offensichtlich entsteht eine inhomogene Gerade dadurch, dass jeder Punkt der homogenen Geraden um den Abschnitt d parallel zur y-Achse verschoben wird. Die Steigungen der beiden Geraden sind natürlich gleich.

Hinweis: Wenn wir die homogene lineare Gerade y = k*x ansehen und x = 1 setzen, dann erhalten wir für y die Steigung k. Der Punkt Q(1/k) liegt daher auf der Geraden. Der von der x-Achse und der Geraden eingeschlossene Winkel heißt Steigungswinkel, und das Dreieck O(0/0), P(1/0), Q(1/k) heißt Steigungsdreieck.

Die folgenden Grafiken zeigen steigende und fallende Gerade.





Eine lineare Gleichung mit den zwei Variablen x und y hat die allgemeine Form:

a*x + b*y = c

Dabei sind a, b und c konstante Zahlenwerte. Durch so genannte Äquivalenzumformungen wird diese Gleichung so lange umgeformt bis die Variable y alleine auf einer Gleichungsseite steht.

```
a*x + b*y = c
      b*y = -a*x + c
        y = (-a/b)*x + (c/b)
```

Durch Umformungen erhalten wir somit: y = (-a/b)*x + (c/b). Diese Gleichungsform heißt explizit, weil y alleine auf einer Seite steht. Andernfalls heißt die Gleichungsform implizit.

y = (-a/b)*x + (c/b)

Setzen wir nun (-a/b) = k und (c/b) = d, dann erhalten wir die Gleichung einer Geraden in der Ebene mit k als Steigung und d als y-Abschnitt: y = k*x + d.

Beispiel:

```
5*x - 4*y  = 8 (implizite Form)
y = 1.25*x - 2 (explizite Form)
```

Will man diese Gerade zeichnen, dann muss man zwei Punkte A und B ermitteln, welche auf der Geraden liegen. Dazu wählt man einen beliebigen x-Wert und rechnet dann den zugehörigen y-Wert aus.

```
x = 0, y = 1.25*0 - 2 = -2, A(0/-2)
x = 4, y = 1.25*4 - 2 = 3,  B(4/3)
```

Ergebnis:

Die Gerade g mit der Gleichung y = 1.25*x - 2 verläuft durch die zwei Punkte A(0/-2) und B(4/3).

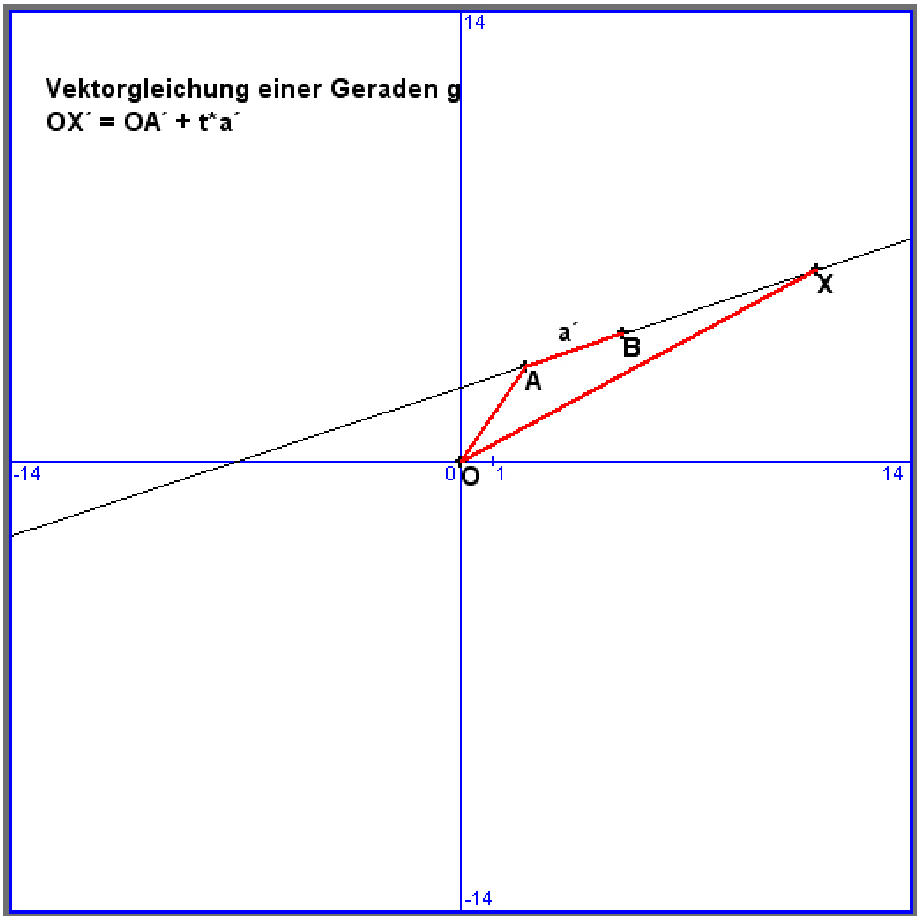
Die Zahlenpaare (x,y) in einer linearen Gleichung mit zwei Variablen entsprechen den Punkten P(x/y) auf einer Geraden in der Ebene.

(3.1.2) Eine Gerade in der Ebene (Vektorgleichung)

Eine Gerade g ist in der Ebene durch einen Punkt A und einen Richtungsvektor a´ gegeben. Der Ortsvektor von jedem Punkt X auf der Geraden wird dadurch erzeugt, dass zum Ortsvektor von A ein entsprechendes Vielfache t*a´ von a´ addiert wird. Dabei wird die Zahl t als der Parameter des Punktes X bezeichnet. Durchläuft t alle reellen Zahlen, erhält man alle Punkte von g.

OX´ = OA´ + t*a´ (Vektorgleichung von g)

Gerade g mit A(2/3) und a´= (3/1)
(x/y) = (2/3) + t*(3/1).
z.B.: (11/6) = (2/3) + 3*(3/1), d.h. P(11/6) ist ein Punkt auf g.



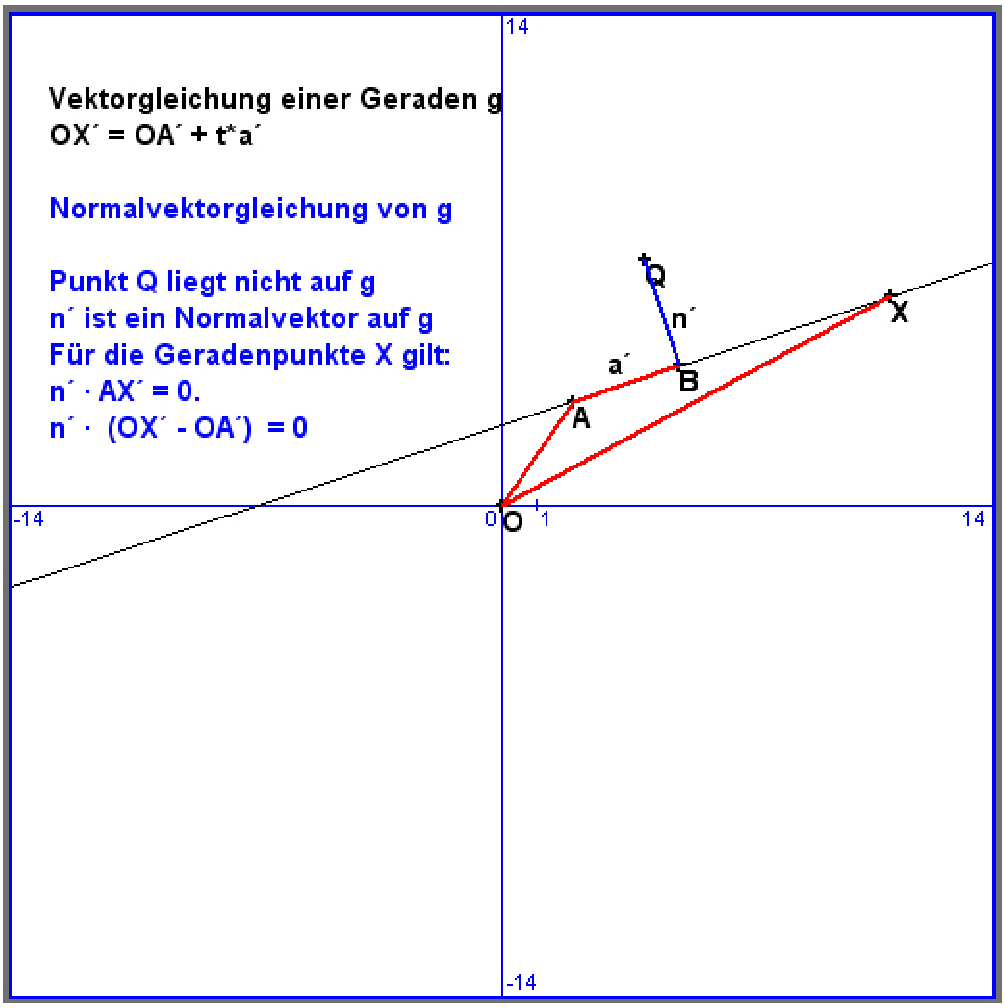
Ist die Gerade g durch zwei Punkte A und B gegeben, dann wird der Verbindungsvektor AB´ als Richtungsvektor a´ genommen und die Vektorgleichung der Geraden lautet: OX´ = OA´ + t*AB´.

Spaltet man die Vektorgleichung in die Koordinatengleichungen auf und eliminiert den Parameter, erhält man die lineare Gleichung der Geraden: (x/y) = (2/3) + t*(3/1) wird aufgespaltet in x = 2 + 3*t und y = 3 + 1*t. Daraus folgt t = y - 3 und x = 2 + 3*(y - 3), und das ergibt schließlich die lineare Gleichung von g: x - 3*y = -7.

Die Lösungsmenge {(x/y)} einer linearen Gleichung in zwei Variablen entspricht den Punkten auf einer Geraden in der Ebene.

Gegeben ist die Gerade g mit dem Anfangspunkt A(ax/ay) und dem Richtungsvektor a´(u/v). Der Vektor n´(x/y) sei ein Normalvektor auf die Gerade g. Weil n´· a´ = (x/y)·(u/v) = x*u + y*v = 0 ist, so gilt: Der Normalvektor n´ hat die Koordinaten (v/-u).

Für alle Geradenpunkte X gilt dann: n´· AX´ = 0.
n´·(OX´- OA´) = 0
n´· OX´ = n´· OA´
Das ist die Normalvektorgleichung der Geraden g.



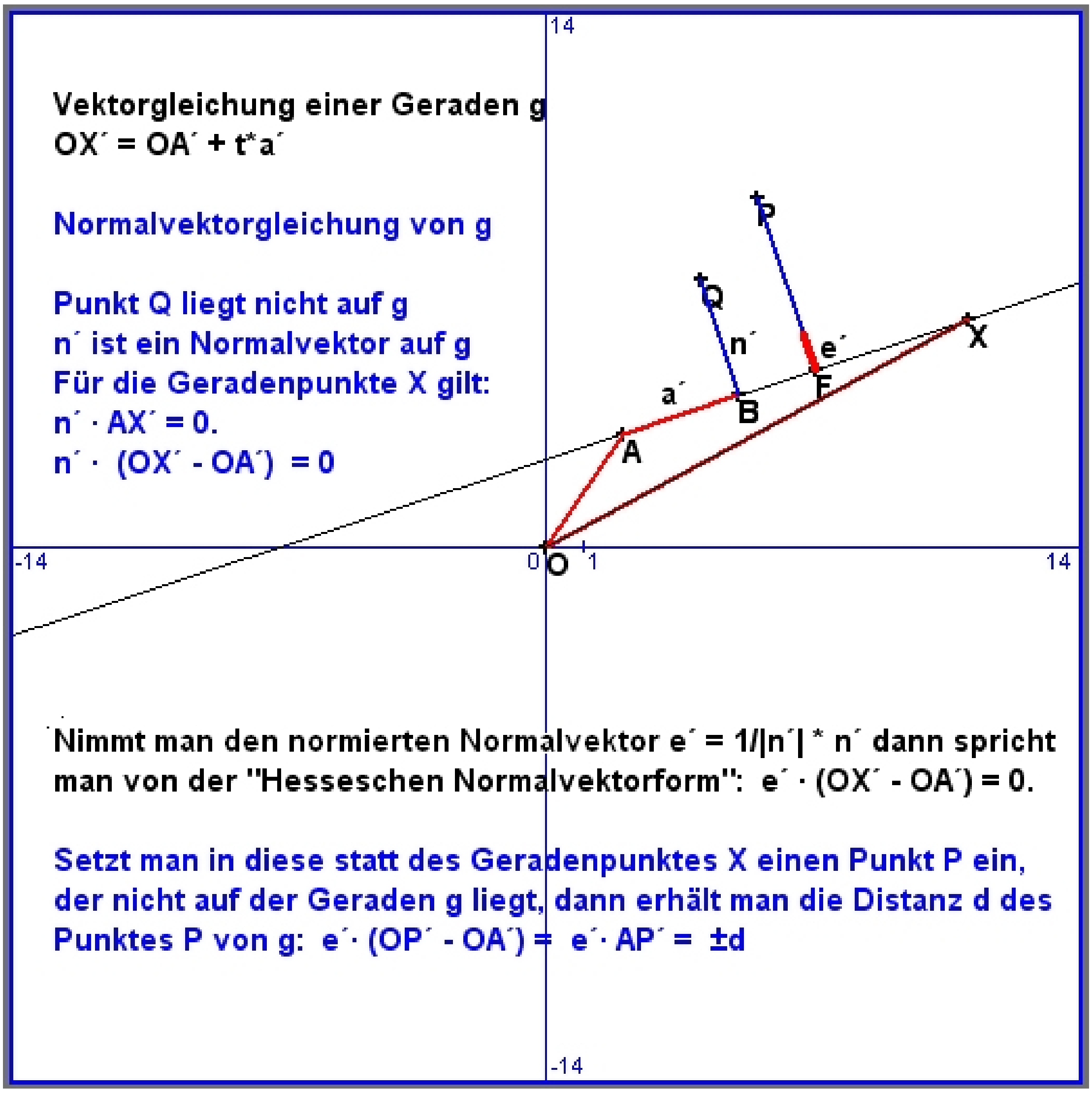
Mit A(2/3) und a´= (3/1) gilt: n´ = (1/-3),
Normalvektorgleichung der Geraden g: (1/-3)·((x/y)-(2/3)) = 0

Multipliziert man die Normalvektorgleichung aus, so erhält man wieder die lineare Gleichung der Geraden: (1/-3)·(x-2/y-3) = 0
Aus x - 2 - 3*y + 9 = 0 folgt dann x - 3*y = -7.

Für eine Gerade in der Ebene gilt, dass die Koeffizienten der linearen Gleichung die Koordinaten eines Normalvektors sind.

Nimmt man den normierten Normalvektor e´ = 1/|n´| * n´, dann spricht man von der "Hesseschen Normalvektorform": e´·(OX´-OA´) = 0.

Setzt man in diese statt des Geradenpunktes X einen Punkt P ein, der nicht auf der Geraden g liegt, dann erhält man die Distanz d des Punktes P von g: e´·(OP´- OA´) = e´· AP´ = ±d. Das gilt, weil ja e´· AP´= AP´· e´ = ±|Projektion von AP´auf e´|*|e´| = ±|FP´|*1 = ±d.



(3.2.1) Zwei Gerade in der Ebene (lineare Gleichungen)

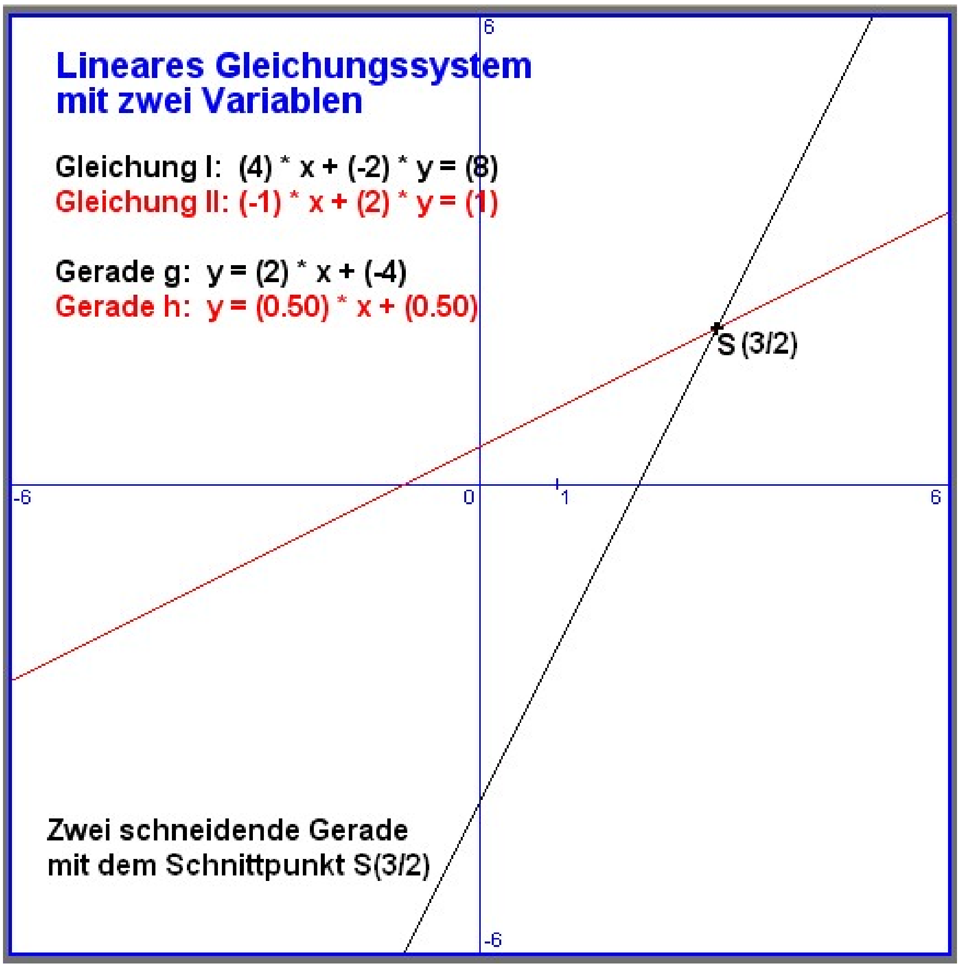
Es sind zwei Geraden in der Ebene mit ihren linearen Gleichungen gegeben, beispielsweise:

(g) 5*x - 4*y = 8
(h) x + 2*y = 10

(g) y = 1.25*x - 2 (Steigung k = 1.25, Abschnitt d = -2)
(h) y = -0.5*x + 5 (Steigung k = -0.5, Abschnitt d = 5)

Wenn es einen Schnittpunkt S(x/y) gibt, dann muss er auf beiden Geraden liegen, d.h. wenn man seine Koordinaten in die beiden Gleichungen einsetzt, erhält man zwei wahre Aussagen.

Grundsätzlich können zwei Geraden in der Ebene entweder identisch, parallel oder einander schneidend sein.
Ihre gegenseitige Lage hängt im Wesentlichen von ihren Steigungen ab. Nur wenn die Steigungen der Geraden verschieden sind, gibt es einen eindeutigen Schnittpunkt.



Wie wird der Schnittpunkt S(x/y) von zwei Geraden ermittelt?
Ausgangspunkt der Ermittlung des Schnittpunktes sollen die beiden impliziten Geradengleichungen (g) und (h) sein:

$(g)\quad 5*x - 4*y = 8$
$(h)\quad x + 2*y = 10$

Wir multiplizieren die beiden Seiten der zweiten Gleichung mit 2:
(Durch diese Umformungen wird die Lösungsmenge nicht verändert.)

$(g)\quad 5*x - 4*y = 8$
$(h)\quad 2*x + 4*y = 20$

Dann addieren wir die Seiten der beiden Gleichungen, wodurch die Variable y eliminiert wird (Eliminationsmethode). Das ergibt:

$(g) + (h):\quad 7*x + 0*y = 28.$ Daraus folgt $x = 4$.

Den erhaltenen x-Wert setzen wir nun in die zweite Gleichung ein und berechnen den y-Wert: $4 + 2*y = 10$. Daraus folgt $y = 3$.

Somit haben wir den Schnittpunkt S(4/3) der Geraden ermittelt. Als Probe können wir den Schnittpunkt in beide Gleichungen ein-setzen. Erhalten wir wahre Aussagen, haben wir richtig gerechnet.

Das besprochene Lösungsverfahren heißt Eliminationsmethode, weil dabei immer eine Variable eliminiert (ausgeschaltet) wird.

Ein zweites Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme ist die Substitutionsmethode (Einsetzungsmethode). Diese wollen wir nun auf unsere beiden Geradengleichungen anwenden:

$(g)\quad 5*x - 4*y = 8$
$(h)\quad x + 2*y = 10$

Wir stellen aus der zweiten Gleichung die Variable x explizit dar und setzen den Ausdruck für x in die erste Gleichung ein. Dann berechnen wir durch Umformung die Variable y.

$(g)\quad 5*x - 4*y = 8$
$(h)\quad x = 10 - 2*y$

$(g)\quad 5*(10 - 2*y) - 4*y = 8.$ Daraus folgt $y = 3$.

Den erhaltenen y-Wert setzen wir nun in die zweite Gleichung ein und berechnen den x-Wert: $x = 10 - 2*3$. Daraus folgt $x = 4$.
Somit haben wird den Schnittpunkt S(4/3) der Geraden ermittelt.

Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems:

$(g)\quad a*x + b*y = c$
$(h)\quad d*x + e*y = f$

Die Steigung der Geraden g ist k1 = -a/b.
Die Steigung der Geraden h ist k2 = -d/e.

Das System hat keinen Schnittpunkt, wenn k1 = k2 ist. Dann gilt:

-a/b = -d/e
a*e = b*d
a*e - b*d = 0

Der Ausdruck (a*e - b*d) heißt die Determinante DET des Systems.

Somit gilt folgender Hauptsatz:
Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante DET = (a*e - b*d) nicht gleich Null ist.

```
(g)  5*x - 4*y =  8
(h)    x + 2*y = 10
```

DET = 5*2 - (-4)*1 = 14. Das System ist eindeutig lösbar.

Schreibt man die konstanten Zahlenwerte (Koeffizienten) a, b, c und d, e, f in zwei Zeilen und drei Spalten an, so nennt man eine solche Anordnung eine (2 x 3)-Matrix. Hier nennt man sie auch die erweiterte Systemmatrix.

```
a  b  c
d  e  f
```

Die zwei linken Spalten bilden eine (2 x 2)-Matrix, die man nur Systemmatrix nennt.

```
a  b
d  e
```

Die Hauptdiagonale (rot) der Matrix geht von links oben nach rechts unten, die Nebendiagonale (blau) von links unten nach rechts oben. Die Determinante der Matrix DET = (a*e - b*d) wird so gebildet, dass man das Produkt der Zahlen aus der Nebendiagonale von dem Produkt der Zahlen aus der Hauptdiagonale subtrahiert. Das liefert eine einfache Merkregel für die Berechnung der Determinante.

Betrachten wir noch einmal das lineare Gleichungssystem. Wir wollen zum Abschluss eine allgemeine Lösungsformel herleiten. Damit können die Lösungen (x/y) direkt aus den Koeffizienten a, b, c, d, e, f berechnet werden.

a*x + b*y = c   (I)
d*x + e*y = f   (II)

Stellt man y aus (II) explizit dar und setzt y in (I) ein, dann erhält man für x:

x = (c*e - b*f) / (a*e - b*d)

Setzt man diesen Wert von x in (II) ein, dann erhält man für y:

y = (a*f - c*d) / (a*e - b*d)

Die Rechenausdrücke in diesen Formeln sind Determinanten von Teilmatrizen aus der erweiterten Systemmatrix, die man dadurch erhält, dass man eine bestimmte Spalte durch die rechte Spalte ersetzt. Dabei bezeichnet die tiefer gestellte Zahl die Nummer der ersetzten Spalte.

a	b	c	Erweiterte Systemmatrix
d	e	f	
a	b		Systemmatrix mit DET = a*e – b*d
d	e		
c	b		Teilmatrix mit DET_1 = c*e - b*f
f	e		
a	c		Teilmatrix mit DET_2 = a*f – c*d
d	f		

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die oben hergeleiteten Lösungsformeln folgendermaßen anschreiben (Cramersche Regel):

x = DET_1 / DET
y = DET_2 / DET

Hinweis: In der Vektorrechnung wurde gezeigt, dass die Vektoren n´(a/b) und m´(d/e) normal auf die Geraden stehen. Diese beiden Normalvektoren spannen ein Parallelogramm auf, dessen Fläche gleich dem Betrag der Systemdeterminante DET = a*e – b*d ist. Offensichtlich schneiden sich die Geraden nur dann, wenn diese Fläche nicht Null ist. Andernfalls sind sie parallel oder identisch.

(3.2.2) Zwei Gerade in der Ebene (Vektorgleichungen)

Die Geraden g und h sind jeweils durch ihren Anfangspunkt und ihren Richtungsvektor gegeben. Ausgehend von ihren Vektorgleichungen soll zuerst ihr Schnittpunkt und dann ihre linearen Gleichungen ermittelt werden.

Die Punkte A(0/-2) und B(-4/-7) liegen auf der Geraden g.
Die Punkte C(0/5) und D(-6/8) liegen auf der Geraden h.

```
g:  OX´ = OA´ + s*AB´
h:  OX´ = OC´ + t*CD´

AB´ = OB´ - OA´ = (-4/-5) = (-1)*(4/5)
CD´ = OD´ - OC´ = (-6/3) = (-3)*(2/-1)

g:  OX´ = (0/-2) + s*(4/5)
h:  OX´ = (0/5) + t*(2/-1)
```

Der Schnittpunkt S(x/y) muss die Vektorformeln erfüllen:
(0/-2) + s*(4/5) = (0/5) + t*(2/-1)
Die Vektorgleichung wird nun in ihre Koordinatengleichungen aufgespalten:

```
 0 + 4*s = 0 + 2*t
-2 + 5*s = 5 – 1*t
```

Die Lösungen dieses linearen Gleichungssystems sind: s = 1, t = 2.
Einsetzen von s = 1 in die Vektorgleichung von g ergibt dann den Schnittpunkt S(4/3).

Mit Hilfe der Normalvektoren können schließlich die linearen Gleichungen der beiden Geraden ermittelt werden.

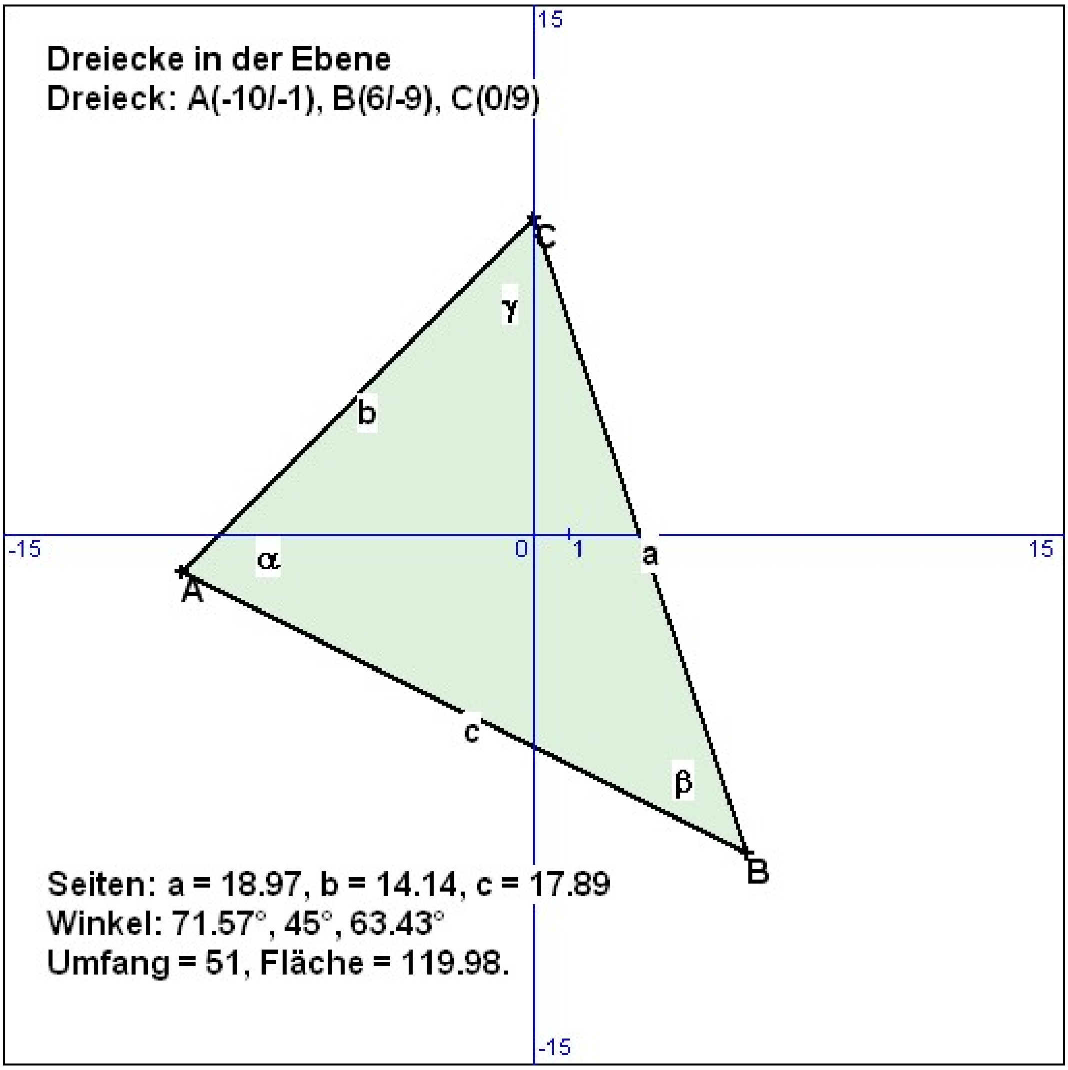
```
Gerade g: Richtungsvektor a´ = (4/5), Normalvektor n´ = (5/-4)
          n´·(OX´ - OA´) = 0
          n´· OX´ = n´· OA´
          (5/-4)·(x/y) = (5/-4)·(0/-2)
          5*x - 4*y = 8

Gerade h: Richtungsvektor b´ = (2/-1), Normalvektor m´ = (1/2)
          m´·(OX´ - OC´) = 0
          m´· OX´ = n´· OC´
          (1/2)·(x/y) = (1/2)·(0/5)
          1*x + 2*y = 10

g:  5*x - 4*y = 8
h:  1*x + 2*y = 10
```

(4) Vier merkwürdige Punkte im Dreieck

Drei Punkte A, B, C in der Ebene bilden ein Dreieck.

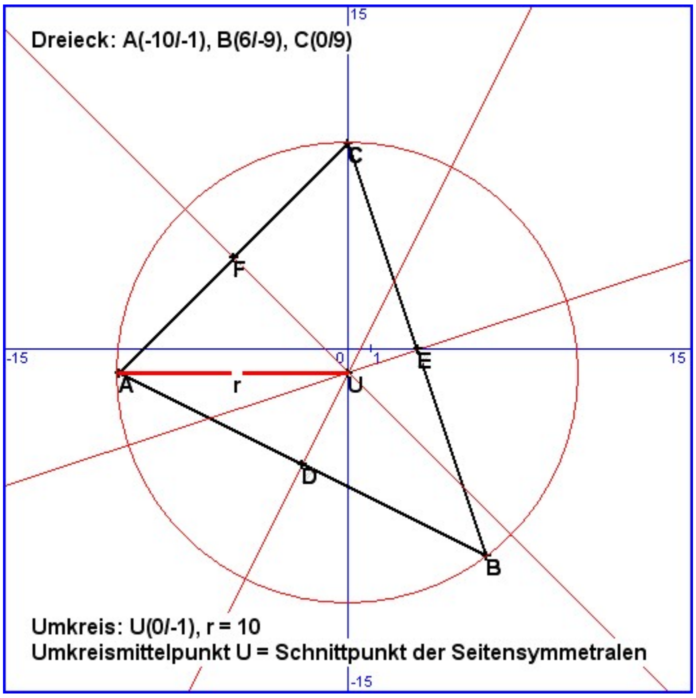


Für die drei Seiten a, b, c gilt:
a = |BC´|, b = |AC´| und c =|AB´|
Umfang U = a + b + c und s = U / 2
Fläche F = sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))

Für die drei Winkel α, β, γ **gilt:**
cos(α) = (AB´· AC´) / (|AB´|*|AC´|)
cos(β) = (BA´· BC´) / (|BA´|*|BC´|)
γ = 180 - $(\alpha + \beta)$

Die Berechnung der vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks ist eine schöne Anwendung der linearen Vektorrechnung. Das Dreieck geht durch die Punkte $A(x_A/y_A)$, $B(x_B/y_B)$ **und** $C(x_C/y_C)$.

(4.1) Der Umkreis {$U(x_U/y_U),r_U$}



D ist der Seitenmittelpunkt von der Seite c.
OA´ + AB´= OB´, d.h. AB´= OB´- OA´= (x_B-x_A/y_B-y_A)
OD´= OA´+ ($^1/_2$)*AB´= ($^1/_2$)*(OA´+ OB´)
(y_B-y_A/-(x_B-x_A)) ist ein Normalvektor n_C´ auf AB´, weil (n_C´·AB´) = 0.
Für die Seitensymmetrale von c gilt: OX´= OD´ + s*n_c´

E ist der Seitenmittelpunkt von der Seite a.
OB´ + BC´= OC´, d.h. BC´= OC´- OB´= (x_C-x_B/y_C-y_B)
OE´= OB´+ ($^1/_2$)*BC´= ($^1/_2$)*(OB´+ OC´)
(y_C-y_B/-(x_C-x_B)) ist ein Normalvektor n_a´ auf BC´, weil (n_a´·BC´) = 0.
Für die Seitensymmetrale von a gilt: OX´= OE´ + t*n_a´

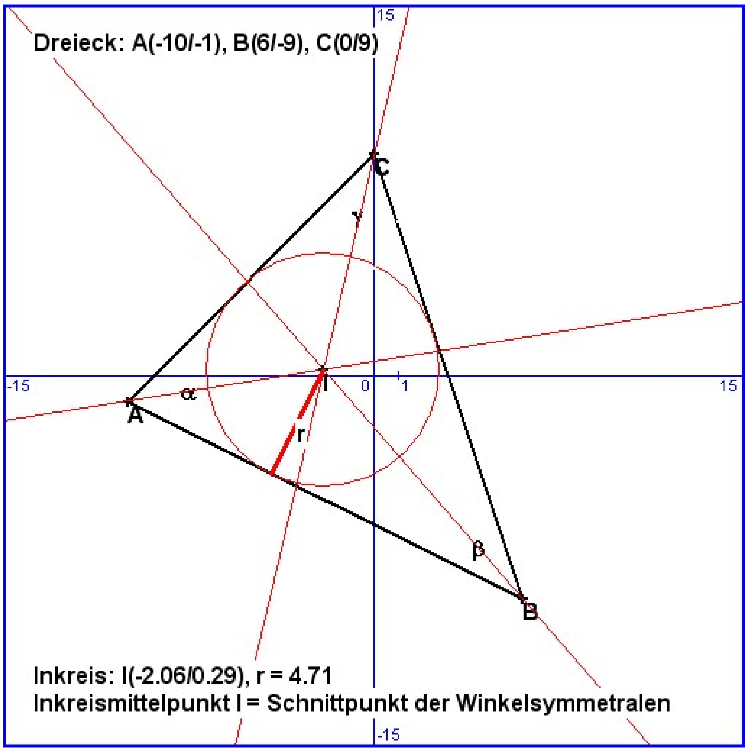
Der Umkreismittelpunkt U ist der Schnittpunkt der Seitensymmetralen.
OU´= OD´ + s*n_c´ und OU´= OE´ + t*n_a´
OD´ + s*n_c´ = OE´ + t*n_a´
s*n_c´ - t*n_a´ = DE´

Aufspalten der Vektorgleichung in die zwei Koordinatengleichungen.
Dabei sind x_V und y_V die Koordinaten des Vektors v´= DE´.

$$(y_B-y_A)*s - (y_C-y_B)*t = x_V$$
$$-(x_B-x_A)*s + (x_C-x_B)*t = y_V$$

Dieses lineare Gleichungssystem in den zwei Variablen s und t wird nun gelöst. Wenn s_0 und t_0 Lösungen sind, erhält man den Umkreis-mittelpunkt durch Einsetzen, beispielsweise: OU´= OD´ + s_0*n_C´.
Für den Umkreisradius gilt r_U = |AU´| = sqrt((x_U-x_A)²+(y_U-y_A)²).
Die Bezeichnung "sqrt" bedeutet die Quadratwurzel (square root).

(4.2) Der Inkreis {$I(x_I/y_I), r_I$}



Für den Inkreis gilt, dass der Inkreismittelpunkt I der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen ist. Die Winkelsymmetrale des Winkels bei Eckpunkt A ist die Diagonale einer Raute mit normierten (gleichlangen) Seitenvektoren, w_A´= (1/|c´|)* c´ + (1/|b´|)* b´. Für die Winkelsymmetrale gilt dann OX´= OA´ + s*w_A´.

Die Winkelsymmetrale bei Eckpunkt B wird in analoger Weise ermittelt: OX´= OB´ + t*w_B´.

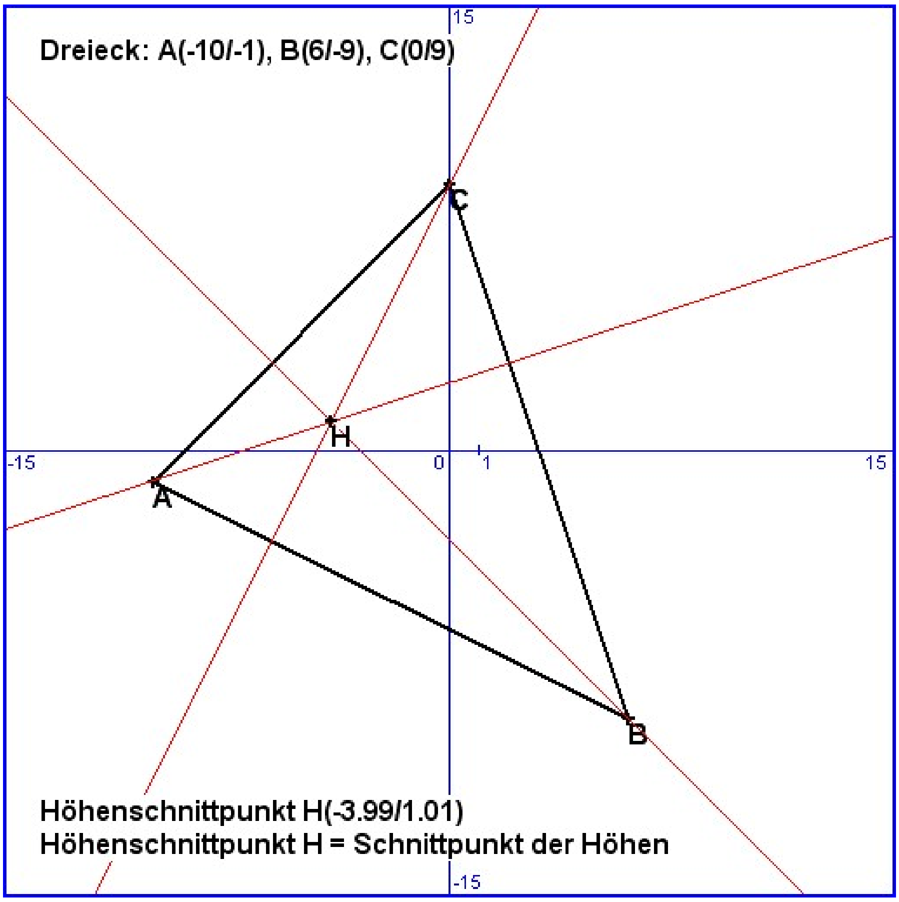
Für den Inkreismittelpunkt I gilt OI´= OA´ + s*w_A´ und OI´= OB´ + t*w_B´. Das ergibt die Vektorgleichung s*w_A´-t*w_B´= AB´. Diese wird in die Koordinatengleichungen aufgespaltet und gelöst.

Der Inkreisradius r_I ist der Normalabstand des Inkreismittelpunktes I von der Dreiecksseite c. Er wird mit der Hesseschen Normalvektorgleichung der Geraden c ermittelt (siehe Abschnitt [4.6]).

Vektorgleichung der Dreiecksseite c: OX´= OA´ + s*AB´.
n´ ist der Normalvektor zum Verbindungsvektor AB´= OB´- OA´.
Für alle Punkte X der Dreiecksseite c gilt die so genannte Normalvektorgleichung n´· AX´= 0 bzw. n´·(OX´- OA´) = 0.

Nimmt man den normierten Normalvektor e´= 1/|n´| * n´, dann erhält man die "Hessesche Normalvektorform" e´·(OX´- OA´) = 0. Setzt man hier den Inkreismittelpunkt I ein, dann erhält man seinen Abstand von der Seite c. Damit gilt für den Inkreisradius: r_I = |e´·(OI´- OA´)|.

(4.3) Der Höhenschnittpunkt $H(x_H/y_H)$



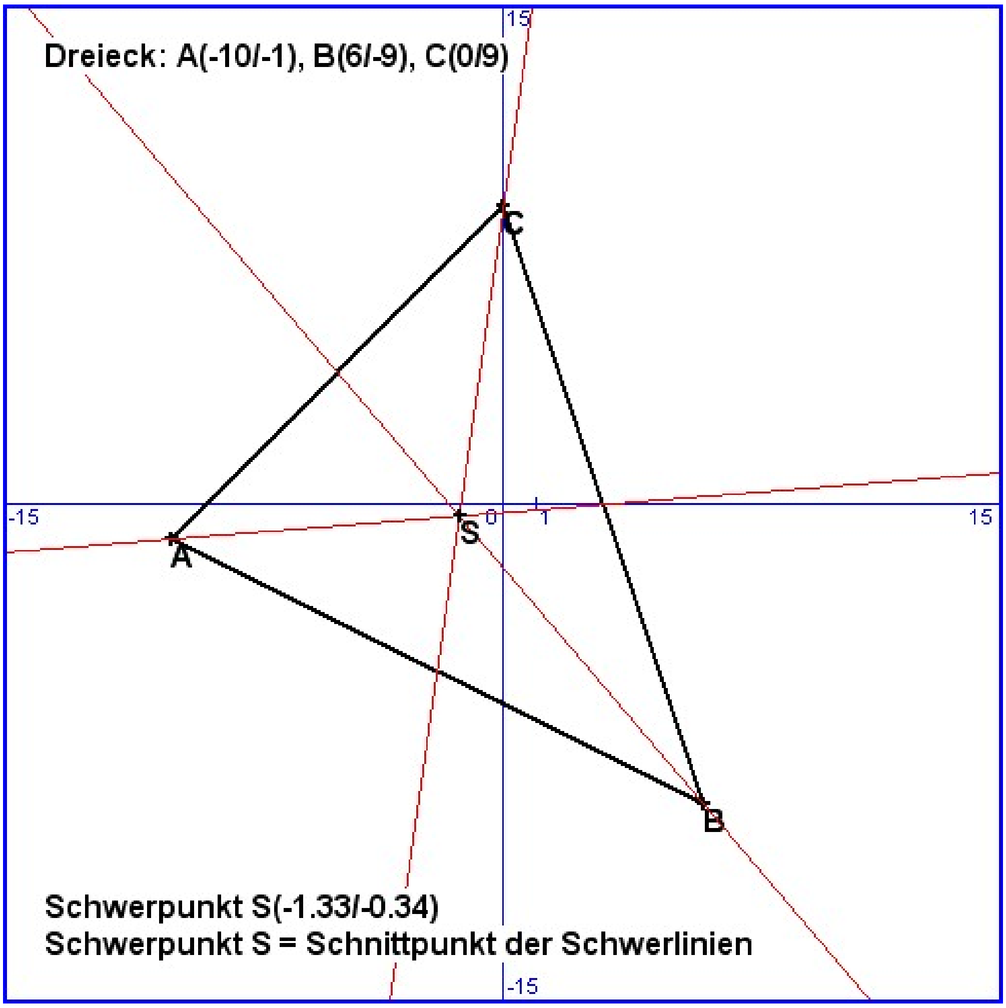
Der Höhenschnittpunkt H ist der Schnittpunkt der Höhen im Dreieck. Eine Höhe ist eine Gerade, welche auf eine Dreiecksseite normal steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt geht.

h_C ist die Höhe durch Eckpunkt C und n´ ist ein Normalvektor auf die Seite c. Dann gilt für die Höhe h_C: OX´ = OC´ + s*n´. In analoger Weise ermittelt man eine zweite Höhe des Dreiecks und schneidet sie mit der ersten Höhe. Das Ergebnis ist dann der Höhenschnittpunkt H.

(4.4) Der Schwerpunkt $S(x_S/y_S)$

Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt der Schwerlinien im Dreieck. Eine Schwerlinie ist eine Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt geht.

s_C ist die Schwerlinie durch den Eckpunkt C und den Mittelpunkt D der Seite c. OD´= $(^1/_2)$*(OA´+ OB´). Für die Schwerline s_C gilt OX´ = OD´ + s*DC´. In analoger Weise ermittelt man eine zweite Schwerlinie des Dreiecks und schneidet sie mit der ersten Schwer-linie. Das Ergebnis ist dann der Schwerpunkt S.



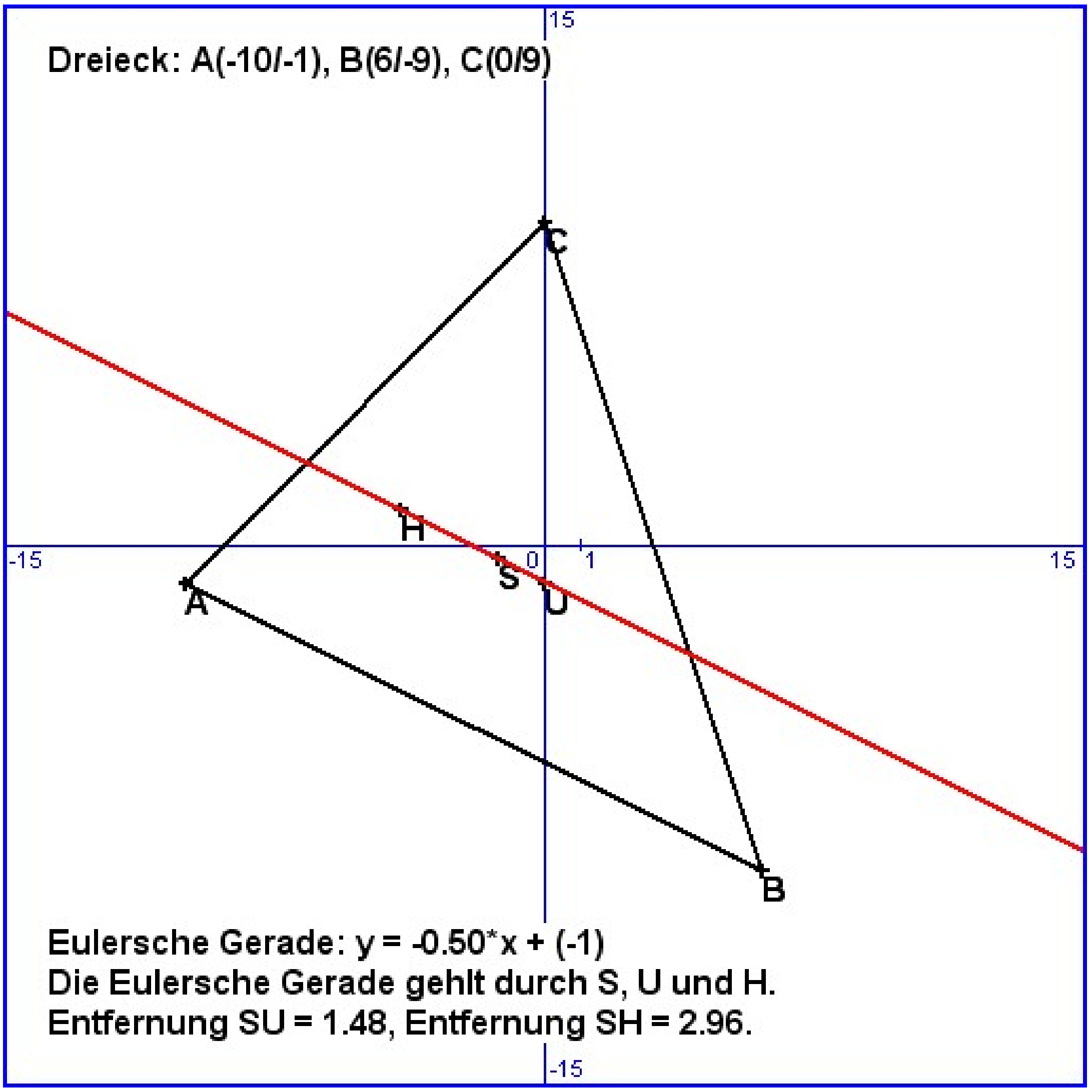
Für den Schwerpunkt gilt die Besonderheit, das er jede Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1 teilt. Damit kann er einfach berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
OS' &= OD' + (^1/_3) * DC' \\
&= OD' + (^1/_3) * (OC' - OD') \\
&= OD' + (^1/_3) * (OC' - (^1/_2) * (OA' + OB')) \\
&= OD' + (^1/_3) * (OC' - (^1/_2) * OA' - (^1/_2) * OB') \\
&= (^1/_2) * (OA' + OB') + (^1/_3) * (OC' - (^1/_2) * OA' - (^1/_2) * OB') \\
&= (^1/_2) * OA' + (^1/_2) * OB' + (^1/_3) * OC' - (^1/_6) * OA' - (^1/_6) * OB' \\
&= (^3/_6) * OA' + (^3/_6) * OB' + (^2/_6) * OC' - (^1/_6) * OA' - (^1/_6) * OB' \\
&= (^2/_6) * OA' + (^2/_6) * OB' + (^2/_6) * OC' \\
&= (^1/_3) * (OA' + OB' + OC')
\end{aligned}
$$

$$OS' = (^1/_3) * (OA' + OB' + OC')$$

(4.5) Die Eulersche Gerade

Die Eulersche Gerade e geht durch die drei merkwürdigen Punkte S, U und H. Dabei gilt SU : SH = 1 : 2.
Die Eulersche Gerade hat die Vektorgleichung OX´ = OS´ + s*SU´.

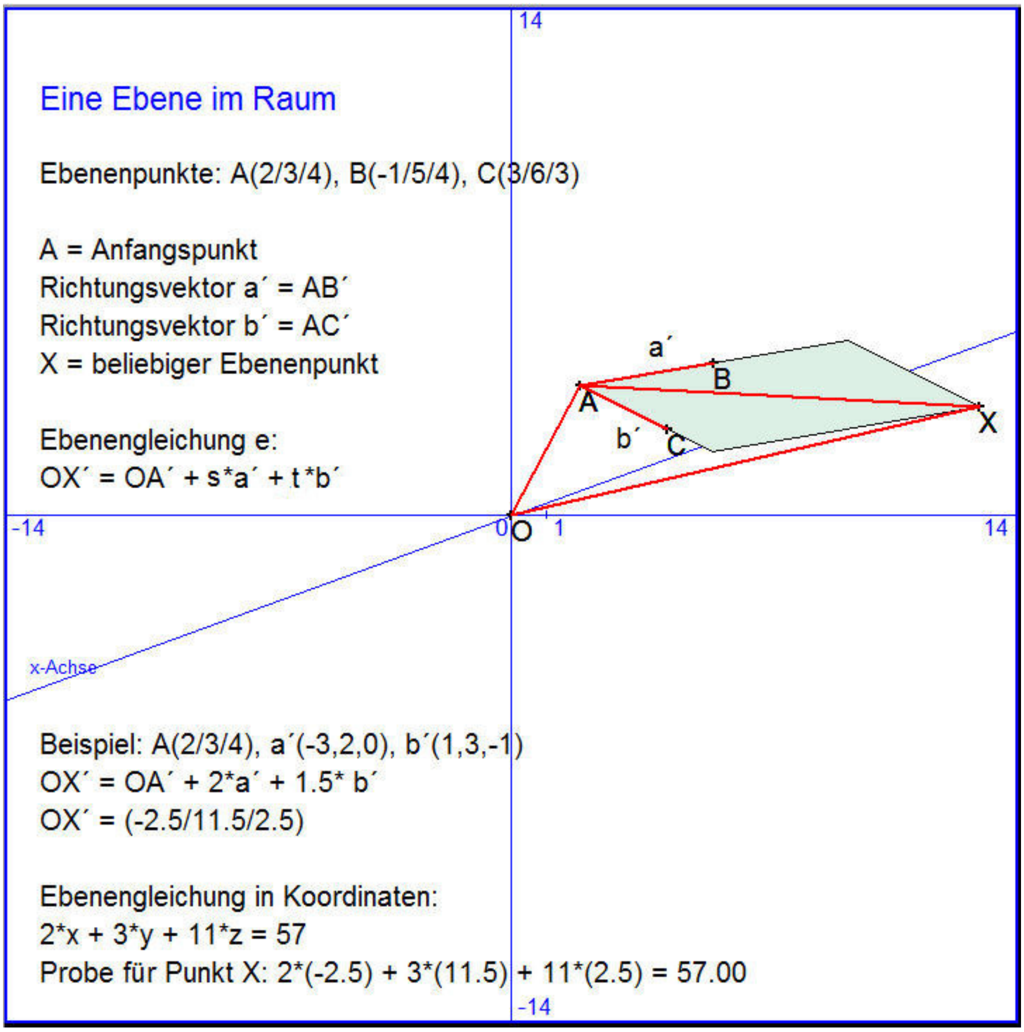


(5) Ebene und Gerade im Raum

(5.1) Eine Ebene im Raum

Eine Ebene e ist im Raum durch einen Anfangspunkt A und zwei voneinander linear unabhängige Richtungsvektoren a´ und b´ gegeben. Der Ortsvektor von jedem Punkt X auf der Ebene wird so erzeugt, dass zum Ortsvektor von A eine Linearkombination von a´ und b´ addiert wird. OX´ = OA´ + s*a´ + t*b´. Die Zahlen s und t werden als Parameter des Punktes X bezeichnet. Durchlaufen die Parameter voneinander unabhängig alle reellen Zahlen, so erhält man alle Punkte der Ebene e.

OX´ = OA´ + s*a´ + t*b´ (Vektorgleichung von e)



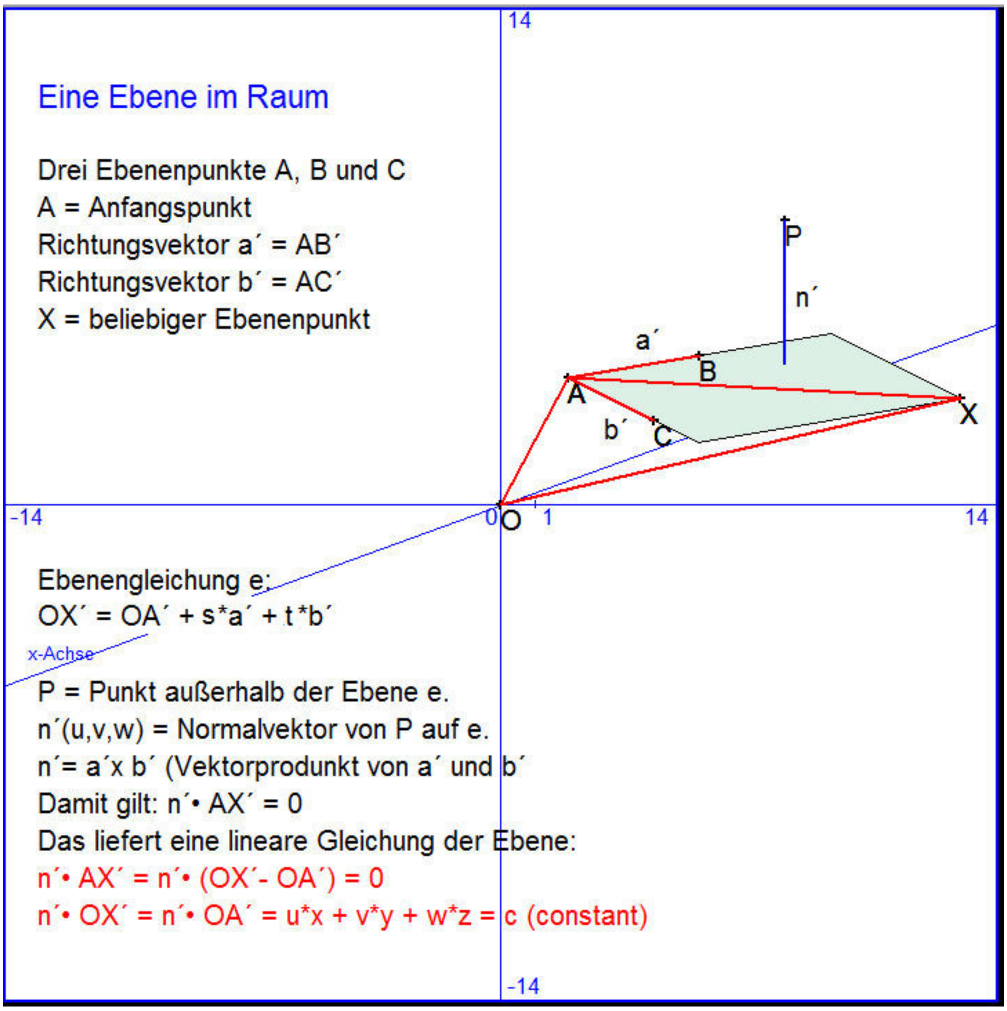
Ebene e mit A(2/3/4) und a´= (-3/2/0) und b´= (1/3/-1)
(x/y/z) = (2/3/4) + s*(-3/2/0) + t*(1/3/-1)
z.B.: (-2.5/11.5/2.5) = (2/3/4) + 2*(-3/2/0) + 1.5*(1/3/-1)
d.h. X(-2.5/11.5/2.5) ist ein Punkt der Ebene e.

Ist die Ebene e durch drei Punkte A, B, C gegeben, dann sind die Verbindungsvektoren AB´ und AC´ die Richtungsvektoren und die Vektorgleichung der Ebene lautet: OX´ = OA´ + s*AB´ + t*AC´. Spaltet man die Vektorgleichung in die Koordinatengleichungen auf und eliminiert die Parameter, erhält man die lineare Gleichung.

Ebene e durch A(2/3/4), B(-1/5/4), C(3/6/3).
Vektorgleichung: (x/y/z) = (2/3/4) + s*(-3/2/0) + t*(1/3/-1)
x = 2 - 3*s + t
y = 3 + 2*s + 3*t
z = 4 – t
2*x + 3*y + 11*z = 57. Das ist die lineare Gleichung der Ebene e.

Die Lösungsmenge {(x/y/z)} einer linearen Gleichung in drei Variablen entspricht den Punkten auf einer Ebene.

Es sei OX´ = OA´ + s*a´ + t*b´ die Vektorgleichung der Ebene.
Das vektorielle Produkt n´ = (a´× b´) liefert einen Normalvektor auf die Ebene. Für alle Ebenenpunkte X gilt dann: n´• AX´ = 0.
n´•(OX´- OA´) = 0
n´• OX´ = n´• OA´ = c = (constant)
Das ist die Normalvektorgleichung der Ebene e.

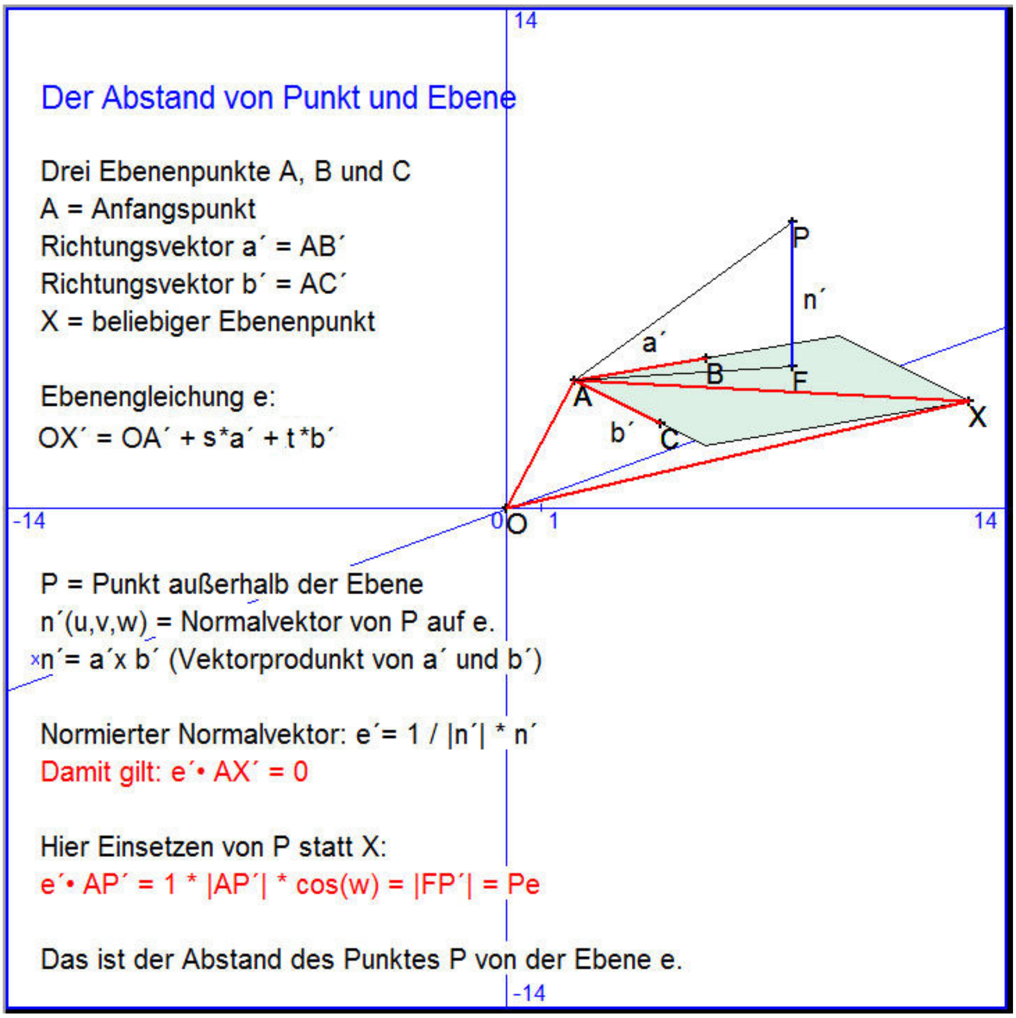


Ebene e durch A(2/3/4), B(-1/5/4), C(3/6/3).
Vektorgleichung: (x/y/z) = (2/3/4) + s*(-3/2/0) + t*(1/3/-1)

Das vektorielle Produkt (a´× b´) = (2/3/11) steht normal auf e.
Also gilt: (2/3/11)•(OX´- OA´) = (2/3/11)•((x/y/z)-(2/3/4)) = 0.
Multipliziert man die Normalvektorgleichung aus, so erhält man die lineare Gleichung der Ebene: (2/3/11)•(x-2/y-3/z-4) = 0.
2*(x - 2) + 3*(y - 3) + 11*(z - 4) = 0.
2*x + 3*y + 11*z = 57.

Für eine Ebene im Raum gilt, dass die Koeffizienten der linearen Gleichung die Koordinaten eines Normalvektors sind.

Mit dem normierten Normalvektor e´ = 1/|n´| * n´ spricht man dann von der "Hesseschen Normalvektorform": e´•(OX´- OA´) = 0. Setzt man in diese statt des Ebenenpunktes X einen Punkt P ein, der nicht auf der Ebene liegt, dann erhält man die Distanz d des Punktes P von der Ebene: e´•(OP´- OA´) = e´• AP´ = ±d. Das wird genau so bewiesen wie für die Gerade in der Ebene.



(5.2) Eine Gerade im Raum

Eine Gerade g ist im Raum (sowie in der Ebene) durch einen Punkt A und Richtungsvektor v´ gegeben. Der Ortsvektor von jedem Punkt X auf der Geraden wird dadurch erzeugt, dass zum Ortsvektor von A ein entsprechendes Vielfache t*v´ von v´ addiert wird. Dabei wird die Zahl t als der Parameter des Punktes X bezeichnet. Durchläuft t alle reellen Zahlen, so erhält man alle Punkte von g.

OX´ = OA´ + t*v´ (Vektorgleichung von g)

Gerade g mit A(2/3/1) und v´= (3/1/4)
(x/y/z) = (2/3/1) + t*(3/1/4).
z.B.: (8/5/9) = (2/3/1) + 2*(3/1/4), d.h. P(8/5/9) liegt auf g.

Ist die Gerade g durch zwei Punkte A und B gegeben, dann wird der Verbindungsvektor AB´ als Richtungsvektor v´ genommen und die Vektorgleichung der Geraden lautet: OX´ = OA´ + t*AB´.

Spaltet man die Vektorgleichung in die Koordinatengleichungen auf und eliminiert den Parameter, erhält man 2 Gleichungen für die Gerade: (x/y/z) = (2/3/1) + t*(3/1/4) wird aufgespaltet in:

x = 2 + 3*t
y = 3 + 1*t → t = y - 3
z = 1 + 4*t

Durch Einsetzen von t in die erste und dritte Gleichung erhält man zwei Gleichungen für die Gerade g:

x + 3*y = 11
4*y + z = 13

(I)   1*x + 3*y + 0*z = 11
(II) 0*x + 4*y + 1*z = 13

Eine Gerade im Raum wird daher durch zwei lineare Gleichungen beschrieben. Weil eine lineare Gleichung im Raum eine Ebene beschreibt, so erweist sich jede Gerade als der Durchschnitt von zwei Ebenen, was anschaulich auch direkt erkennbar ist.

Für zwei Gerade im Raum gibt es genau drei Lagemöglichkeiten:

(1) Sie sind identisch.
(2) Sie liegen auf einer Ebene (entweder schneidend oder parallel).
(3) Sie sind windschief.

Die Schnittmenge zweier Ebenen e1 und e2 im Raum ist eine Gerade g. Die Punkte der Geraden sind daher die Lösungsmenge {(X/Y/Z)} eines Systems von zwei linearen Gleichungen in drei Variablen.

a_x * X + a_y * Y + a_z * Z = d (Ebene e1)
b_x * X + b_y * Y + b_z * Z = e (Ebene e2)

Die Koeffizienten ($a_x/a_y/a_z$) und ($b_x/b_y/b_z$) sind die Koordinaten von zwei Normalvektoren a´ und b´ auf die beiden Ebenen und somit auch auf ihre Schnittgerade g. Sie erzeugen so eine Normalebene auf die Gerade.

Die räumliche Lage der beiden Ebenen e1 und e2 wird mit Hilfe ihrer Normalvektoren a´ und b´ bestimmt. Wenn die Normalvektoren parallel sind, dann liegen auch die Ebenen parallel zueinander und haben keine gemeinsame Schnittgerade g.

Bildet man das vektorielle Produkt der Normalvektoren n´= a´x b´, dann erhält man einen Vektor, der normal auf die Normalvektoren steht und somit ein Richtungsvektor der Schnittgeraden ist.

Einen Punkt P($p_x/p_y/p_z$) auf der Geraden erhält man beispielsweise dadurch, dass man die Gerade mit der <y,z>-Ebene schneidet, d.h. X = 0, a_y*Y + a_z*Z = d, b_y*Y + b_z*Z = e. Die Lösung dieses Systems liefert den Punkt P(0/p_y/p_z). Damit lautet die Vektorgleichung der Geraden, wo X ein beliebiger Geradenpunkt ist und s sein Parameter:

OX´ = OP´ + s*n´ (Vektorgleichung von g)

Beispiel:

```
-4*x +  1*y +  0*z = -26
 3*x + 12*y + 17*z =  62
```

Normalvektoren a´ = (-4/1/0) und b´ = (3/12/17).
n´ = a´x b´ = 17*(1/4/-3)

Ermittlung eines Punktes P($p_x/p_y/p_z$) auf g mit p_x = x = 0:
```
 1*y +  0*z = -26
12*y + 17*z =  62
```
Auflösen des Gleichungssystems ergibt: p_y = -26 und p_z = 22.
P(0/-26/22)

Vektorgleichung der Geraden g:
OX´ = (0/-26/22) + s*(1/4/-3)

Für s = 6 erhält man den Punkt Q(6/-2/4) auf der Geraden g.
Die Gerade geht durch die Punkte P(0/-26/22) und Q(6/-2/4).

(6) Lineare Gleichungssysteme

(6.1) Lineare Systeme in der Ebene

Ein lineares System in der Ebene besteht aus zwei Gleichungen in zwei Unbekannten X und Y. Wie bereits bekannt, ist die Lösungsmenge {(X/Y)} einer solchen Gleichung eine Gerade in der Ebene. Die zwei Gleichungen beschreiben daher zwei Gerade in der Ebene.

$a_x * X + a_y * Y = c$ (Gerade g)
$b_x * X + b_y * Y = d$ (Gerade h)

Wir wissen, dass die Vektoren a´ = (a_x/a_y) und b´ = (b_x/b_y) die Normalvektoren auf die Richtungsvektoren der zwei Geraden sind. Nur wenn sie nicht kollinear sind (d.h. nicht parallel liegen), dann spannen sie ein Parallelogramm auf, dessen Fläche F nicht Null ist. $F = |a_x*b_y - a_y*b_x| > 0$. Nur dann schneiden sich die zwei Geraden in einem Schnittpunkt S(x/y). Andernfalls sind sie parallel oder identisch. Den Ausdruck $(a_x*b_y - a_y*b_x)$ nennt man Determinante DET(a´,b´) der zwei Vektoren oder auch Systemdeterminante. Der Betrag der Determinante entspricht der Fläche des Parallelogramms.

Somit gilt folgender Hauptsatz:
Ein lineares Gleichungssystem in der Ebene ist nur dann eindeutig lösbar, wenn die Systemdeterminante DET(a´,b´) ungleich Null ist.

2*X - 3*Y = 5
5*X + Y = 21

Normalvektoren: a´ = (2/-3), b´ = (5/1).
Determinante: DET(a´,b´) = 2*1 - 5*(-3) = 17 > 0.
Das lineare System ist eindeutig lösbar. Schnittpunkt = S(4/1).

(6.2) Lineare Systeme im Raum

Drei Vektoren im Raum: a´=$(a_x/a_y/a_z)$, b´=$(b_x/b_y/b_z)$, c´=$(c_x/c_y/c_z)$.
Für das Kreuzprodukt d´ = (a´× b´) = $(d_x/d_y/d_z)$ gilt:

$$d_x = (a_y*b_z - a_z*b_y)$$
$$d_y = -(a_x*b_z - a_z*b_x)$$
$$d_z = (a_x*b_y - a_y*b_x)$$

Für das Spatprodukt z = (a´× b´)·c´ gilt:

$$z = (a_y*b_z - a_z*b_y)*c_x + (a_z*b_x - a_x*b_z)*c_y + (a_x*b_y - a_y*b_x)*c_z =$$
$$= a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y + a_x*b_y*c_z - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z$$

Dieser Ausdruck heißt auch Determinante DET(a´,b´,c´) der drei Vektoren. Ordnet man diese zeilenweise untereinander an, dann nennt man diese Anordnungsform eine Matrix. Zusätzlich wollen wir rechts neben der (3 x 3)-Systemmatrix noch die zwei linken Spalten anfügen, so dass eine (3 x 5)-Hilfsmatrix entsteht.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \\ c_x & c_y & c_z & c_x & c_y \end{array}$$

Eine Hauptdiagonale einer Matrix geht von links oben nach rechts unten, eine Nebendiagonale von links unten nach rechts oben. Die Determinante DET(a´,b´,c´) wird nun nach der Merkregel von "Sarrus" berechnet: Man addiert die Produkte der Zahlen in den drei Hauptdiagonalen und subtrahiert davon die Produkte der Zahlen in den drei Nebendiagonalen.

DET(a´,b´,c´) =
$$= a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z$$

Die Determinante DET(a´,b´,c´) der drei Vektoren a´,b´,c´ ist gleich dem Spatprodukt (a´× b´)·c´ und dessen Betrag ist gleich dem Volumen V(a´,b´,c´) des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds (Spat). Das ist ein "schiefer Quader", dessen Kanten von den drei Vektoren gebildet werden, so dass alle seine Flächen Parallelogramme sind.

Ein lineares System im Raum besteht aus drei Gleichungen in drei Unbekannten X, Y, Z. Wie bereits bekannt, ist die Lösungsmenge {(X/Y/Z)} einer solchen Gleichung eine Ebene im Raum. Die drei Gleichungen beschreiben daher drei Ebenen im Raum.

$$\begin{array}{llll} a_x * X + & a_y * Y & + a_z * Z = & d \quad \text{(Ebene e1)} \\ b_x * X + & b_y * Y & + b_z * Z = & e \quad \text{(Ebene e2)} \\ c_x * X + & c_y * Y & + c_z * Z = & f \quad \text{(Ebene e3)} \end{array}$$

Die Vektoren a´ = $(a_x/a_y/a_z)$, b´ = $(b_x/b_y/b_z)$ und c´ = $(c_x/c_y/c_z)$ sind Normalvektoren auf die drei Ebenen. Nur wenn diese nicht komplanar sind (d.h. nicht in einer Ebene liegen), dann spannen sie ein Parallelepiped auf, dessen Volumen V = |DET(a´,b´,c´)| ungleich Null ist. Nur dann schneiden die drei Ebenen einander in einem Schnittpunkt S(x/y/z).

Somit gilt folgender Hauptsatz:
Ein lineares Gleichungssystem im Raum ist nur dann eindeutig lösbar, wenn die Systemdeterminante DET(a´,b´,c´) ungleich Null ist.

Beispiel:
```
Beispiel:  2*X + 3*Y +   Z =  0  [I]
             X +   Y +   Z = -1  [II]
           5*X -   Y + 2*Z =  1  [III]
```

Normalvektoren der Ebenen: a´ = (2/3/1), b´ = (1/1/1), c´= (5/-1/2)
DET(a´,b´,c´) = 2*1*2 + 3*1*5 + 1*1*(-1) - 5*1*1 - (-1)*1*2 - 2*1*3
= 4 + 15 - 1 - 5 + 2 - 6 = 9 > 0.
Also ist in diesem Beispiel das lineare System eindeutig lösbar.
Aus [I] folgt: Z = -2*X - 3*Y. Substitution von Z in [II] und [III] ergibt ein System in nur mehr zwei Variablen:

```
-X - 2*Y  = -1  [IV]
 X - 7*Y  =  1  [V]
```

Addiert man die Gleichungen [IV] und [V], dann erhält man -9*Y = 0. Also gilt Y = 0, X = 1 und Z = - 2, d.h. S(1/0/-2) ist der Schnittpunkt der drei Ebenen. Setzt man diesen Punkt in die Gleichungen der Ebenen ein, dann ergeben sich drei wahre Aussagen.

Eine universelle Lösungsmethode ist das Eliminationsverfahren von "Gauss". Dieses wird mit nachfolgendem Beispiel demonstriert.

```
[G1]   2*X + 6*Y - 2*Z = 8
[G2]   3*X - 9*Y + 3*Z = 6
[G3]   4*X - 4*Y - 2*Z = 4
```

Elimination von von X aus [G2] und aus [G3]:
Erstens wird [G2] durch [G2]-($^{3}/_{2}$)*[G1] äquivalent ersetzt.
Zweitens wird [G3] durch [G3]-($^{4}/_{2}$)*[G1] äquivalent ersetzt.

```
[G1]   2*X + 6*Y - 2*Z =   8
[G2]       -18*Y + 6*Z =  -6
[G3]       -16*Y + 2*Z = -12
```

Elimination von von Y aus [G3]:
Dazu wird [G3] durch [G3]-($^{-16}/_{-18}$)*[G2] äquivalent ersetzt.

```
[G1]   2*X + 6*Y - 2*Z =   8
[G2]       -18*Y + 6*Z =  -6
[G3]             -10*Z = -20
```

Damit ist das System auf "Halbdiagonalform" gebracht. Aus [G3] folgt Z = 2. Aus [G2] folgt Y = 1, und aus [G3] folgt X = 3.
Die Lösungen sind daher X = 3, Y = 1, Z = 2. Das entspricht dem Schnittpunkt S(3/1/2) der drei Ebenen. Setzt man die Lösungen in die Ebenengleichungen ein, so erhält man drei wahre Aussagen und damit die Bestätigung für die Richtigkeit der Lösungen.

(6.3) Die Cramersche Regel

Die Entwicklung eines allgemeinen Lösungsverfahrens.

$$a_x * X + a_y * Y + a_z * Z = d \quad (I)$$
$$b_x * X + b_y * Y + b_z * Z = e \quad (II)$$
$$c_x * X + c_y * Y + c_z * Z = f \quad (III)$$

Aus Gleichung (I) kann zuerst X explizit dargestellt werden:
$X = d/a_x - a_y/a_x * Y - a_z/a_x * Z$

Nun wird X in die Gleichungen (II) und (III) eingesetzt. Dadurch enthalten diese zwei Gleichungen nur mehr die beiden Variablen Y und Z. Stellt man aus Gleichung (II) die Variable Y explizit dar und setzt sie in Gleichung (III) ein, dann enthält die Gleichung (III) nur mehr die Variable Z. Diese kann dann ausgerechnet werden. Die etwas aufwendige Rechnung liefert schlussendlich folgendes Ergebnis (x/y/z):

$$x = \frac{d*b_y*c_z + a_y*b_z*f + a_z*e*c_y - a_z*b_y*f - d*b_z*c_y - a_y*e*c_z}{a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z}$$

$$y = \frac{a_x*e*c_z + d*b_z*c_x + a_z*b_x*f - a_z*e*c_x - a_x*b_z*f - d*b_x*c_z}{a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z}$$

$$z = \frac{a_x*b_y*f + a_y*e*c_x + d*b_x*c_y - d*b_y*c_x - a_x*e*c_y - a_y*b_x*f}{a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z}$$

Diese Lösungsformeln können mit Hilfe von Matrizen einfacher dargestellt werden. Die Koeffizienten der Gleichungen werden als Zeilen einer Matrix geschrieben werden. Man unterscheidet dabei die Systemmatrix A und die erweiterte Matrix A_e.

Systemmatrix A: $\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}$ Erweiterte Matrix A_e: $\begin{matrix} a_x & a_y & a_z & d \\ b_x & b_y & b_z & e \\ c_x & c_y & c_z & f \end{matrix}$

d´ = (d/e/f) ist der rechte Spaltenvektor des Systems.
x´ = (x/y/z) ist der Lösungsvektor des Systems.

In Matrix-Schreibweise lautet das lineare Gleichungssystem:
$A * x´ = d´$

Für die Determinante der Systemmatrix gilt dabei:
$DET(A) = a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z$

DET(A) ist die Determinante der Systemmatrix. DET(A_1) ist die Determinante jener Matrix, die man erhält, wenn man die erste Spalte der Systemmatrix durch die rechte Spalte der erweiterten Matrix ersetzt. In analoger Weise dazu werden die zwei anderen Determinanten DET(A_2) und DET(A_3) gebildet.

Jede dieser Determinanten wird mit Hilfe der Merkregel von "Sarrus" ermittelt. Dadurch erhält man für die oben ausgerechneten Lösungen X, Y und Z des linearen Gleichungssystems allgemeine Formeln in der Determinanten-Schreibweise. In den Formeln kommen nur die gegebenen Koeffizienten des Systems vor.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \\ c_x & c_y & c_z & c_x & c_y \end{array}$$

$$DET(A) = a_x*b_y*c_z + a_y*b_z*c_x + a_z*b_x*c_y - a_z*b_y*c_x - a_x*b_z*c_y - a_y*b_x*c_z$$

$$\begin{array}{ccc|cc} d & a_y & a_z & d & a_y \\ e & b_y & b_z & e & b_y \\ f & c_y & c_z & f & c_y \end{array}$$

$$DET(A_1) = d*b_y*c_z + a_y*b_z*f + a_z*e*c_y - a_z*b_y*f - d*b_z*c_y - a_y*e*c_z$$

$$\begin{array}{ccc|cc} a_x & d & a_z & a_x & d \\ b_x & e & b_z & b_x & e \\ c_x & f & c_z & c_x & f \end{array}$$

$$DET(A_2) = a_x*e*c_z + d*b_z*c_x + a_z*b_x*f - a_z*e*c_x - a_x*b_z*f - d*b_x*c_z$$

$$\begin{array}{ccc|cc} a_x & a_y & d & a_x & a_y \\ b_x & b_y & e & b_x & b_y \\ c_x & c_y & f & c_x & c_y \end{array}$$

$$DET(A_3) = a_x*b_y*f + a_y*e*c_x + d*b_x*c_y - d*b_y*c_x - a_x*e*c_y - a_y*b_x*f$$

Mit dieser Schreibweise können die oben ausgerechneten allgemeinen Lösungsformeln folgendermaßen dargestellt werden:

$$x = DET(A_1) / DET(A)$$

$$y = DET(A_2) / DET(A)$$

$$z = DET(A_3) / DET(A)$$

Diese Lösungsformeln werden auch als "Cramersche Regel" bezeichnet.

Die "Cramersche Regel" kann statt durch Ausrechnung sehr elegant mit Hilfe der Matrizenrechnung bewiesen werden. Der Beweis wird nur für die erste Variable X geführt. Für die anderen Variablen erfolgt er in analoger Weise.

Zuerst wird eine neue Matrix M so gebildet, dass man die erste Spalte der Einheitsmatrix E durch den Lösungsvektor x´= (x/y/z) ersetzt. Dabei gilt offensichtlich DET(M) = x. Dann multipliziert man die Systemmatrix A mit der Matrix M.

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x*x+a_y*y+a_z*z & a_y & a_z \\ b_x*x+b_y*y+b_z*z & b_y & b_z \\ c_x*x+c_y*y+c_z*z & c_y & c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a_y & a_z \\ e & b_y & b_z \\ f & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

Also gilt: $A * M = A_1$. Für die entsprechenden Determinanten gilt:

$DET(A) * DET(M) = DET(A_1)$
$DET(M) = x$
$DET(A) * x = DET(A_1)$
$x = DET(A_1) / DET(A)$

<u>Erstes Beispiel</u>:

```
2*X + 3*Y +   Z =  0
  X +   Y +   Z = -1
5*X -   Y + 2*Z =  1
```

Hilfsmatrix:

```
2  3  1 |  2  3
1  1  1 |  1  1
5 -1  2 |  5 -1
```

DET(A) = 4 + 15 + (-1) - 5 - (-2) - 6 = 9 > 0
Also ist dieses lineare System eindeutig lösbar.

$DET(A_1) = 0 + 3 + 1 – 1 – 0 – (-6) = 9$, $x = 9/9 = 1$
$DET(A_2) = -4 + 0 + 1 – (-5) – 2 – 0 = 0$, $y = 0/9 = 0$
$DET(A_3) = 2 - 15 + 0 – 0 – 2 – 3 = -18$, $z = -18/9 = -2$

<u>Zweites Beispiel</u>:

```
 4*X - 2*Y + 6*Z =  4
   X +   Y +   Z =  1
-5*X + 4*Y - 8*Z = -5
```

Hilfsmatrix:

```
 4 -2  6 |  4 -2
 1  1  1 |  1  1
-5  4 -8 | -5  4
```

DET(A) = -32 + 10 + 24 + 30 - 16 - 16 = 0
Also ist dieses lineare System NICHT eindeutig lösbar.

(7) Sechs Aufgaben der analytischen Geometrie

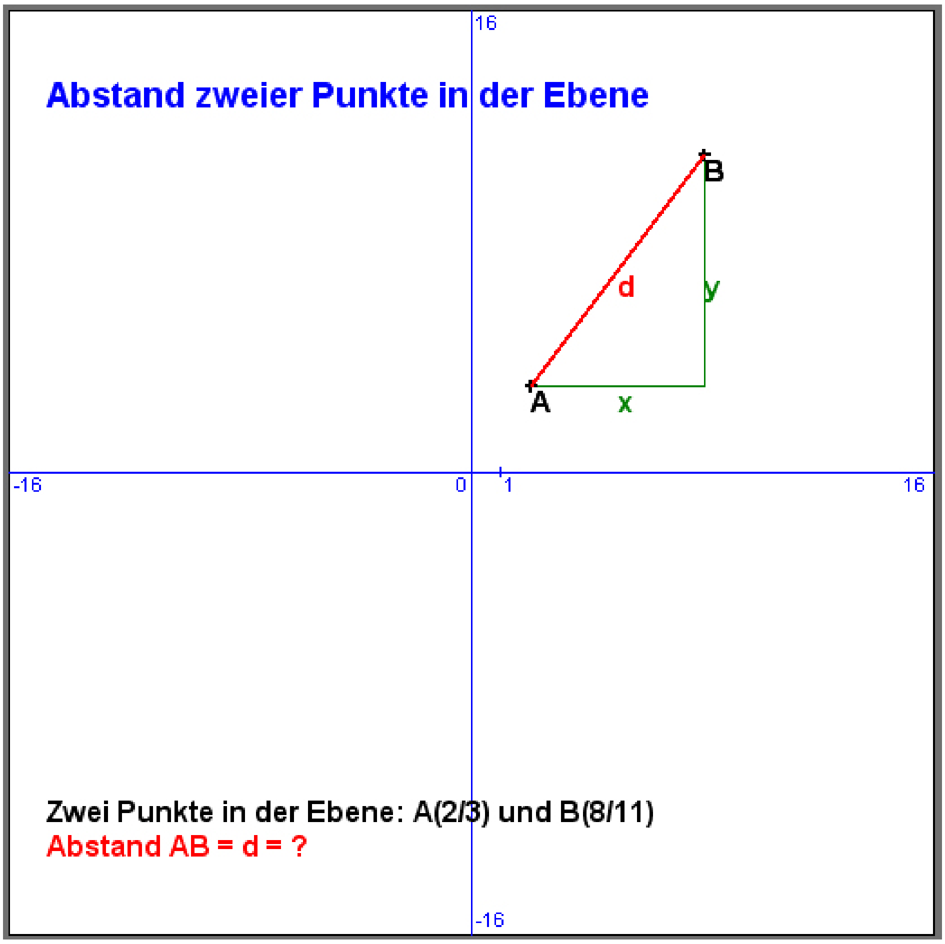
(7.1) Der Abstand zweier Punkte in der Ebene und im Raum

Die Punkte A und B sind in der Ebene gegeben.
$A(a_x/a_y)$ und $B(b_x/b_y)$.
Im Raum kommt noch die z-Koordinate dazu.

Der Verbindungsvektor AB´ ist die Differenz der Ortsvektoren:
AB´ = OB´ - OA´ = (x/y)
$x = (b_x - a_x)$, $y = (b_y - a_y)$

Die Länge des Verbindungsvektors ist der Abstand der beiden Punkte:

d = |AB´| = sqrt(x² + y²)



(7.2) Schnitt von Ebene und Gerade

Die Ebene e geht durch die Punkte A, B, C.

```
OX´ = OA´ + r*AB´ + s*AC´
```

Die Gerade g geht durch die Punkte D, E.

```
OX´ = OD´ + t*DE´
```

Schnittpunkt S von Ebene e mit Gerade g.

```
OS´ = OA´ + r*AB´ + s*AC´
OS´ = OD´ + t*DE´
```

Gleichsetzen der beiden Vektorformeln.

```
OA´ + r*AB´ + s*AC´ = OD´ + t*DE´
r*AB´ + s*AC´ - t*DE´ = AD´
```

Spaltet man diese Vektorgleichung in drei Koordinatengleichungen auf, dann erhält man ein lineares Gleichungssystem in den drei Variablen r, s und t. Mit der Lösung t gilt dann OS´ = OD´ + t* DE´.

Schnitt von Ebene und Gerade
(Alle Werte auf zwei Dezimalen gerundet)

Ebenenpunkte : A(3/1/2), B(5/0/4), C(0/2/1)
Geradenpunkte: D(0/5/1), E(3/2/1)

Ebenengleichung e:
1.00 * x + 4.00 * y + 1.00 * z = 9.00

Geradengleichungen g:
(I): 1.00 * x + 1.00 * y + 0.00 * z = 5.00
(II): 0.00 * x + 0.00 * y + 1.00 * z = 1.00

Schnittpunkt S(4/1/1)
Schnittwinkel w = 30°

w = 90° - ß. Dabei ist ß jener Winkel, welchen der Normalvektor auf die Ebene mit der Geraden bildet.

Probe (mit etwaigen Rundungsfehlern):
S liegt auf der Ebene: 9 = 9
S liegt auf der Geraden (I) : 5 = 5
S liegt auf der Geraden (II): 1 = 1

(7.3) Abstand von Punkt und Ebene

Die Ebene e geht durch die Punkte A, B, C.

    OX´ = OA´ + r*AB´ + s*AC´

Der Punkt P liegt außerhalb der Ebene e.

Normale Gerade (Lot) n von P auf die Ebene e.

    OX´ = OP´ + t*(AB´ x AC´)

Schnittpunkt S von Gerade n mit Ebene e.

    OA´ + r*AB´ + s*AC´ = OP´ + t*(AB´ x AC´)
    r*AB´ + s*AC´ - t*(AB´ x AC´) = AP´

Auflösen der Vektorgleichung und OS´ ermitteln.

    OS´ = OA´ + r*AB´ + s*AC´

Normalabstand d des Punktes P von e.

    d = Pe = |PS´|

Abstand von Punkt und Ebene
(Alle Werte auf zwei Dezimalen gerundet)

Ebenenpunkte: A(3/1/2), B(5/0/4), C(0/2/1)
Ein Punkt im Raum: P(0/5/1)

Ebenengleichung e:
1.00 * x + 4.00 * y + 1.00 * z = 9.00

Lotrechte Gerade n vom Punkt P auf Ebene e.
S = Schnittpunkt (Lotfußpunkt) von n und e.

Lotfußpunkt: S(-0.67/2.33/0.33)
Abstand: Pe = PS = 2.83

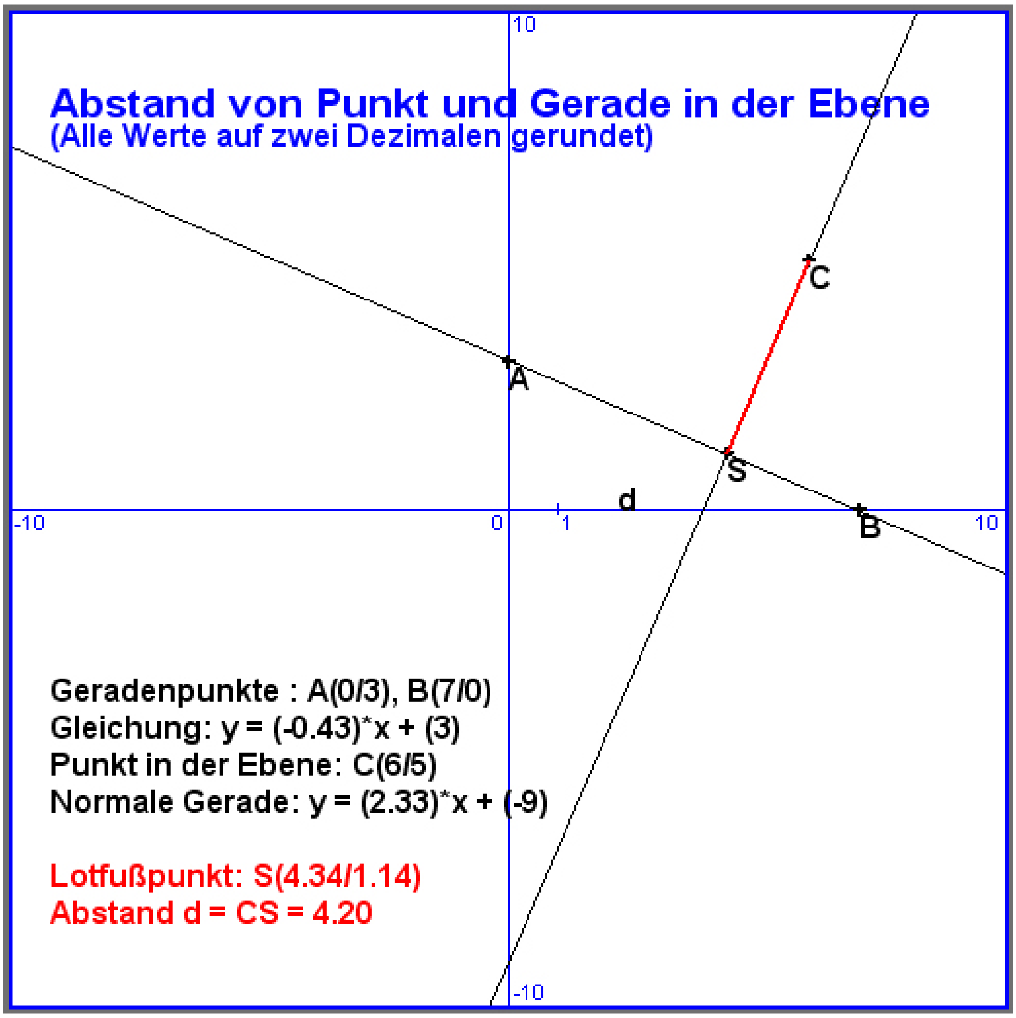
Probe (mit etwaigen Rundungsfehlern):
S liegt auf der Ebene: 8.98 = 9

(7.4.1) Abstand von Punkt und Gerade in der Ebene

Eine Gerade g geht durch zwei Punkte A und B.
Ein dritter Punkt C liegt nicht auf der Geraden g.

Problemlösung in der Ebene:

Man errichtet eine Gerade n (Lot) durch
den Punkt C und normal auf die Gerade g.
S ist dann der Schnittpunkt von n und g.
CS = Abstand von Punkt C und Gerade g.



(7.4.2) Abstand von Punkt und Gerade im Raum

Eine Gerade g geht durch zwei Punkte A und B.
Ein dritter Punkt C liegt nicht auf der Geraden g.

Problemlösung im Raum:

Man errichtet eine Ebene e durch den
Punkt C und normal auf die Gerade g.
S ist dann der Schnittpunkt von e und g.
CS = Abstand von Punkt C und Gerade g.

Abstand von Punkt und Gerade im Raum
(Alle Werte auf zwei Dezimalen gerundet)

Geradenpunkte: A(9/1/3) und B(12/5/-2)

Geradengleichungen g:
(I): 4.00 * x + -3.00 * y + 0.00 * z = 33.00
(II): 3.00 * x + 4.00 * y + 5.00 * z = 46.00

Punkt im Raum: C(5/4/3)

Normalebene e auf die Gerade g durch den Punkt C:
Normalebene: 3.00 * x + 4.00 * y + -5.00 * z = 16.00

Der Schnittpunkt S der Normalebene e mit der Geraden g
ist der Fußpunkt des Lotes von Punkt C auf die Gerade g.

Lotfußpunkt: S(9/1/3)
Abstand Cg = CS = 5

Probe (mit etwaigen Rundungsfehlern):
S liegt auf Gerade g, weil 33 = 33 und 46 = 46.
S liegt auf Normalebene e, weil 16 = 16.

(7.5) Zwei Gerade im Raum

```
Die Gerade g geht durch die Punkte A und B.
Die Gerade h geht durch die Punkte C und D.
    g: OX´ = OA´ + r*AB´
    h: OX´ = OC´ + s*CD´
Ebene e durch g und parallel zu h.
    OX´ = OA´ + r*AB´ + s*CD´
Normale Gerade n von C auf die Ebene e.
    OX´ =  OC´ + t*(AB´ x CD´)
Schnittpunkt S von Gerade n mit Ebene e.
    OA´ + r*AB´ + s*CD´ = OC´ +  t*(AB´ x CD´)
    r*AB´ + s*CD´ - t*(AB´ x CD´) = AC´
Auflösen der Vektorgleichung und OS´ ermitteln.
    OS´ = OA´ + r*AB´ + s*CD´
Normalabstand d der beiden Geraden.
    d = |CS´|
Wenn die drei Vektoren AB´, AC´, CD´ nicht
komplanar sind, sind die Geraden windschief.
Überprüfung mit Spatprodukt (AB´x AC´)·CD´.
```

Zwei Gerade im Raum
(Alle Werte auf zwei Dezimalen gerundet)

Erste Gerade g durch A(6/1/7) und B(8/1/6):
(I): 0.00 * x + 1.00 * y + 0.00 * z = 1.00
(II): 1.00 * x + 0.00 * y + 2.00 * z = 20.00

Zweite Gerade h durch C(3/0/0) und D(1/3/2):
(I): 3.00 * x + 2.00 * y + 0.00 * z = 9.00
(II): 4.00 * x + -6.00 * y + 13.00 * z = 12.00

Hilfsebene e durch g und parallel zu h:
3.00 * x + -2.00 * y + 6.00 * z = 58.00

Hilfsgerade n durch Punkt C und normal auf Ebene e:
(I): -2.04 * x + -3.02 * y + 0.00 * z = -6.12
(II): 18.24 * x + -12.32 * y + -13.28 * z = 54.72

Schnittpunkt S der Hilfsgeraden n mit der Ebene e:
Schnittpunkt S(6.02/-2.04/6.04)

Die beiden Geraden g und h sind windschief.
Normalabstand der beiden Geraden d = CS = 7.02

(7.6) Schnittwinkel von Ebenen

Eine Ebene im Raum entspricht einer linearen Gleichung in drei Variablen. Die Koeffizienten der Gleichung sind die Koordinaten eines Normalvektors auf die Ebene.

Die Normalvektoren von zwei Ebenen im Raum schließen einen Winkel ein, der auch der Schnittwinkel der beiden Ebenen ist, weil Normalwinkel immer gleich groß sind.

Der Schnittwinkel von zwei Ebenen
(Alle Werte auf zwei Dezimalen gerundet)

Punkte der Ebene e: A(3/1/2), B(5/0/4), C(0/2/1)
Punkte der Ebene f: D(-2/5/0), E(0/-3/4), F(2/3/-1)

Ebenengleichung e:
1.00 * x + 4.00 * y + 1.00 * z = 9.00
N(1/4/1) Normalvektor auf die Ebene e.

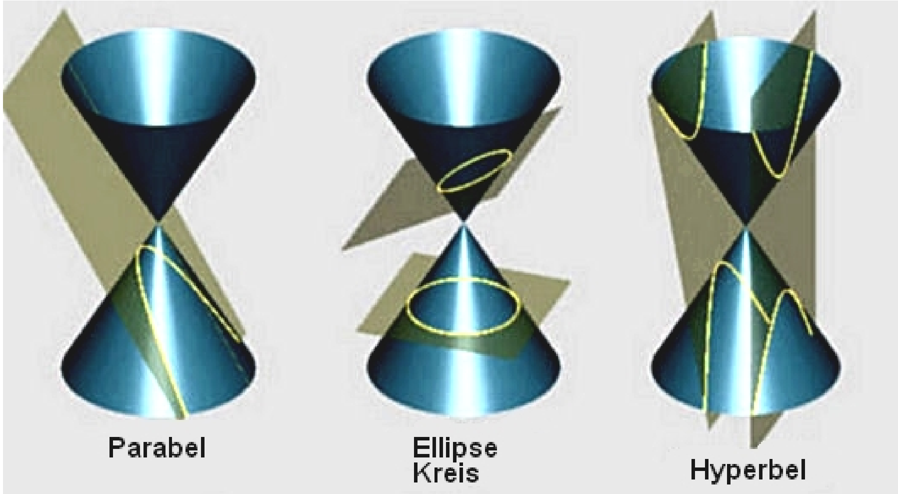
Ebenengleichung f:
8.00 * x + 9.00 * y + 14.00 * z = 29.00
M(8/9/14) Normalvektor auf die Ebene f.

Die Normalvektoren schließen den Winkel 42.24° ein.
Winkel zwischen den Ebene w = 42.24°

KEGELSCHNITTE

Definition der Kegelschnitte [56]
Gleichungen von Kreis und Tangente [60]
Die Gleichung der Ellipse [62]
Der Leitkreis der Ellipse [63]
Die Evolute der Ellipse [64]
Kegelschnitt und Gerade, Theorie [68]
Pol und Polare der Ellipse [72]
Die Leitlinien der Ellipse [73]
Formeln für Hyperbel und Parabel [74]
Kegelschnitt und Gerade, Beispiele [75]
Tangenten IN einem Kurvenpunkt [77]
Tangenten VON einem Punkt [79]
Schnitt zweier Kegelschnitte [80]
Kegelschnitt und Schmiegkreise [82]
Scheitelgleichung der Kegelschnitte [84]

Definition der Kegelschnitte



Was ist ein Kegelschnitt ?

Ein Kegelschnitt ist eine Kurve, die entsteht, wenn man die Oberfläche eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene schneidet.

Die Lage der Ebene wird beschrieben, indem man den Winkel w zwischen Schnittebene und Kegelachse mit dem Öffnungswinkel z des Kegels vergleicht.

Wenn die Kegelspitze nicht in der Ebene liegt, können folgende Schnittlinien entstehen:

(1) Eine Ellipse, wenn die Schnittebene zu keiner Mantellinie des Kegels parallel ist, d.h. $w > z/2$. Für $w = 90°$ entsteht ein Kreis.

(2) Eine Parabel, wenn die Schnittebene zu genau einer Mantellinie des Kegels parallel ist, d.h. $w = z/2$.

(3) Eine Hyperbel, wenn die Schnittebene zu zwei Mantellinien des doppelten Kegels parallel ist, d.h. $w < z/2$.

Wenn die Kegelspitze in der Ebene liegt, entstehen so genannte ausgeartete Schnittkurven: Ein Punkt, eine Gerade oder auch zwei einander schneidende Geraden.

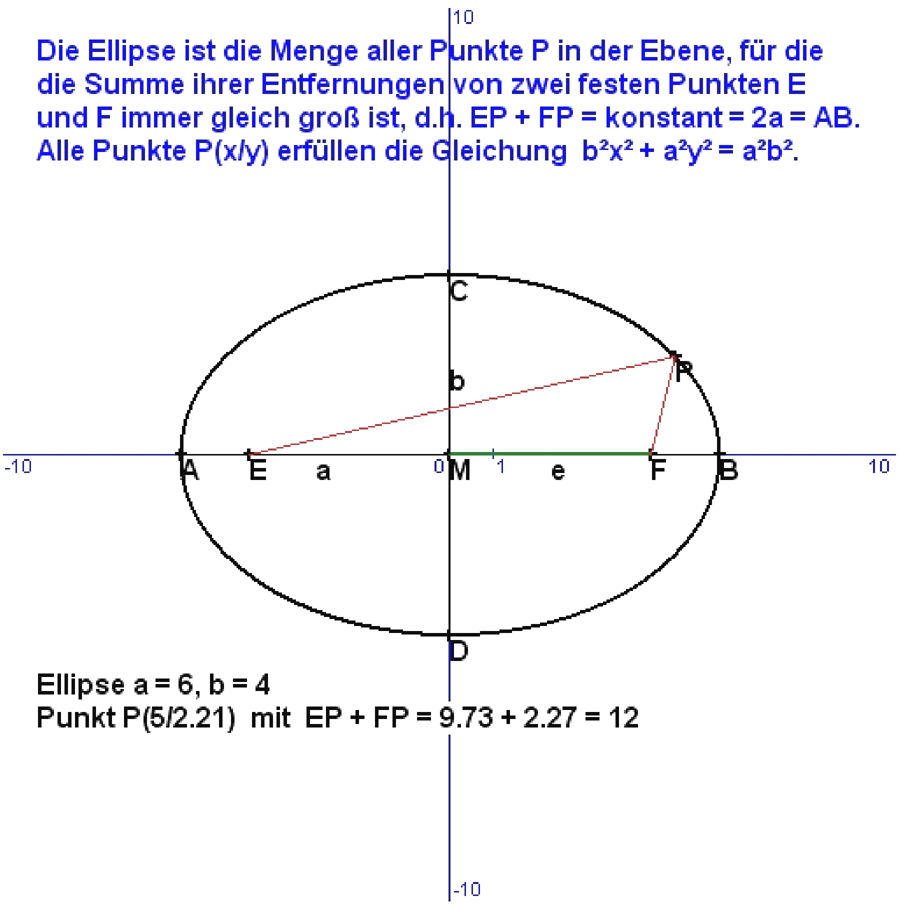
Die Ellipse - Übersicht

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte P in der Ebene, für welche die Summe ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten E und F immer gleich groß ist, d.h. EP + FP = konstant = 2a.

Es wird ein Koordinatensystem festgelegt, so dass sich die Kurve in Hauptlage befindet. Dann gelten folgende Bezeichnungen:

Beliebiger Kurvenpunkt P(x/y)
Koordinatenursprung (Mittelpunkt der Kurve) M(0/0)
Feste Brennpunkte E(-e/0), F(e/0), Brennweite e = EF/2
Entfernungen PE und PF (Leitstrecken bzw. Leitstrahlen)
Konstante Summe der Leitstrecken: PE + PF = 2a
Hauptachse a
Nebenachse b mit $b^2 = e^2 - a^2$
Hauptscheitel A(-a/0), B(a/0)
Nebenscheitel C(0/b); D(0/-b)
Exzentrizität k = e/a mit k < 1, weil e < a
Kurvenpunkt über dem Brennpunkt Q(e/p) mit $p = b^2/a$ (Parameter)

Die Ellipsengleichung:
Alle Kurvenpunkte P(x/y) erfüllen die Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.



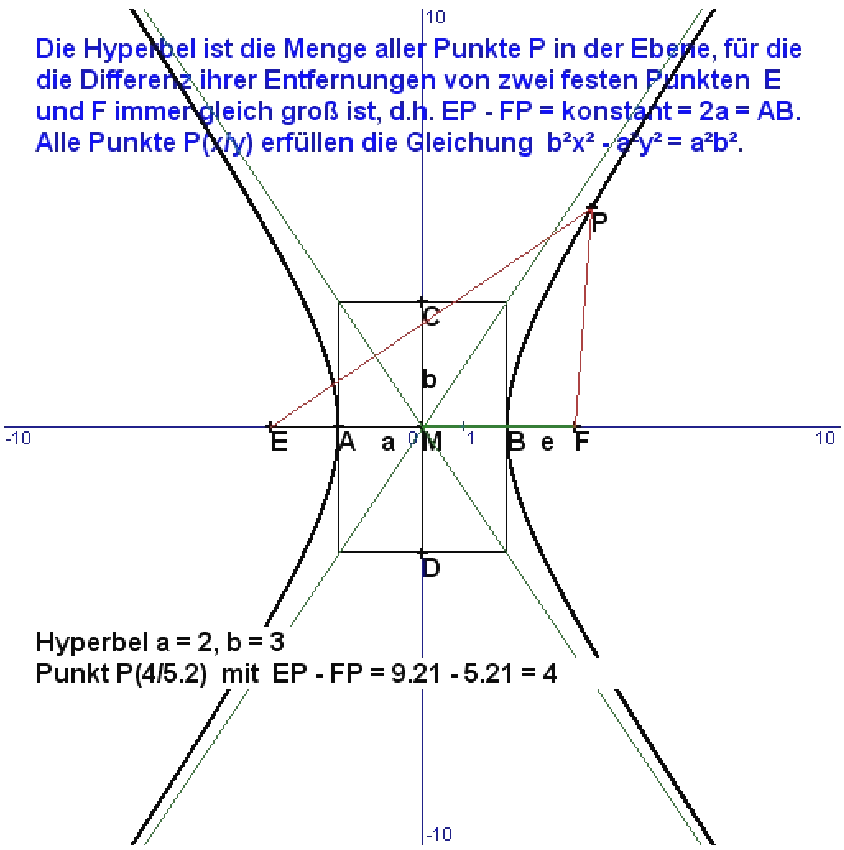
Die Hyperbel - Übersicht

Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte P in der Ebene, für welche die Differenz ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten E und F immer gleich groß ist, d.h. EP - FP = konstant = 2a.

Es wird ein Koordinatensystem festgelegt, so dass sich die Kurve in Hauptlage befindet. Dann gelten folgende Bezeichnungen:

Beliebiger Kurvenpunkt P(x/y)
Koordinatenursprung (Mittelpunkt der Kurve) M(0/0)
Feste Brennpunkte E(-e/0), F(e/0), Brennweite e = EF/2
Entfernungen PE und PF (Leitstrecken bzw. Leitstrahlen)
Konstante Differenz der Leitstrecken: PE - PF = 2a
Hauptachse a
Nebenachse b mit $b^2 = e^2 - a^2$
Hauptscheitel A(-a/0), B(a/0)
Nebenscheitel C(0/b), D(0/-b)
Exzentrizität k = e/a mit k > 1, weil e > a
Kurvenpunkt über dem Brennpunkt Q(e/p) mit $p = b^2/a$ (Parameter)
Asymptoten (Diagonalen des Achsenrechtecks) as1, as2

Die Hyperbelgleichung:
Alle Kurvenpunkte P(x/y) erfüllen die Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.



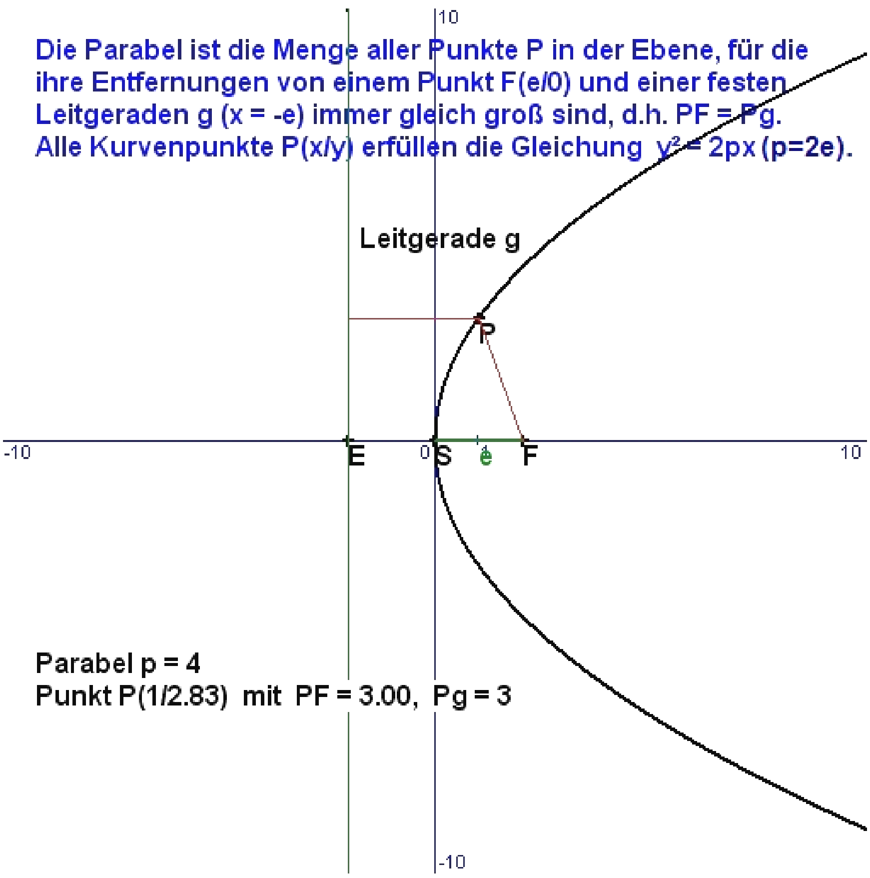
Die Parabel - Übersicht

Die Parabel ist die Menge aller Punkte P in der Ebene, für welche ihre Entfernungen von einem Punkt F und einer festen Geraden g (Leitgerade) immer gleich groß sind, d.h. PF = Pg.

Es wird ein Koordinatensystem festgelegt, so dass sich die Kurve in Hauptlage befindet. Dann gelten folgende Bezeichnungen:

Beliebiger Kurvenpunkt P(x/y)
PF = Entfernung des Punktes P vom Brennpunkt F
Pg = Entfernung des Punktes P von der Leitgerade g
Koordinatenursprung (Scheitelpunkt der Kurve) S(0/0)
Feste Leitgerade g, normal auf die Parabelachse SF
Fester Brennpunkt F(e/0)
Schnittpunkt der Leitgerade g mit der Parabelachse E(-e/0)
Parameter der Parabel mit p = Fg = EF = 2e
Kurvenpunkt über dem Brennpunkt Q(e/p)
Exzentrizität k = 1

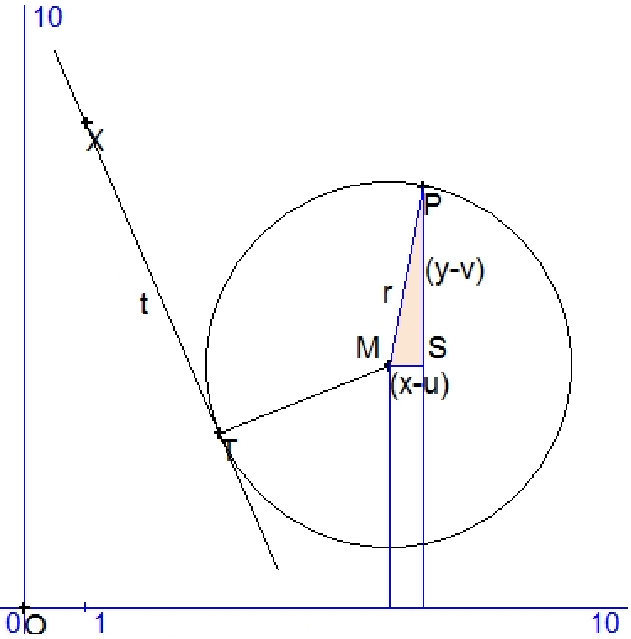
Die Parabelgleichung:
Alle Kurvenpunkte P(x/y) erfüllen die Gleichung $y^2 = 2px$.



Gleichungen von Kreis und Tangente

Die Gleichung des Kreises

Gegeben ist ein Kreis k[M,r] mit Mittelpunkt M(u/v) und Radius r. P(x/y) und T(a/b) sind Punkte auf dem Kreis. X(x/y) ist ein Punkt, der außerhalb des Kreises liegt.



Im rechtwinkeligen Dreieck [MSP] gilt $SM^2 + SP^2 = r^2$. Koordinaten einsetzen liefert die Gleichung des Kreises: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

Zur Ermittlung der Tangente t im Kreispunkt T(a/b) nehmen wir mit X(x/y) einen laufenden Punkt auf t an. Dann sind MT´ und TX´ zwei aufeinander normal stehende Vektoren, deren skalares Produkt 0 ist. TX´ • MT´ = 0. Weil TX´ = TM´ + MX´ gilt TX´ • MT´ = (MX´ - MT´) • MT´. TX´ • MT´ = MX´ • MT´ - MT´ • MT´ = MX´ • MT´ - r^2 = 0. Das ergibt die vektorielle Tangentengleichung: MX´ • MT´ = r^2. Mit Koordinaten erhält man die Spaltform der Tangente: $(x - u) * (a - u) + (y - v) * (b - v) = r^2$.

Wenn die Gerade $y = k*x + d$ durch einen Punkt außerhalb des Kreises $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ diesen Kreis berüht, dann schneidet die Gerade den Kreis nur in EINEM Punkt (Berührpunkt). Die Ausrechnung liefert dann folgende wichtige Berührbedingung: $(k*u - v + d)^2 = r^2*(k^2 + 1)$.

Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt M(u/v) und Radius r.
Vom Punkt P(p/q) werden Tangenten an den Kreis gelegt.
Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten $y = kx + d$.

[1] Punkt P(p/q) liegt auf der Tangente, d.h. $q = kp + d$
[2] Es gilt die Berührbedingung $(ku - v + d)^2 = r^2(k^2 + 1)$
Aus [1] und [2] können nun k und d berechnet werden.
Liegt P außerhalb des Kreises erhält man 2 Lösungen.

Herleitung der Berührbedingung:

Kreis $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ und Gerade $y = kx + d$ schneiden,
d.h. $y = kx + d$ einsetzen in $x^2 - 2ux + u^2 + y^2 - 2vy + v^2 = r^2$.
$x^2 - 2ux + u^2 + (k*x + d)^2 - 2v(k*x + d) + v^2 = r^2$
$x^2 - 2ux + u^2 + k^2x^2 + 2kdx + d^2 - 2kvx - 2dv + v^2 = r^2$
$(1 + k^2)x^2 + 2(kd - kv - u)x + u^2 + v^2 + d^2 - 2dv - r^2 = 0$
Quadratische Gleichung lösen: x = (-B +/- sqrt(B² - 4AC)) / (2A)
mit $A = (1 + k^2)$, $B = 2(kd - kv - u)$, $C = (u^2 + v^2 + d^2 - 2dv - r^2)$.

Weil die Gerade mit dem Kreis nur EINEN Berührpunkt hat,
muss die Diskriminante DISK = $(B^2 - 4AC)$ gleich Null sein.
DISK = $4(kd - kv - u)^2 - 4(1 + k^2)(u^2 + v^2 + d^2 - 2dv - r^2) = 0$
Wenn man nun diese nullgesetzte Diskriminante schrittweise
ausrechnet und dann geeignet umformt, erhält man zuletzt
die Berührbedingung: $(ku - v + d)^2 = r^2(k^2 + 1)$

Die Gleichung der Ellipse

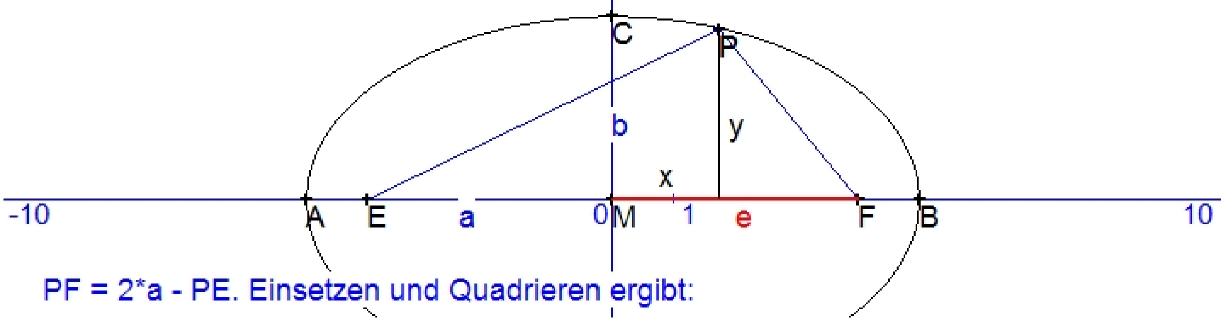
Halbachsen MA = MB = a und MC = MD = b

Brennweite MF = ME = e mit $e^2 = a^2 - b^2$

Für alle Ellipsenpunkte P(x/y) gilt: PF + PE = 2*a

$PF = \mathrm{sqrt}((x-e)^2 + (y-0)^2) = \mathrm{sqrt}(x^2 - 2*e*x + e^2 + y^2)$

$PE = \mathrm{sqrt}((x-(-e))^2 + (y-0)^2) = \mathrm{sqrt}(x^2 + 2*e*x + e^2 + y^2)$



PF = 2*a - PE. Einsetzen und Quadrieren ergibt:

$x^2 - 2*e*x + e^2 + y^2 = 4*a^2 - 4*a*\mathrm{sqrt}(\dots) + x^2 + 2*e*x + e^2 + y^2$

$4*a*\mathrm{sqrt}(\dots) = 4*a^2 + 4*e*x$, Nochmaliges Quadrieren ergibt:

$a^2*x^2 + 2*a^2*e*x + a^2*e^2 + a^2*y^2 = a^2*a^2 + 2*a^2*e*x + e^2*x^2$

$(a^2 - e^2)*x^2 + a^2*y^2 = a^2*a^2 - a^2*e^2 = a^2*(a^2 - e^2)$

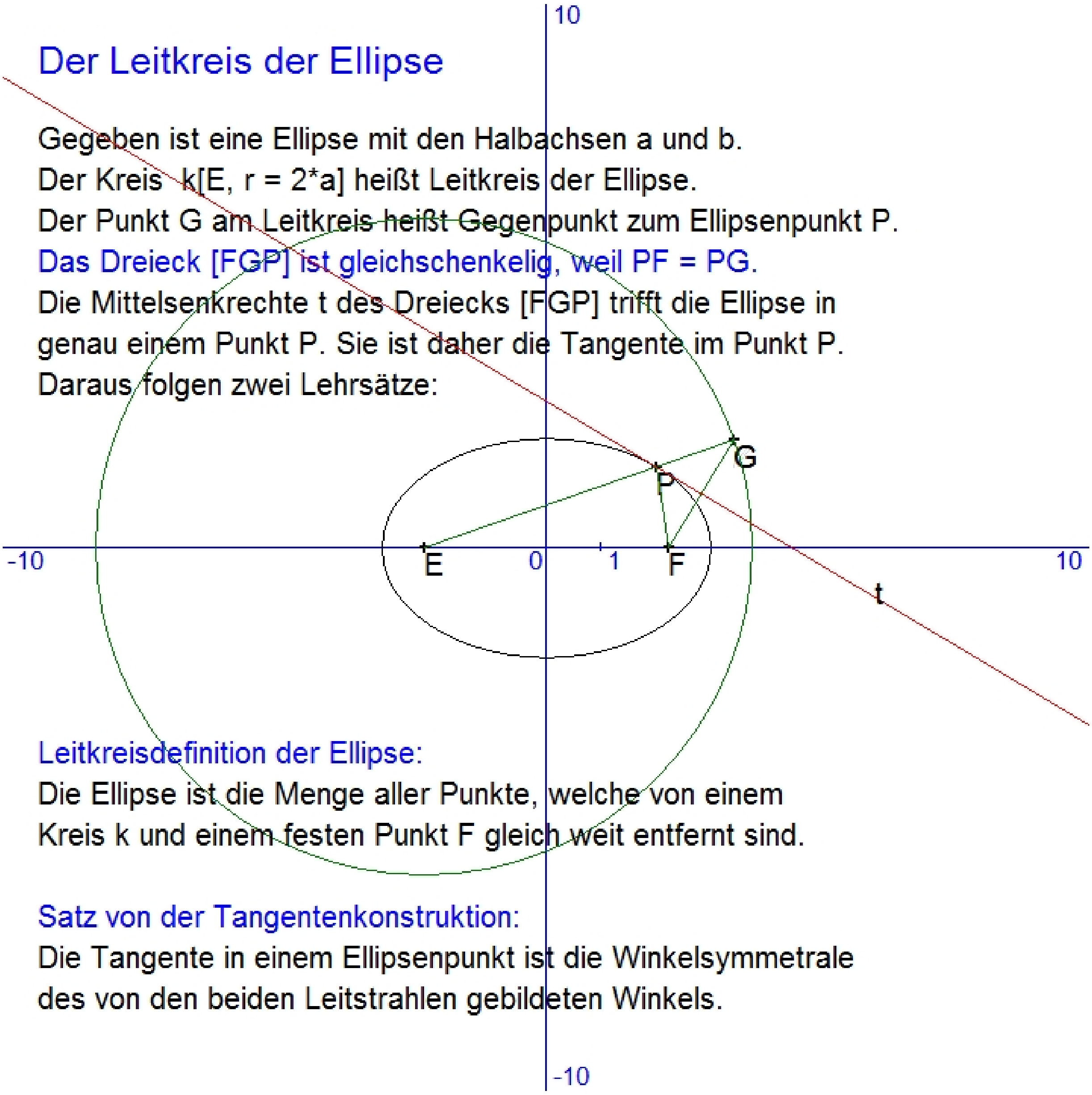
$b^2*x^2 + a^2*y^2 = a^2*b^2$

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

Das Tangentenproblem wird weiter unten behandelt .....

Der Leitkreis der Ellipse

Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.
Der Kreis k[E, r = 2*a] heißt Leitkreis der Ellipse.
Der Punkt G am Leitkreis heißt Gegenpunkt zum Ellipsenpunkt P.
Das Dreieck [FGP] ist gleichschenkelig, weil PF = PG.
Die Mittelsenkrechte t des Dreiecks [FGP] trifft die Ellipse in genau einem Punkt P. Sie ist daher die Tangente im Punkt P.
Daraus folgen zwei Lehrsätze:



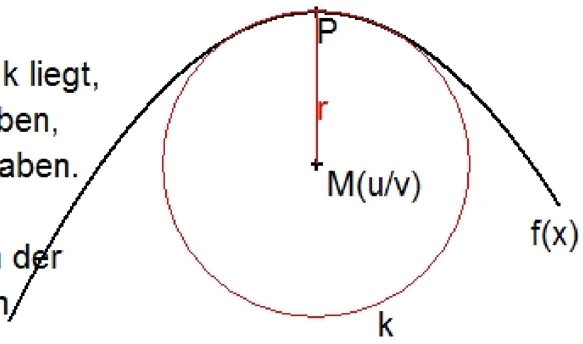
Leitkreisdefinition der Ellipse:
Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, welche von einem Kreis k und einem festen Punkt F gleich weit entfernt sind.

Satz von der Tangentenkonstruktion:
Die Tangente in einem Ellipsenpunkt ist die Winkelsymmetrale des von den beiden Leitstrahlen gebildeten Winkels.

Teil 1: Die Evolute beliebiger Kurven

Gegeben ist eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion $y = f(x)$ und der Punkt $P(x,f(x))$ liegt auf der Kurve. Ein Kreis k, der sich in einer Umgebung des Kurvenpunktes P optimal an die Kurve anschmiegt, heißt Krümmungskreis (Schmiegkreis) im Punkt P. Das ist genau dann der Fall, wenn:

[1] Punkt P auf Kurve f und auf Kreis k liegt,
[2] f und k in P dieselbe Tangente haben,
[3] f und k in P dieselbe Krümmung haben.



D.h. die erste und zweite Ableitung an der Stelle x sind für Kurve und Kreis gleich.

Aus diesen drei Bedingungen können die drei Konstanten u, v, r des Schmiegkreises k: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ ermittelt werden.
Die beiden Ableitungen der Funktion seien $y' = f'(x)$ und $y'' = f''(x)$.
Wir differenzieren zweimal implizit den Kreis, dann gilt:

[1] $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$
[2] $2*(x-u) + 2*(y-v)*y' = 0$
[3] $2 + 2*(y'*y' + (y - v)*y'') = 0$

Aus [3] und [2] folgen: $v = y + (1+y'^2) / y''$ und $u = x - y'*(1+y'^2) / y''$.
Aus [1] folgt dann: $r = (1+y'^2)^{(3/2)} / y''$.

Daher gilt folgender Lehrsatz: Der Schmiegkreis k im Punkt P(x,y) der Kurve $y = f(x)$ ist gegeben durch $k: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ mit:

[1] r = (1+y'²)^(3/2) / y''

[2] u = x - y'*(1+y'²) / y''

[3] v = y + (1+y'²) / y''

Der Kehrwert des Krümmungsradius (1/r) heißt Kurvenkrümmung.

Jene Kurve, auf der die Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Kurve $y = f(x)$ liegen, heißt Evolute (Abwälzkurve).

Man findet die Funktionsgleichung der Evolute in der Weise, dass man aus den Bestimmungsgleichungen des Schmiegkreises die zwei Variablen x und y eliminiert. Dann gilt $v = g(u)$.

Teil 2: Die Evolute der Ellipse

Ellipsengleichung in Mittelpunktslage: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

y = b/a * sqrt(a² - x²)

y' = -b/a * x / sqrt(a² - x²) = -(b²*x) / (a²*y)

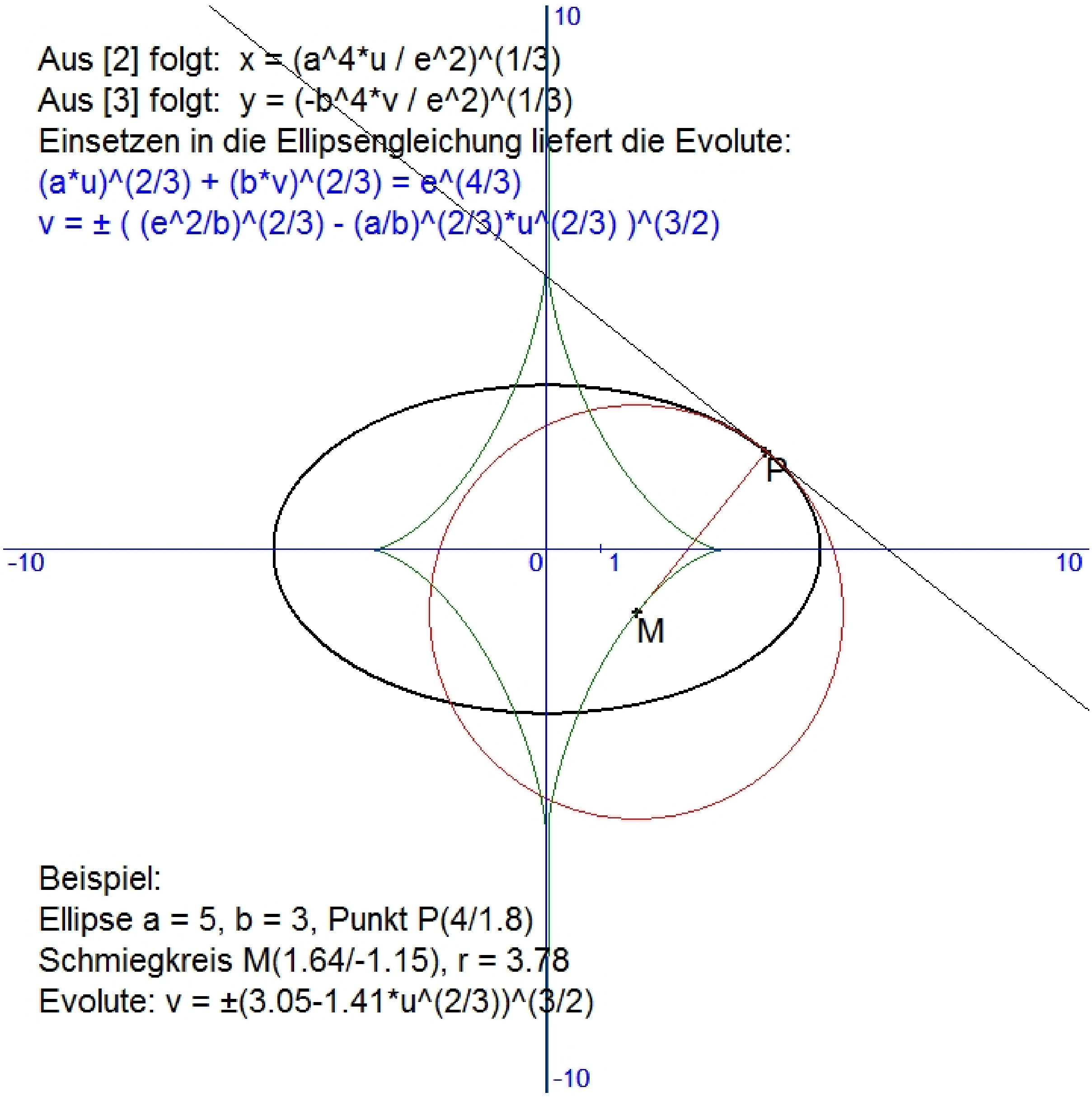
y'' = -b*a / (sqrt(a² - x²))³ = -(b²*b²) / (a²*y³)

Einsetzen der zwei Ableitungen in die Schmiegungsformeln

[1] r = - (a*b)^(-4) * (a^4*y^2 + b^4*x^2)^(3/2)

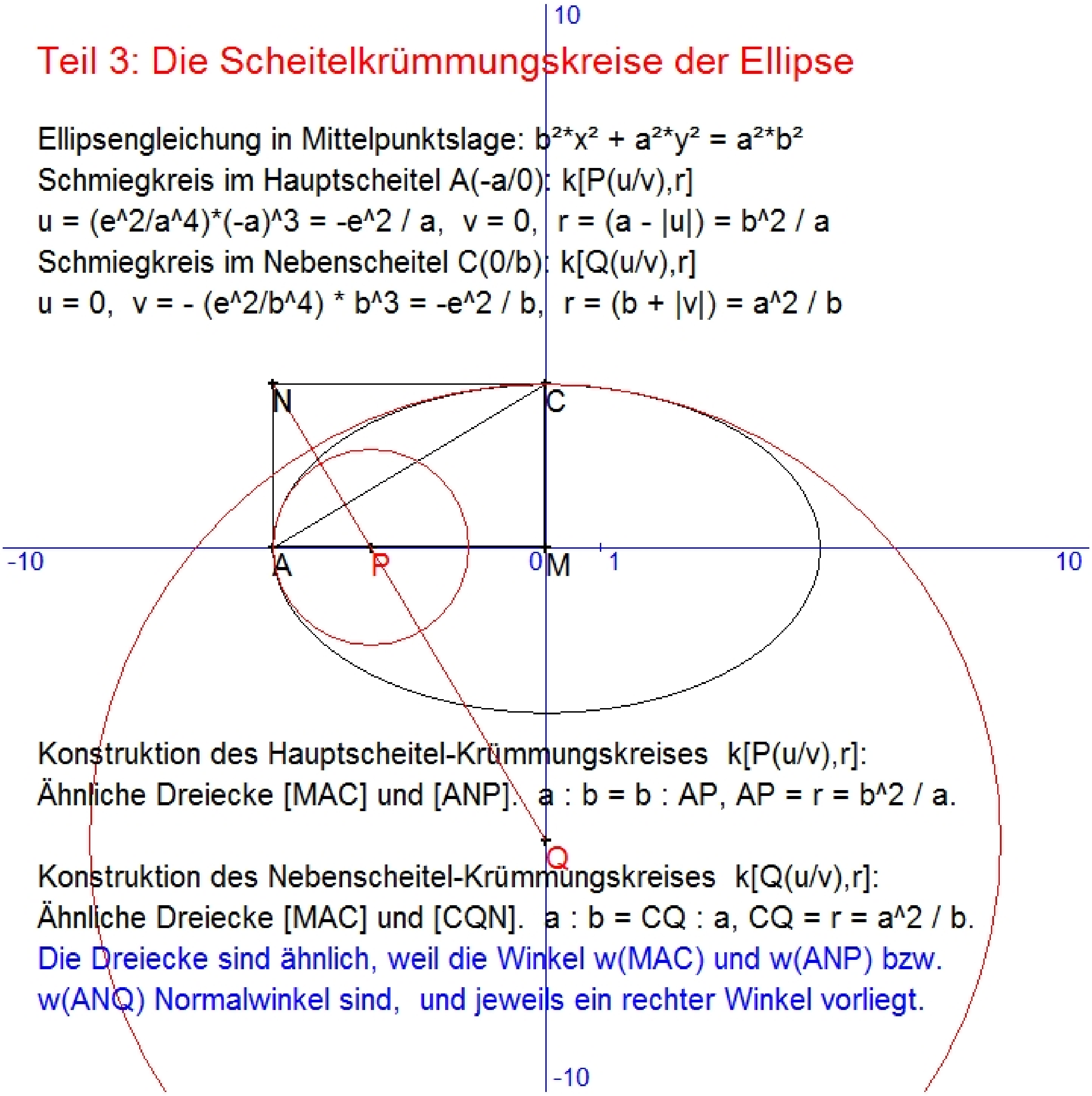
[2] u = (e^2/a^4) * x^3

[3] v = - (e^2/b^4) * y^3


Aus [2] folgt: x = (a^4*u / e^2)^(1/3)
Aus [3] folgt: y = (-b^4*v / e^2)^(1/3)
Einsetzen in die Ellipsengleichung liefert die Evolute:
(a*u)^(2/3) + (b*v)^(2/3) = e^(4/3)
v = ± ((e^2/b)^(2/3) - (a/b)^(2/3)*u^(2/3))^(3/2)
10
-10
0
1
10
P
M
-10
Beispiel:
Ellipse a = 5, b = 3, Punkt P(4/1.8)
Schmiegkreis M(1.64/-1.15), r = 3.78
Evolute: v = ±(3.05-1.41*u^(2/3))^(3/2)

Teil 3: Die Scheitelkrümmungskreise der Ellipse

Ellipsengleichung in Mittelpunktslage: $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$
Schmiegkreis im Hauptscheitel A(-a/0): k[P(u/v),r]
u = (e^2/a^4)*(-a)^3 = -e^2 / a, v = 0, r = (a - |u|) = b^2 / a
Schmiegkreis im Nebenscheitel C(0/b): k[Q(u/v),r]
u = 0, v = - (e^2/b^4) * b^3 = -e^2 / b, r = (b + |v|) = a^2 / b



Konstruktion des Hauptscheitel-Krümmungskreises k[P(u/v),r]:
Ähnliche Dreiecke [MAC] und [ANP]. a : b = b : AP, AP = r = b^2 / a.

Konstruktion des Nebenscheitel-Krümmungskreises k[Q(u/v),r]:
Ähnliche Dreiecke [MAC] und [CQN]. a : b = CQ : a, CQ = r = a^2 / b.
Die Dreiecke sind ähnlich, weil die Winkel w(MAC) und w(ANP) bzw.
w(ANQ) Normalwinkel sind, und jeweils ein rechter Winkel vorliegt.

Kegelschnitt und Gerade, (Theorie).

Die Berührbedingung

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ellipse e in Mittelpunktslage.

Gerade g: $y = k*x + d$
Ellipse e: $b^2*x^2 + a^2*y^2 = a^2*b^2$

Es sollen alle möglichen Schnittpukte ermittelt werden.

Wegen g gilt: $y^2 = (k*x + d)^2$. Einsetzen in e: $b^2x^2 + a^2*(k*x+d)^2 = a^2*b^2$.
Quadratische Gleichung: $(b^2+a^2*k^2)*x^2 + (2*a^2*k*d)*x + a^2*(d^2 - b^2) = 0$.
Entsprechend der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man für die Diskriminante: $DISK = 4*a^2*b^2*(a^2*k^2 + b^2 - d^2)$.
Der Wert der Diskriminante bestimmt die Art der Lösungen x1, x2.
Setzt man x1 und x2 in die Geradengleichung von g ein, erhält man y1 und y2. Das liefert die Schnittpunkte S1(x1/y1) und S2(x2/y2).

[1] DISK < 0, x1 und x2 sind nicht reell, KEIN Schnittpunkt.
[2] DISK > 0, x1 und x2 sind reell mit x1 <> x2, ZWEI Schnittpunkte.
[3] DISK = 0, x1 und x2 sind reell mit x1 = x2, EIN Schnittpunkt.

Wenn DISK = 0, berührt die Gerade die Ellipse im Punkt T(x1/y1).
Dann gilt die Berührbedingung $(a^2*k^2 + b^2 - d^2) = 0$ und die Gerade ist eine Tangente.

Die Tangente IN einem Punkt

Gegeben ist eine Ellipse $b^2*x^2 + a^2*y^2 = a^2*b^2$ und ein Punkt P(u/v) AUF der Ellipse. Gesucht ist die Tangente t in dem Ellipsenpunkt.

Unbestimmter Ansatz für t: $y = k*x + d$. Für k und d gilt:

[1] $v = k*u + d$, der Punkt P(u/v) muss auf der Geraden liegen.
[2] $a^2*k^2 + b^2 = d^2$, die Berührbedingung muss erfüllt sein.

Aus [1] folgt $d^2 = v^2 - 2*v*u*k + u^2*k^2$. Einsetzen in [2] ergibt die Quadratische Gleichung: $(a^2 - u^2)*k^2 + 2*u*v*k + (b^2 - v^2) = 0$. Dann gilt $k = (- 2*u*v \pm \text{sqrt}(\dots)) / (2*(a^2 - u^2))$. Weil genau eine Tangente vorliegt, gilt: $\text{sqrt}(\dots) = 0$ und $k = - u*v / (a^2 - u^2)$.

Der Punkt P(u/v) erfüllt die Ellipsengleichung: $b^2*u^2 + a^2*v^2 = a^2*b^2$, d.h. $v^2 = (a^2 - u^2)*b^2/a^2$ bzw. $(a^2 - u^2) = a^2*v^2/b^2$. Damit folgt dann $k = -(b^2*u) / (a^2*v)$ und $d = v + (b^2*u^2) / (a^2*v)$. Einsetzen in t ergibt $y = (-(b^2*u) / (a^2*v)) * x + v + (b^2*u^2) / (a^2*v)$. Nach Umformung gilt $a^2*v*y + b^2*u*x = a^2*v^2 + b^2*u^2 = a^2*b^2$, weil P(u/v) auf der Ellipse liegt. Damit ist die Tangentengleichung t vollständig bestimmt.

Die Tangente t im Punkt P(u/v) der Ellipse $b^2*x^2 + a^2*y^2 = a^2*b^2$ hat die Gleichung $b^2*u*x + a^2*v*y = a^2*b^2$ (Auch Spaltform genannt).

Die Tangente VON einem Punkt

Gegeben ist eine Ellipse $b^2*x^2 + a^2*y^2 = a^2*b^2$ und ein Punkt P(u/v) AUSSERHALB der Ellipse. Gesucht sind die Tangenten von Punkt P.

Unbestimmter Ansatz der Tangente: $y = k*x + d$. Für k und d gilt:

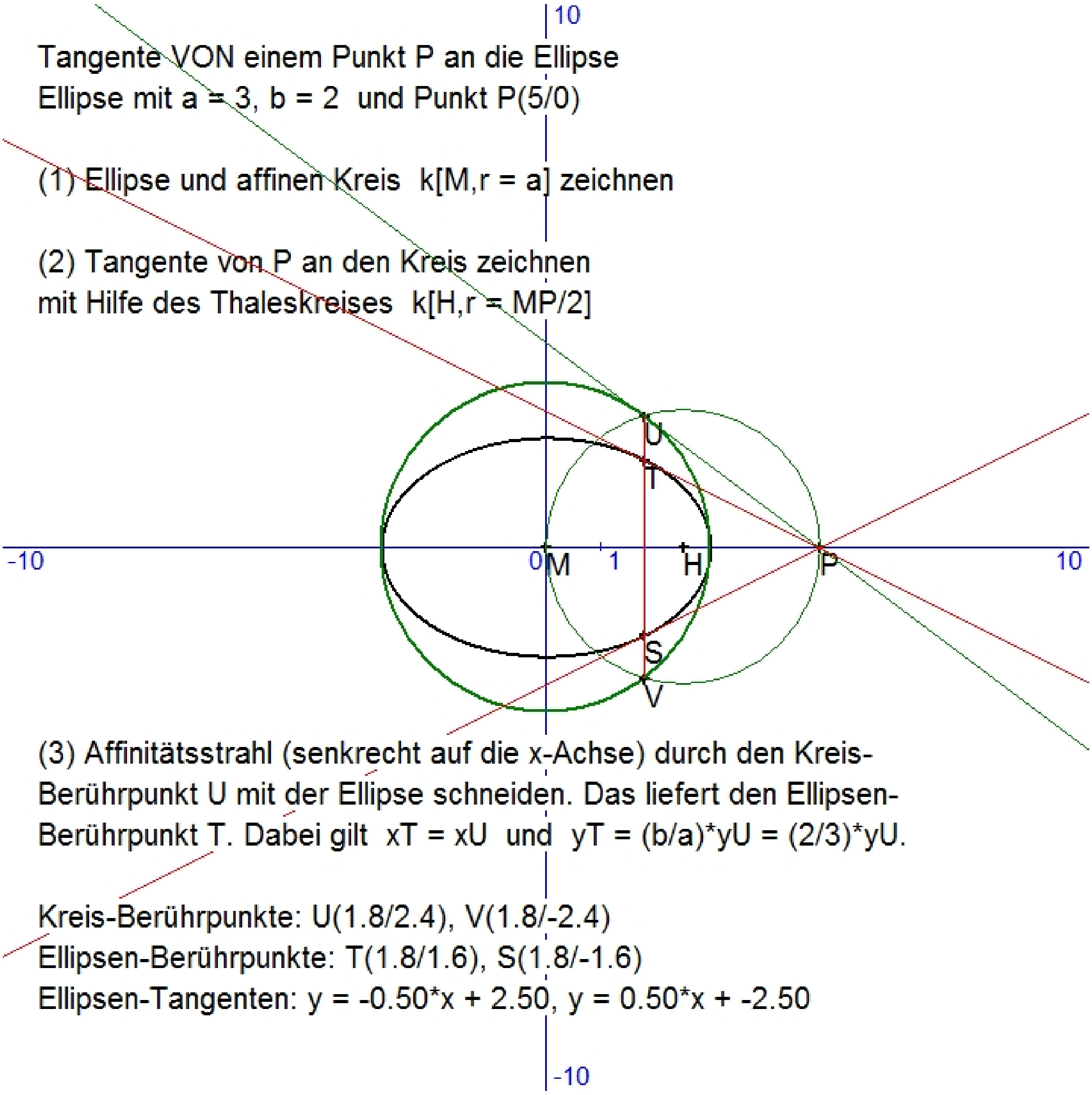
[1] $v = k*u + d$, der Punkt P(u/v) muss auf der Geraden liegen.
[2] $a^2*k^2 + b^2 = d^2$, die Berührbedingung muss erfüllt sein.

Aus [1] folgt $d^2 = v^2 - 2*v*u*k + u^2*k^2$. Einsetzen in [2] ergibt die quadratische Gleichung: $(a^2 - u^2)*k^2 + 2*u*v*k + (b^2 - v^2) = 0$.
Die Auflösung der Gleichung liefert zwei verschiedene Anstiege k1 und k2 und damit auch zwei verschiedene Tangenten t1 und t2.

Konstruktion der Tangenten

Die Tangente IN einem Ellipsenpunkt wird dadurch konstruiert, dass der von den beiden Leitstrahlen gebildete Winkel halbiert wird.

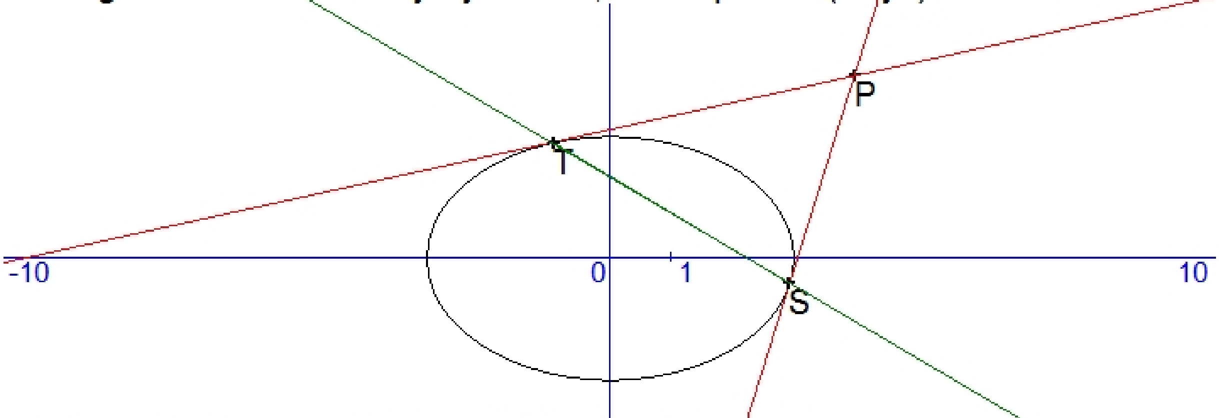
Die Tangente VON einem Punkt ausserhalb wird konstruiert, indem man die Tatsache verwendet, dass die Ellipse das senkrecht affine Bild des Kreises k[M,r = a] ist mit Affinitätsverhältnis v = b/a und Achse a. Für P'(xE/yE) und P(xK/yK) gilt: xE = xK, yE = (b/a)*yK.


10
Tangente VON einem Punkt P an die Ellipse
Ellipse mit a = 3, b = 2 und Punkt P(5/0)
(1) Ellipse und affinen Kreis k[M,r = a] zeichnen
(2) Tangente von P an den Kreis zeichnen
mit Hilfe des Thaleskreises k[H,r = MP/2]
U
T
-10
0
M
1
H
P
10
S
V
(3) Affinitätsstrahl (senkrecht auf die x-Achse) durch den Kreis-
Berührpunkt U mit der Ellipse schneiden. Das liefert den Ellipsen-
Berührpunkt T. Dabei gilt xT = xU und yT = (b/a)*yU = (2/3)*yU.
Kreis-Berührpunkte: U(1.8/2.4), V(1.8/-2.4)
Ellipsen-Berührpunkte: T(1.8/1.6), S(1.8/-1.6)
Ellipsen-Tangenten: y = -0.50*x + 2.50, y = 0.50*x + -2.50
-10

Pol und Polare

Die Polare ist die Verbindungsgerade von den zwei Berührpunkten der von einem Punkt (Pol) P(u/v) an die Ellipse gelegten Tangenten.

Tangete t: b²*x1*x + a²*y1*y = a²*b², Berührpunkt T(x1/y1)
Tangete s: b²*x2*x + a²*y2*y = a²*b², Berührpunkt S(x2/y2)



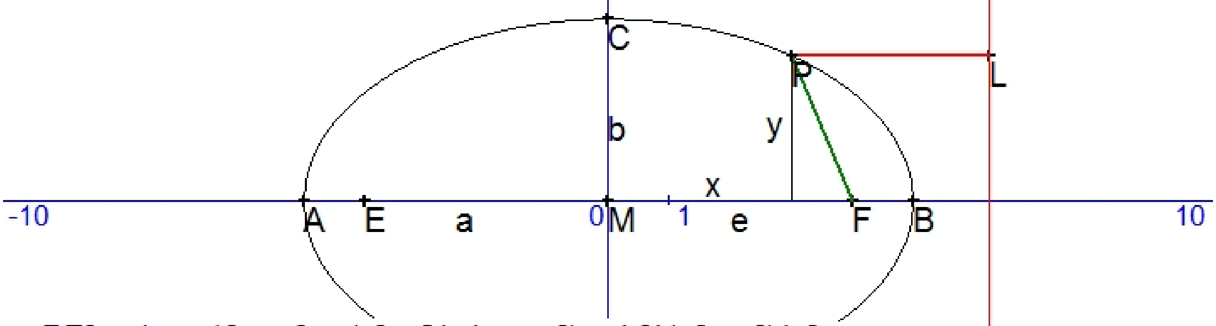
Der Pol P(u/v) liegt auf Tangente t und auf Tangente s, also gilt:
[1] b²*u*x1 + a²*v*y1 = a²*b²
[2] b²*u*x2 + a²*v*y2 = a²*b²
Diese beiden Gleichungen können als die Gleichung von EINER Geraden g interpretiert werden, welche durch die beiden Punkte T(x1/y1) und S(x2/y2) geht. Daher gilt der nachfolgende Lehrsatz:

Die Polare des Pols P(u/v) hat die Gleichung: b²*u*x + a²*v*y = a²*b².

Die Leitlinien der Ellipse

Die Geraden $x = a^2/e$ und $x = - a^2/e$ heißen Leitlinien der Ellipse.

Es sei P(x/y) ein Punkt auf der Ellipse. Für seinen Abstand von der rechten Leitlinie gilt $PL = a^2/e - x$. Sein Abstand vom Brennpunkt F ist $PF = sqrt((x - e)^2 + (y - 0)^2)$



$PF^2 = (x - e)^2 + y^2 = (x^2 - 2*e*x + e^2) + b^2*(a^2 - x^2)/a^2$
$PF^2 = (a^2x^2 - 2*a^2*e*x + a^2*e^2 + a^2*b^2 - b^2*x^2) / a^2$
$a^2 * PF^2 = (a^2 - b^2)*x^2 - 2*a^2*e*x + a^2*e^2 + a^2*(a^2 - e^2)$
$a^2 * PF^2 = e^2*x^2 - 2*a^2*e*x + a^2*a^2 = (e*x - a^2)^2.$
$a * PF = (a^2 - e*x), \quad PF = (e/a) * (a^2/e - x) = (e/a) * PL$

Für alle Punkte P(x/y) der Ellipse gilt, dass das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt (Brennpunkt F) und einer festen Geraden (Leitlinie L) konstant ist. $PF : PL = e : a$

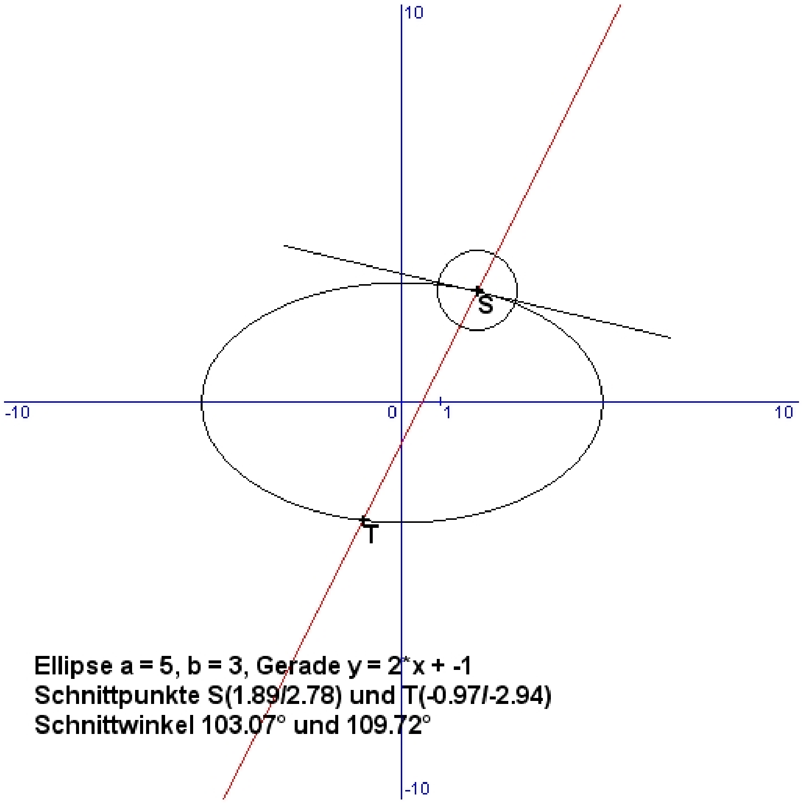
Formeln für die Hyperbel

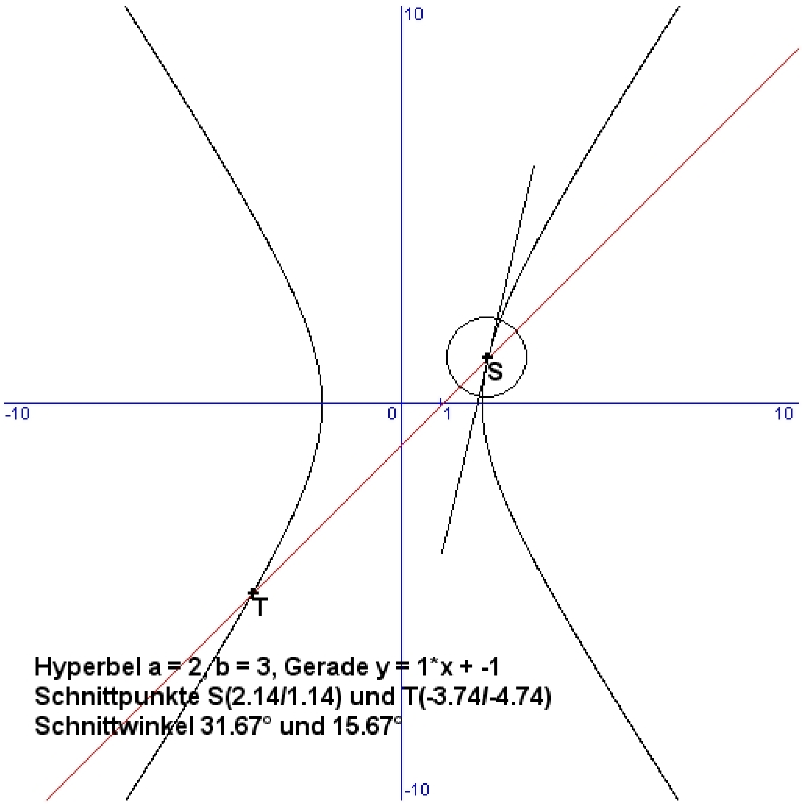
Mittelpunktsgleichung der Hyperbel: $b^2*x^2 - a^2*y^2 = a^2*b^2$
Tangentengleichung in einem Punkt P(u/v): $b^2*u*x - a^2*v*y = a^2*b^2$
Polarengleichung durch den Punkt P(u/v): $b^2*u*x - a^2*v*y = a^2*b^2$
Berührbedingung der Geraden y = k*x + d: $a^2*k^2 - b^2 = d^2$
Schmiegkreis k[M(u/v),r] im Punkt P(x/y):
[1] r = - (a*b)^(-4) * (a^4*y^2 + b^4*x^2)^(3/2)
[2] u = (e^2/a^4) * x^3
[3] v = - (e^2/b^4) * y^3
Evolute der Hyperbel: (a*u)^(2/3) - (b*v)^(2/3) = e^(4/3)

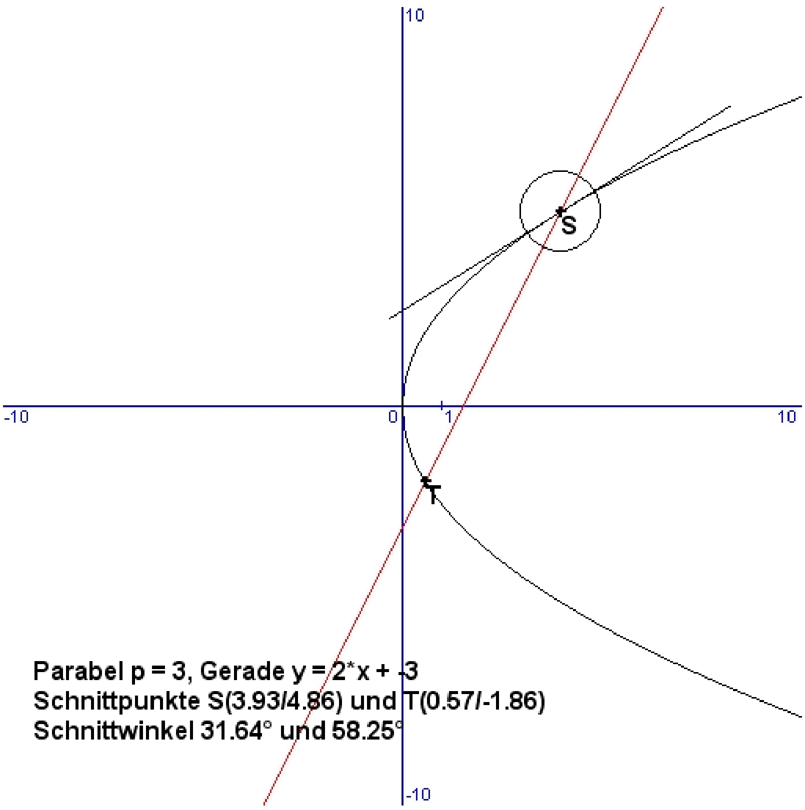
Formeln für die Parabel

Scheitelgleichung der Parabel: $y^2 = 2*p*x$
Tangentengleichung in einem Punkt P(u/v): v*y = p*(u + x)
Polarengleichung durch den Punkt P(u/v): v*y = p*(u + x)
Berührbedingung der Geraden y = k*x + d: p = 2*k*d
Schmiegkreis k[M(u/v),r] im Punkt P(x/y):
[1] r = (y^2/p^2) * (y^2 + p^2)^(3/2)
[2] u = 3*x + p
[3] v = - y^3 / p^2
Evolute der Parabel: v^2 = 8/(27*p) * (u - p)^3

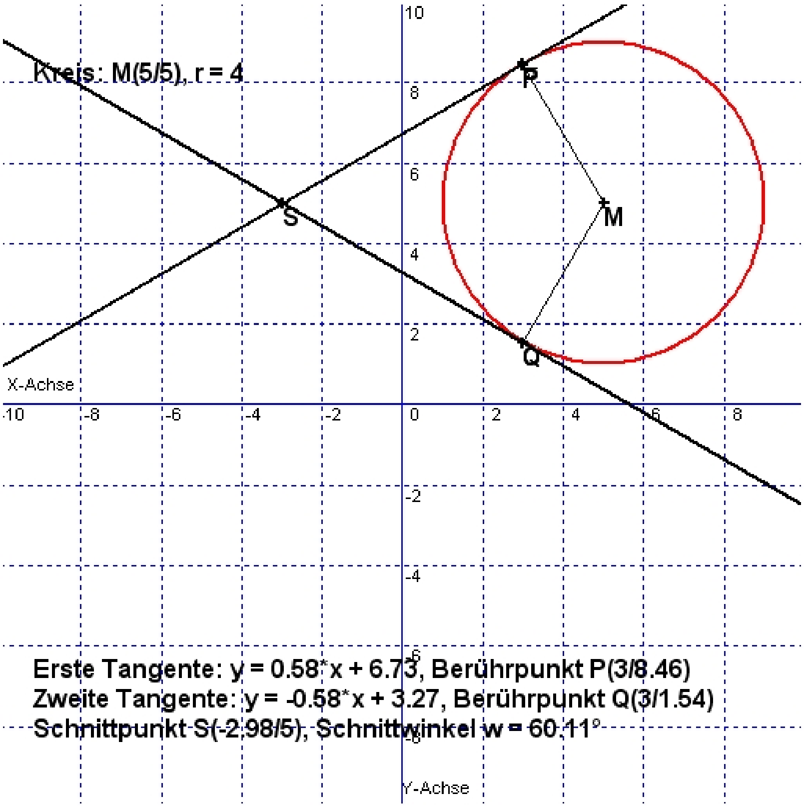
Kegelschnitt und Gerade, Beispiele

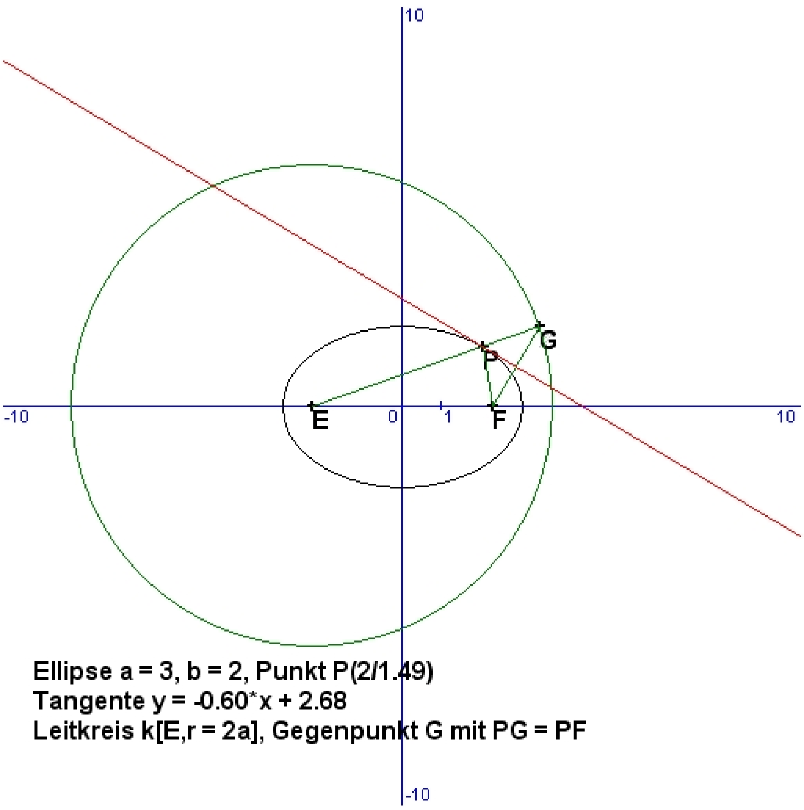


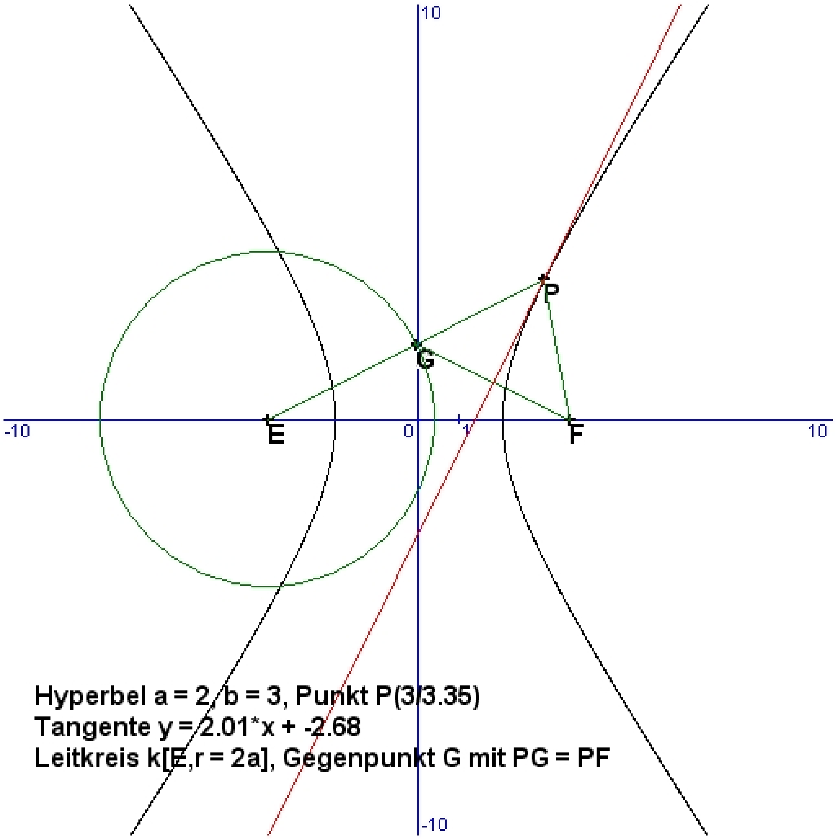


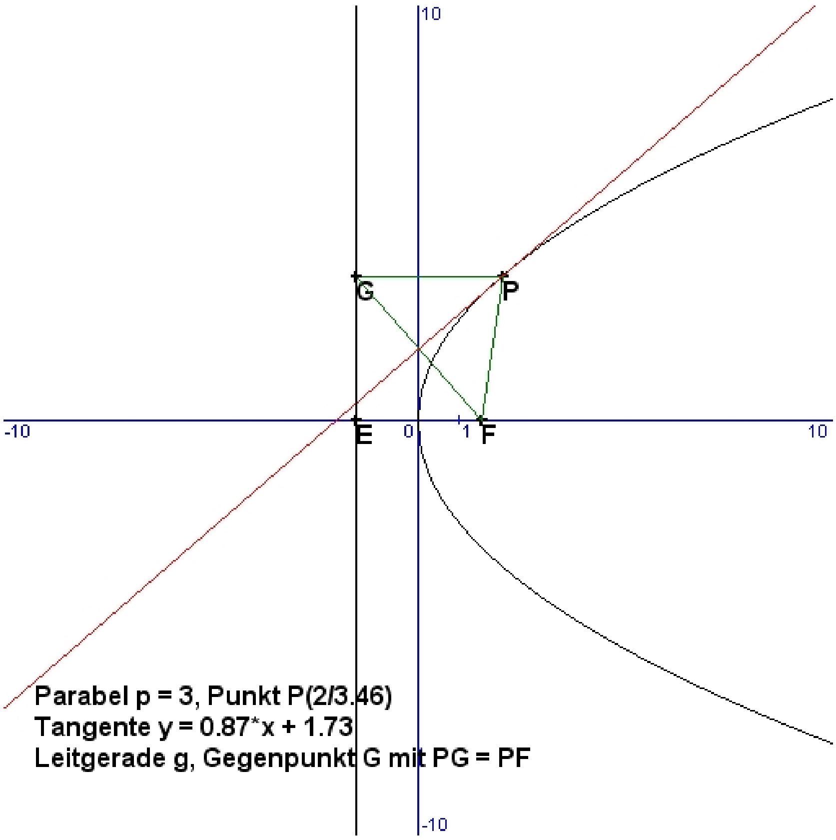

10
S
-10
0
1
10
T
Parabel p = 3, Gerade y = 2*x + -3
Schnittpunkte S(3.93/4.86) und T(0.57/-1.86)
Schnittwinkel 31.64° und 58.25°
-10

Tangenten in Punkten auf den Kegelschnittslinien

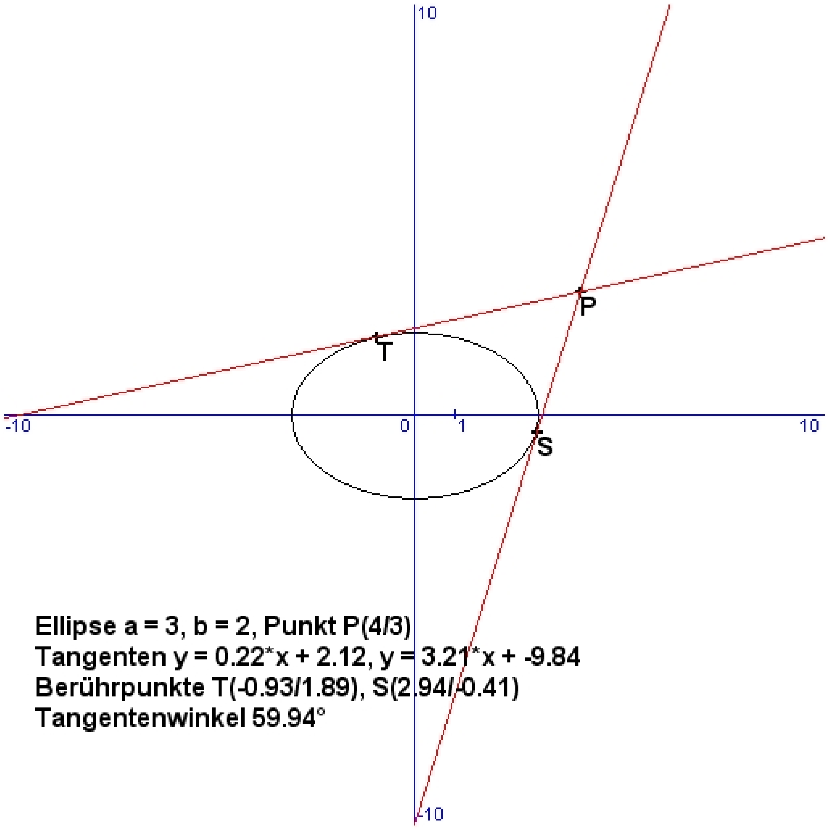


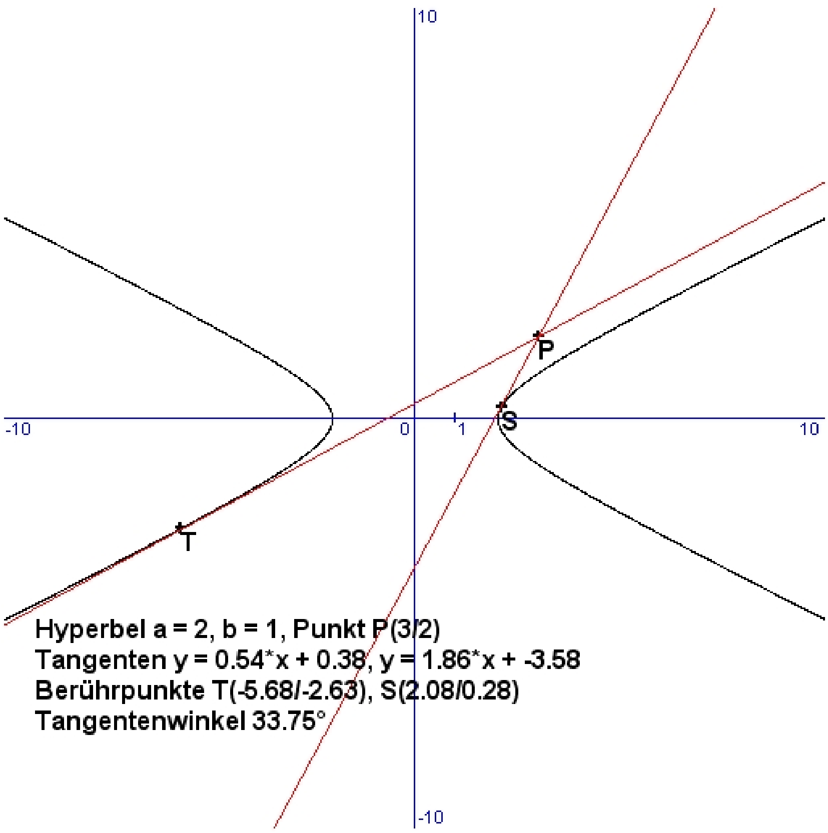


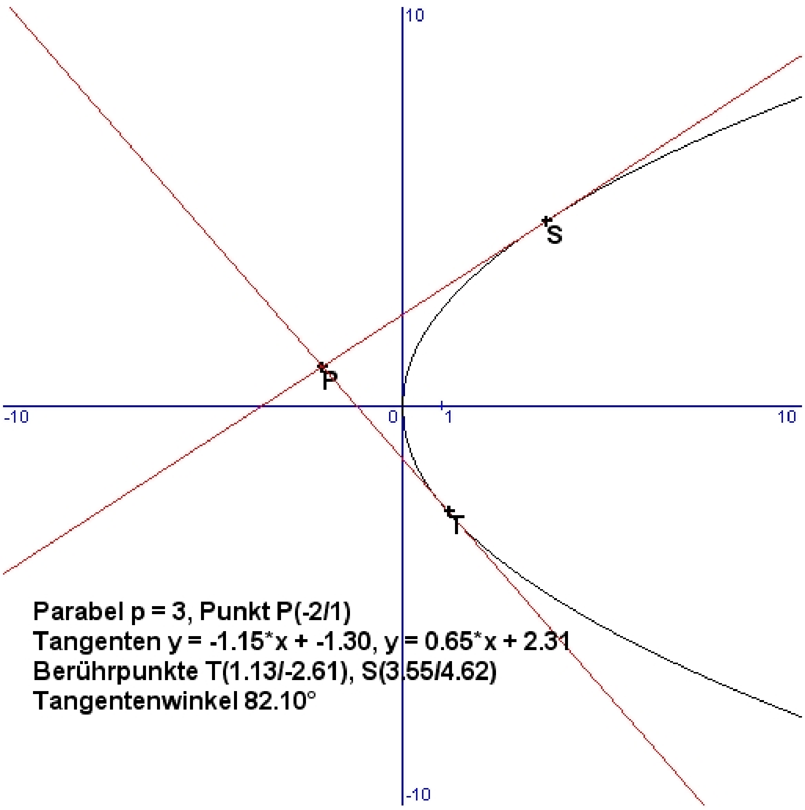

10
-10
0
1
10
-10
E
F
G
P
Hyperbel a = 2, b = 3, Punkt P(3/3.35)
Tangente y = 2.01*x + -2.68
Leitkreis k[E,r = 2a], Gegenpunkt G mit PG = PF


10
-10
0
1
10
-10
E
F
G
P
Parabel p = 3, Punkt P(2/3.46)
Tangente y = 0.87*x + 1.73
Leitgerade g, Gegenpunkt G mit PG = PF

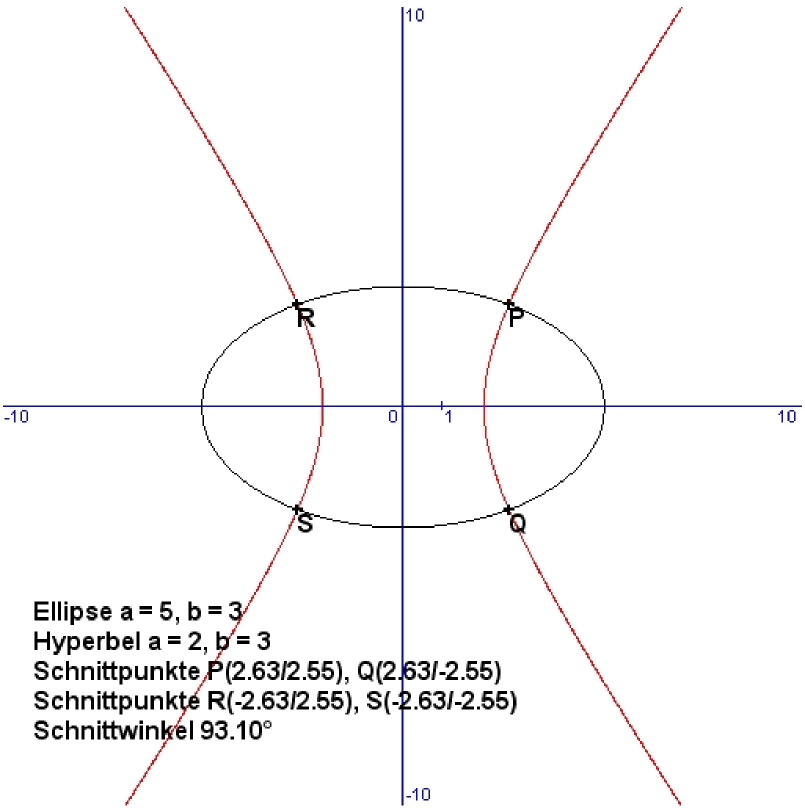
Tangenten von Punkten außerhalb der Kegelschnittslinien

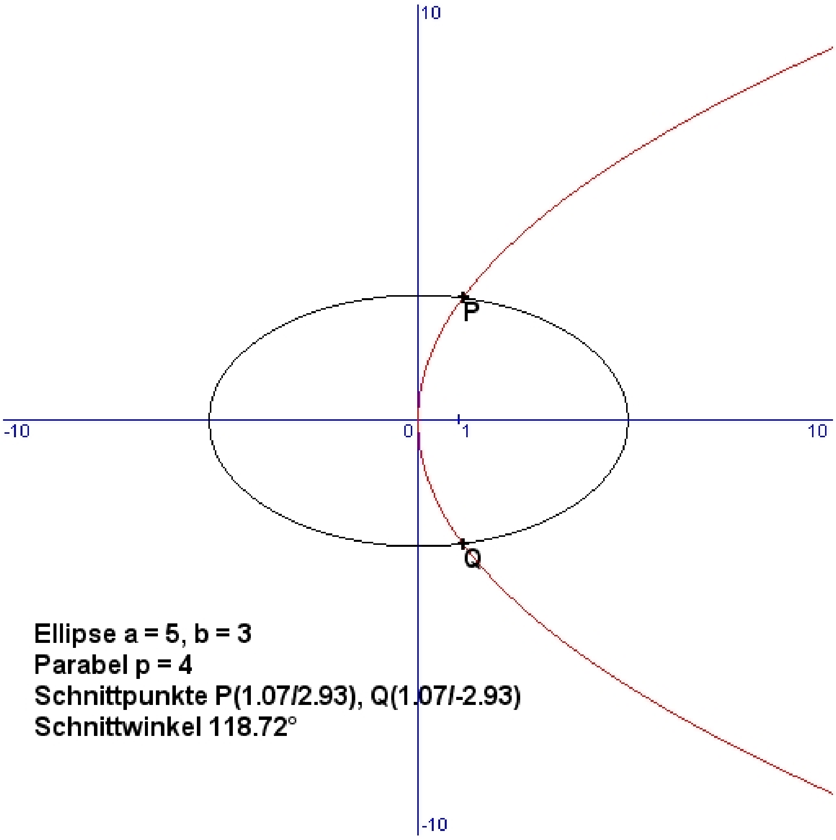


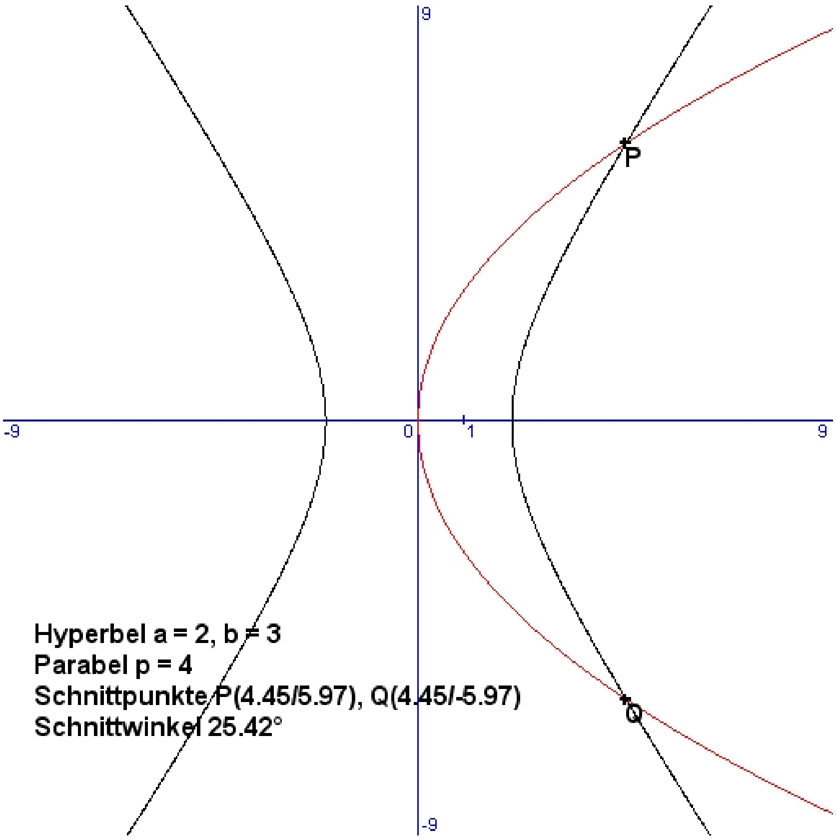




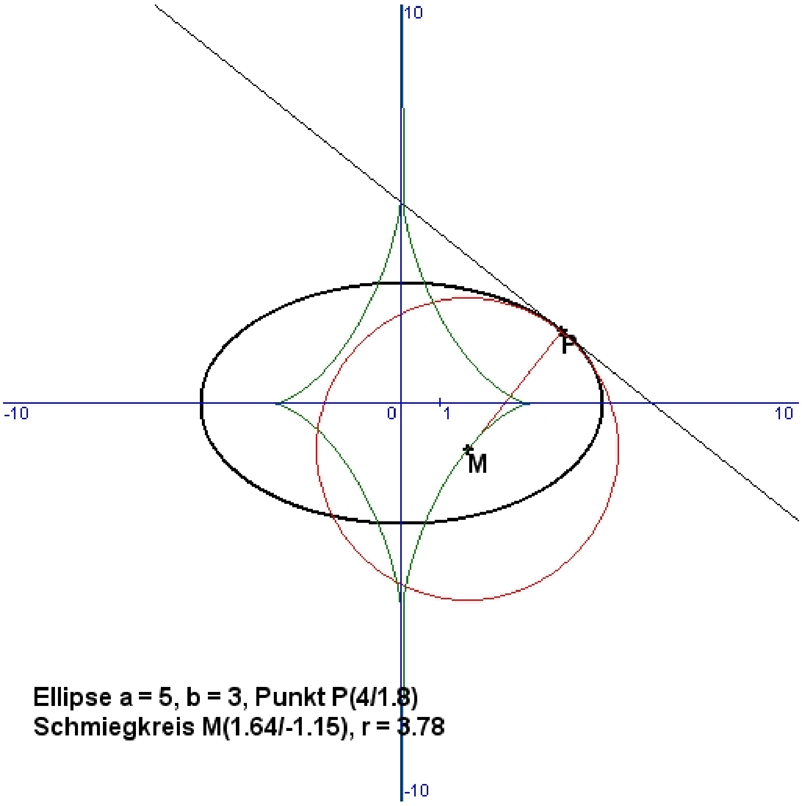
Schnittpunkte zweier Kegelschnittslinien

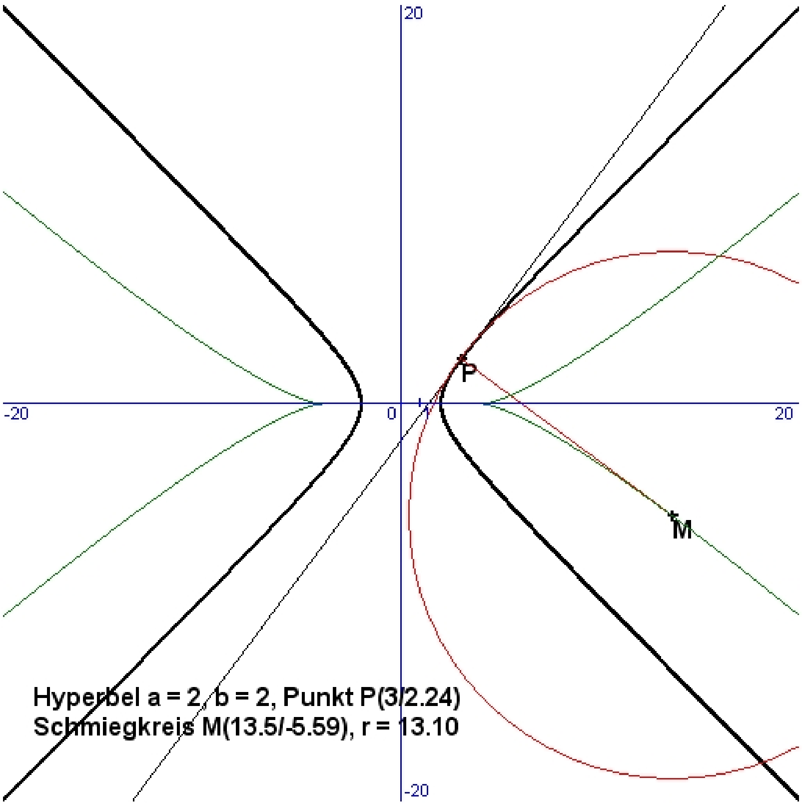


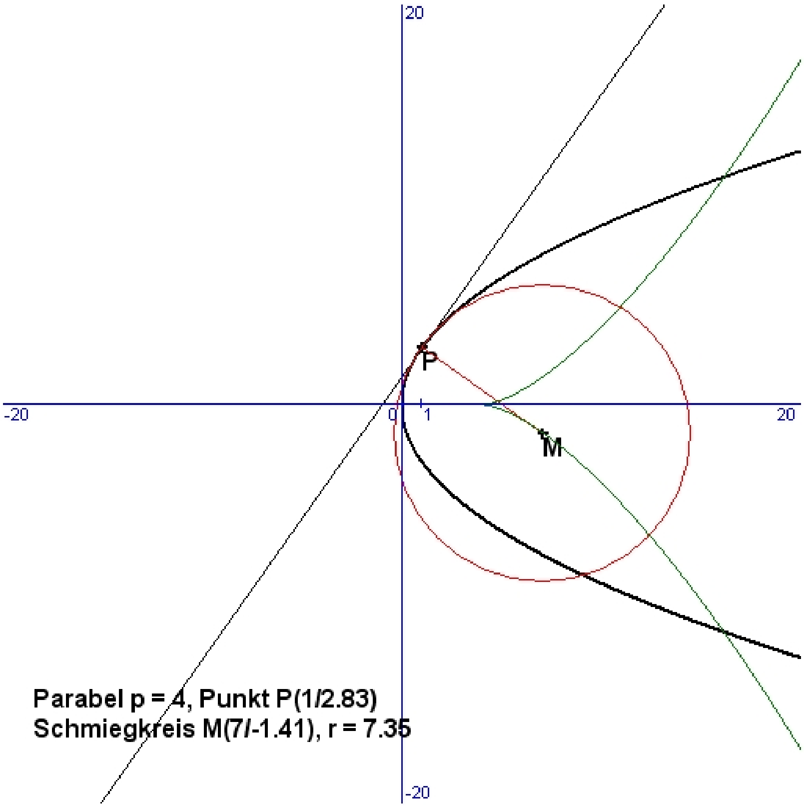

10
-10
0
1
10
-10
P
Q
Ellipse a = 5, b = 3
Parabel p = 4
Schnittpunkte P(1.07/2.93), Q(1.07/-2.93)
Schnittwinkel 118.72°


9
-9
0
1
9
-9
P
Q
Hyperbel a = 2, b = 3
Parabel p = 4
Schnittpunkte P(4.45/5.97), Q(4.45/-5.97)
Schnittwinkel 25.42°

Schmiegkreise und ihre Mittelpunktskurven (Evoluten)





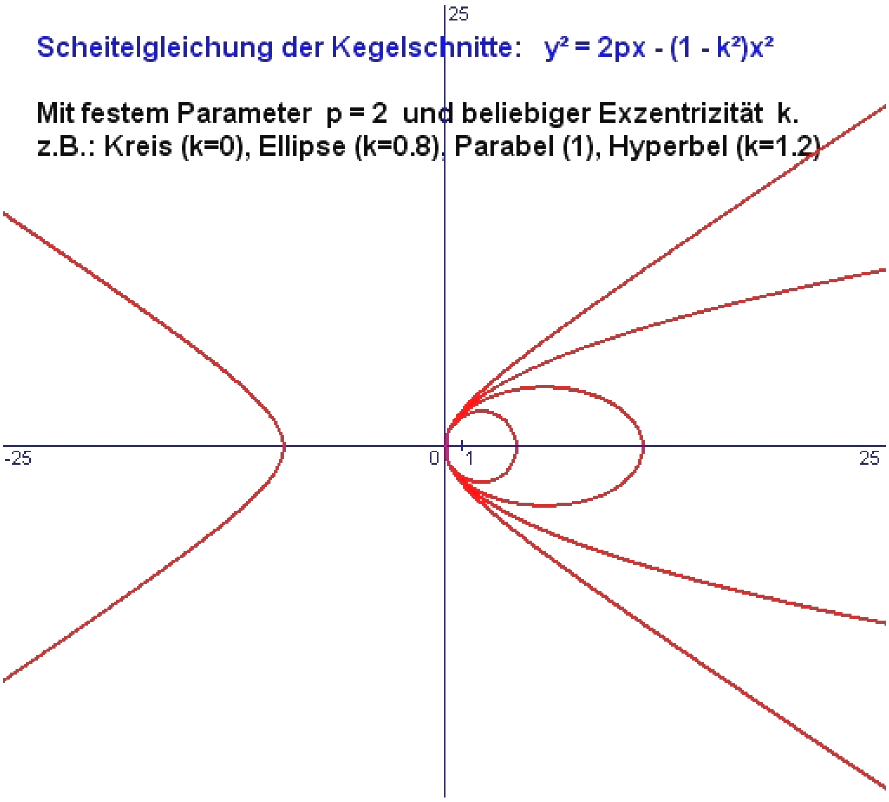

20
-20
0
1
20
-20
P
M
Parabel p = 4, Punkt P(1/2.83)
Schmiegkreis M(7/-1.41), r = 7.35

Scheitelgleichung der Kegelschnitte
$y^2 = 2px - (1 - k^2)x^2$

Die Ellipse
Verschiebt man eine Ellipse mit Halbachsen a und b aus der Hauptlage um a nach rechts, dann fällt der linke Hauptscheitel auf den Ursprung des Koordinatensystems. Ersetzt man in der Ellipsengleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ nun x durch $(x - a)$, dann erhält man die Scheitelgleichung: $y^2 = 2px - (1 - k^2)x^2$. Dabei sind der Parameter $p = b^2 / a$ und die Exzentrizität $k = e / a$ $(k < 1)$.

Die Hyperbel
Verschiebt man eine Hyperbel mit Halbachsen a und b aus der Hauptlage um a nach links, dann fällt der rechte Hauptscheitel auf den Ursprung des Koordinatensystems. Ersetzt man in der Hyperbelgleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ nun x durch $(x + a)$, dann erhält man die Scheitelgleichung: $y^2 = 2px - (1 - k^2)x^2$. Dabei sind der Parameter $p = b^2 / a$ und die Exzentrizität $k = e / a$ $(k > 1)$.

Die Parabel
Bei einer Parabel mit Parameter p und der Gleichung $y^2 = 2px$ liegt in der Hauptlage der Scheitel S bereits im Koordinatenursprung. Mit der Exzentrizität $k = 1$ ist dann $y^2 = 2px$ bereits die Scheitelgleichung der Parabel.



ABBILDUNGEN

Schiebung, Drehung, Spiegelung, Streckung

Definition der Abbildungen [086]

Theorie der Abbildungen [091]

Hauptachsen-Transformationen [100]

Definition von Abbildungen

Unter einer Abbildung versteht man die Erzeugung einer Bildfigur aus einer gegebenen Figur (Urfigur) entsprechend einer festgelegten Vorschrift. Die Zuordnung von Bildfigur zur Urfigur muss eindeutig sein.

Zwei geometrische Figuren heißen ähnlich (formgleich), wenn sie in ihrer Form übereinstimmen, d.h. die entsprechenden Winkel und die entsprechenden Seitenverhältnisse sind gleich groß.

Abbildungen, bei welchen die Bildfigur die gleiche Form hat wie die Urfigur, heißen Ähnlichkeitsabbildungen. Diese werden durch so genannte zentrische Streckungen realisiert.

Zwei geometrische Figuren heißen kongruent (deckungsgleich), wenn sie in Form und Fläche übereinstimmen. Dann sind die entsprechenden Winkel gleich groß und die entsprechenden Strecken sind gleich lang.

Abbildungen, bei welchen Bildfigur und Urfigur deckungsgleich sind, heißen Kongruenzabbildungen. Diese werden durch Schiebungen und Drehungen und Spiegelungen realisiert.

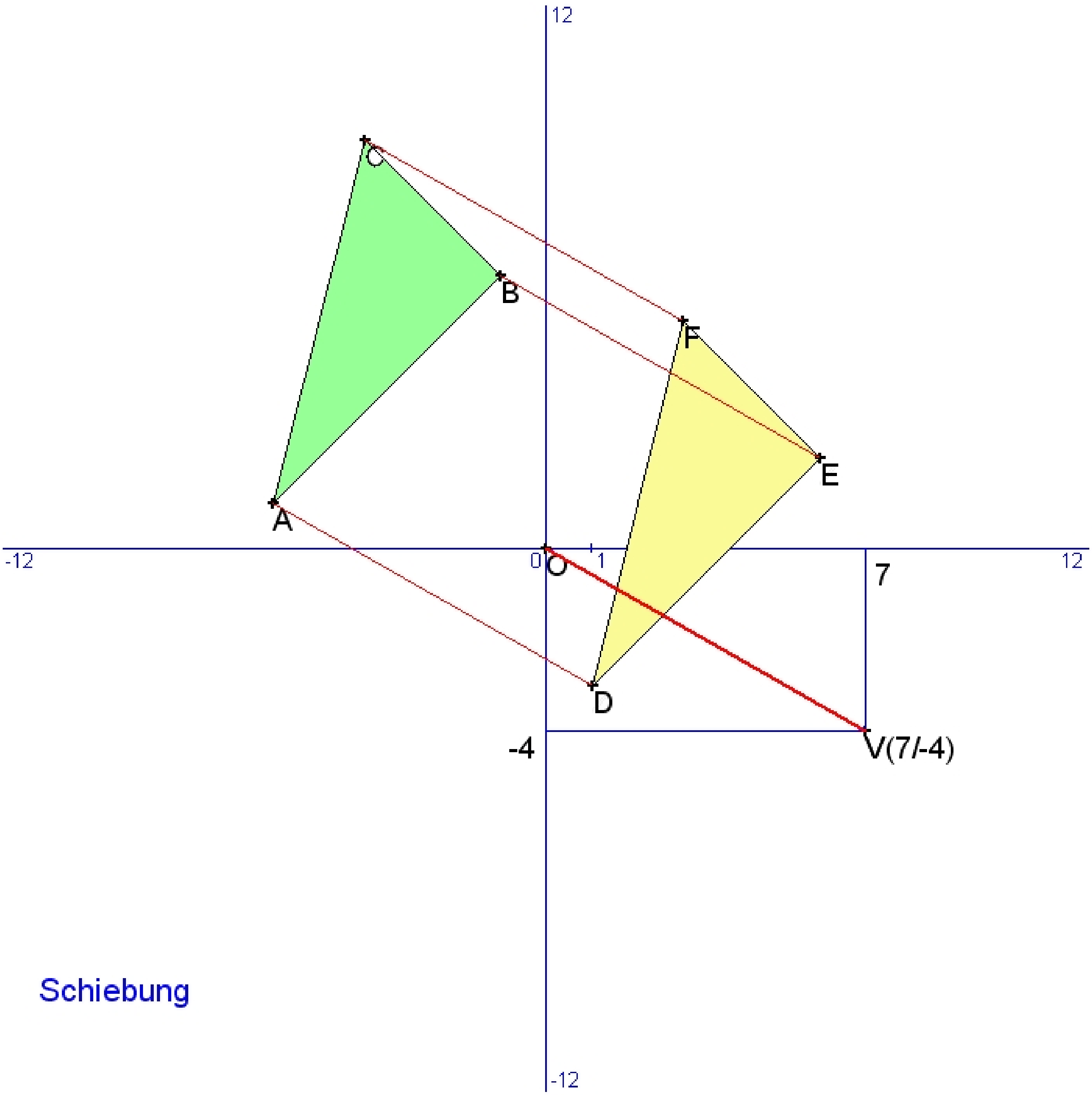
Zum Beginn wollen wir uns eingehender mit Schiebungen befassen. Schiebungen werden ganz einfach durch Pfeile festgelegt. Jeder Pfeil ist durch seine Richtung und durch seine Länge gegeben.

Die Menge aller gleich gerichteter und gleich langer Schiebepfeile nennt man einen Vektor. Und ein solcher Schiebepfeil heißt dann ein Vetreter des Vektors. Der Urpunkt bei einer Schiebung heißt auch Fußpunkt und der Bildpunkt heißt Kopfpunkt des entsprechenden Schiebepfeiles.

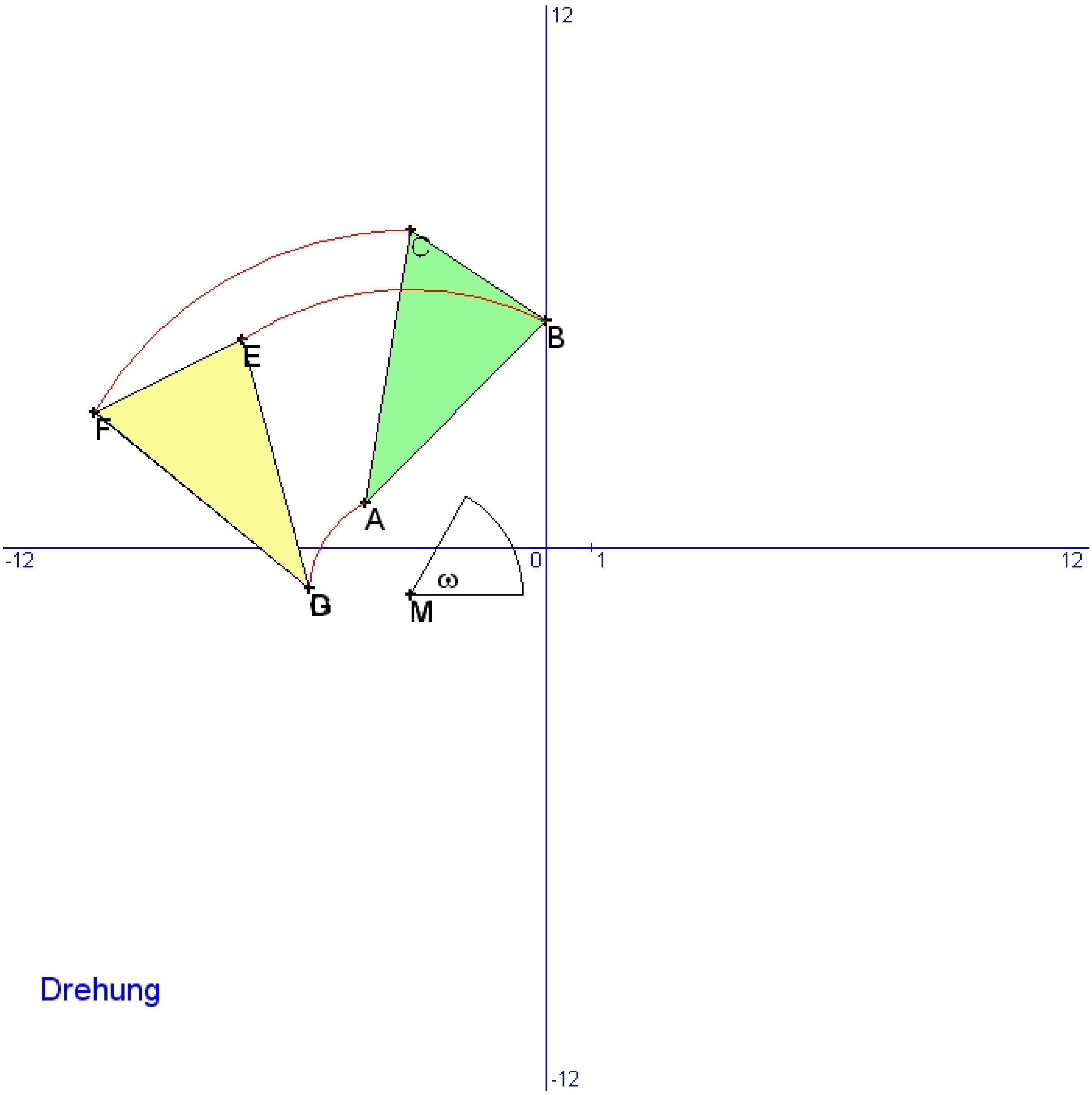
Einen Vektor kann man im Koordinatensystem der Ebene durch jenen Vetreter festlegen, dessen Fußpunkt im Koordinaten-Ursprung liegt. Durch die zwei Koordinaten (x,y) des Kopfpunktes wird die Richtung und die Länge des Vektors bestimmt.

Die Schiebungen und Drehungen bilden die Gruppe der Bewegungen. Schiebungen, Drehungen, Spiegelungen sind Kongruenzabbildungen. Streckungen sind Ähnlichkeitsabbildungen.

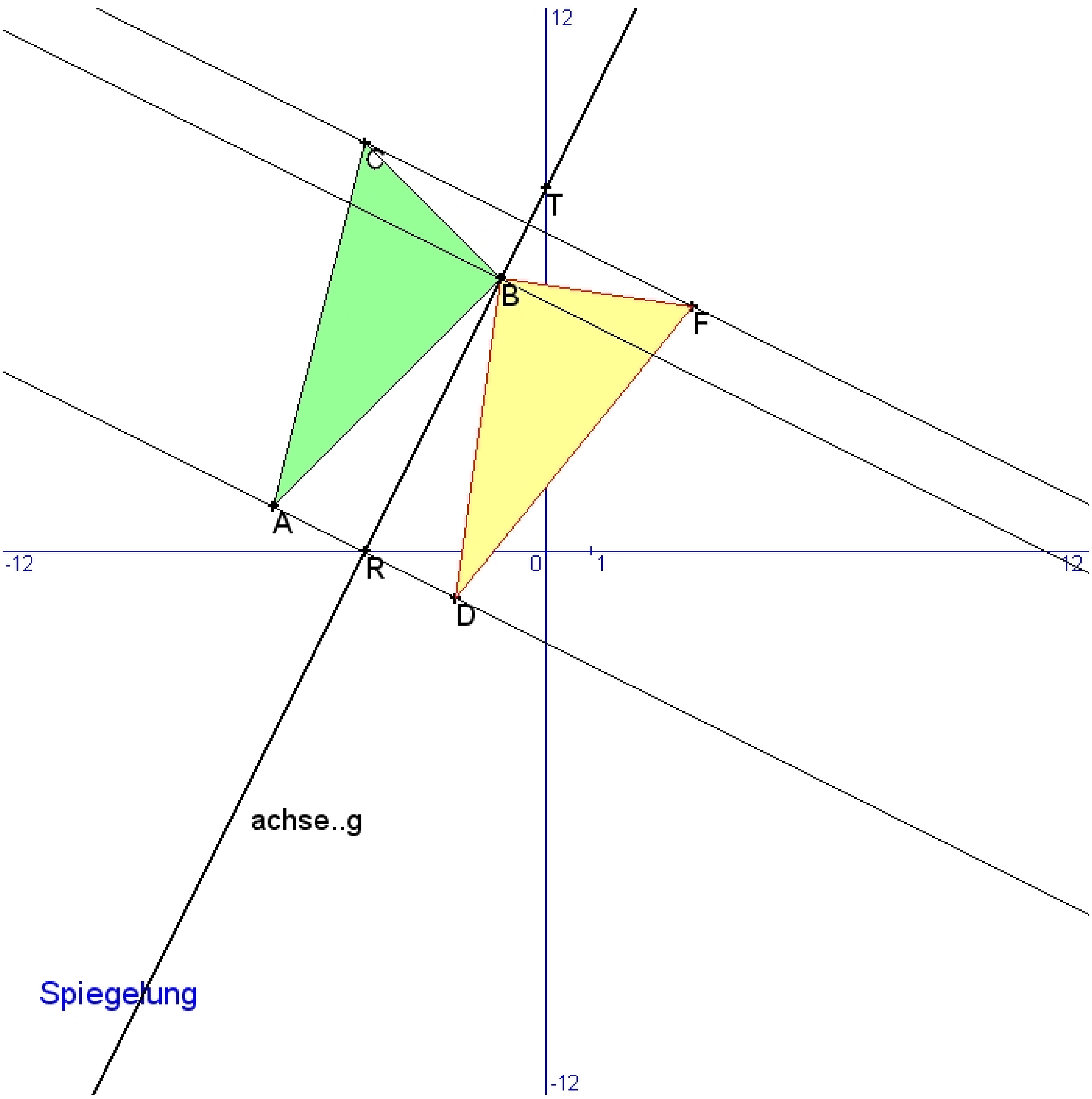
Die Schiebung: Ein gegebener Urpunkt A wird um den Schiebepfeil V auf den Bildpunkt D verschoben. In der Zeichnung wird ein Dreieck ABC verschoben.



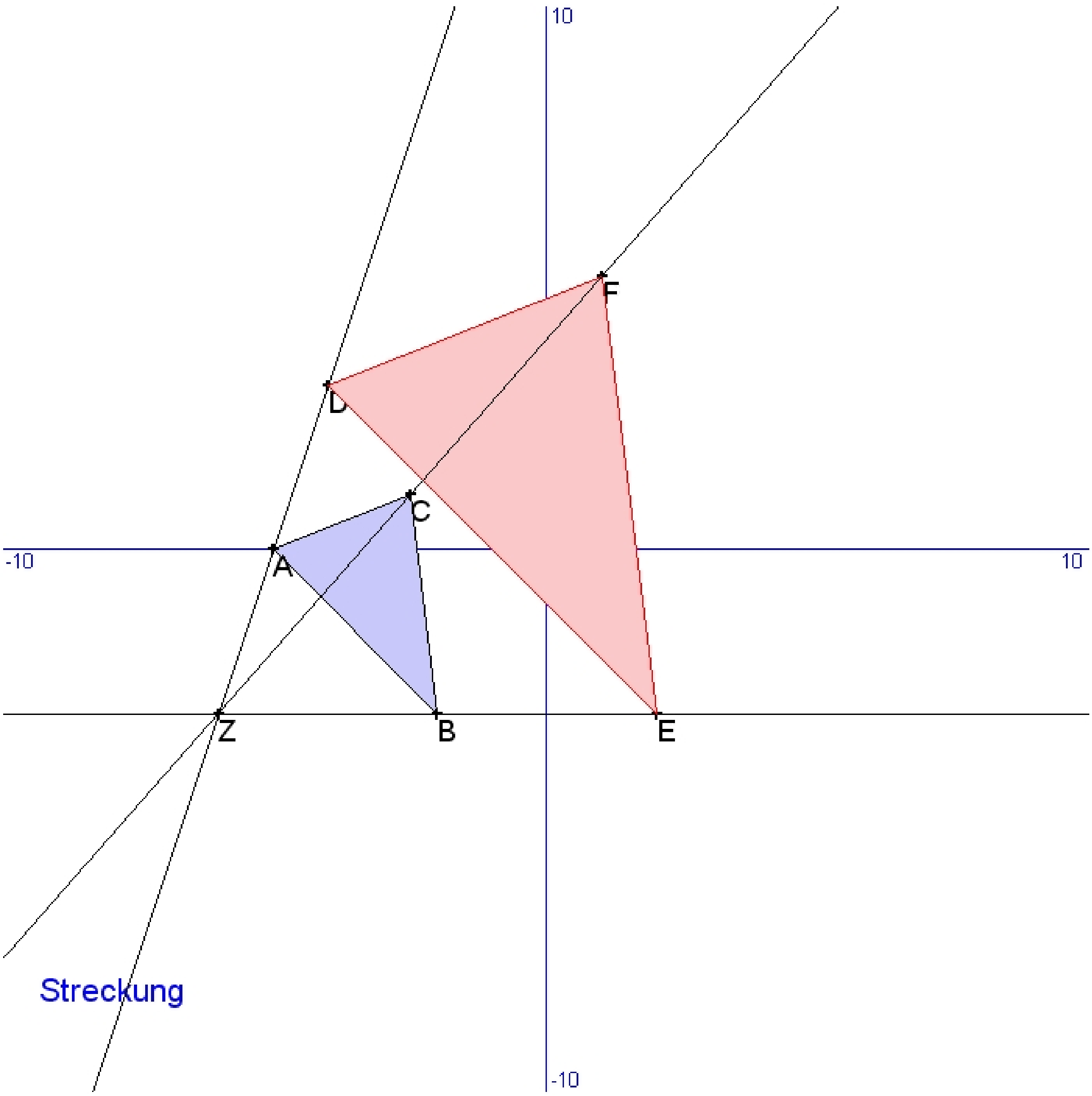
Die Drehung: Ein gegebener Urpunkt A wird um den Mittelpunkt M um Winkel w auf den Bildpunkt D gedreht. In der Zeichnung wird ein Dreieck ABC gedreht.



Die Spiegelung: Ein gegebener Punkt A wird um die Spiegelachse g geklappt, d.h. sein Bildpunkt D liegt auf der anderen Seite der Achse und ist von dieser genau so weit entfernt wie der Urpunkt A (Dg = Ag). In der Zeichnung wird ein Dreieck ABC gespiegelt.



Die Streckung: Gegeben ist ein Streckzentrum Z und ein Streckfaktor k. Ein Punkt A und sein Bildpunkt D liegen auf einem Strahl durch das Zentrum. Die Entfernung des Bildpunktes D vom Zentrum Z beträgt das k-fache der Entfernung des Urpunktes A vom Zentrum (DZ = k * AZ). In der Zeichnung wird ein Dreieck ABC auf das Zweifache gestreckt.



Theorie der Abbildungen

Matrizen und Vektoren

Eine (k x n)-Matrix ist ein Anordnungsschema von reellen Zahlen in k Zeilen und n Spalten. (n x n)-Matrizen sind quadratisch. Ein Vektor kann als Matrix mit nur einer Spalte (bzw. nur einer Zeile) aufgefasst werden. Wir betrachten im Folgenden quadratische (2 x 2)-Matrizen und Vektoren in der Ebene.

```
Matrix  M:    a   b
              c   d
```

Beispielsweise sei Q der Ortsvektor eines Punktes Q = Q(x1/y1).

Das Produkt M • Q der Matrix M mit Vektor Q ist ein Vektor P, dessen Koordinaten die skalaren Produkte der Zeilenvektoren der Matrix M mit dem Vektor Q sind.

M • Q = (a*x1 + b*y1 / c*x1 + d*y1) = P(x2 / y2).

Die Determinante DET(M) der Matrix ist die Zahl (a*d - b*c). Man kann zeigen, dass diese Determinante den Flächeninhalt jenes Parallelogramms angibt, welches von den Zeilenvektoren der Matrix (a/b) und (c/d) in der Ebene aufgespannt wird. Siehe dazu "Vektorrechnung", "Analytische Geometrie", "Lineare Systeme".

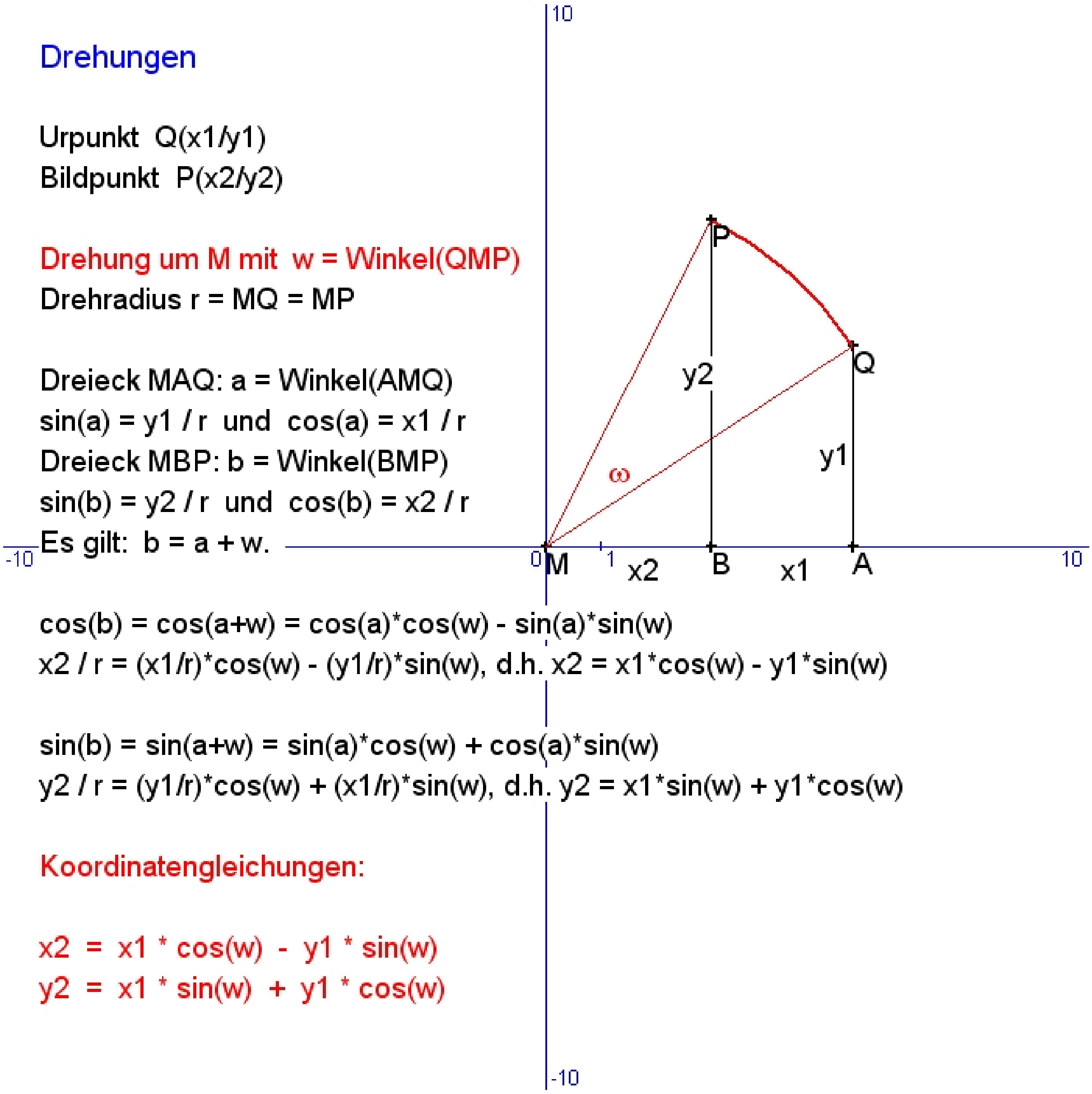
Transformationsgleichung von Drehungen

Drehungen

Urpunkt Q(x1/y1)
Bildpunkt P(x2/y2)

Drehung um M mit w = Winkel(QMP)
Drehradius r = MQ = MP

Dreieck MAQ: a = Winkel(AMQ)
sin(a) = y1 / r und cos(a) = x1 / r
Dreieck MBP: b = Winkel(BMP)
sin(b) = y2 / r und cos(b) = x2 / r
Es gilt: b = a + w.



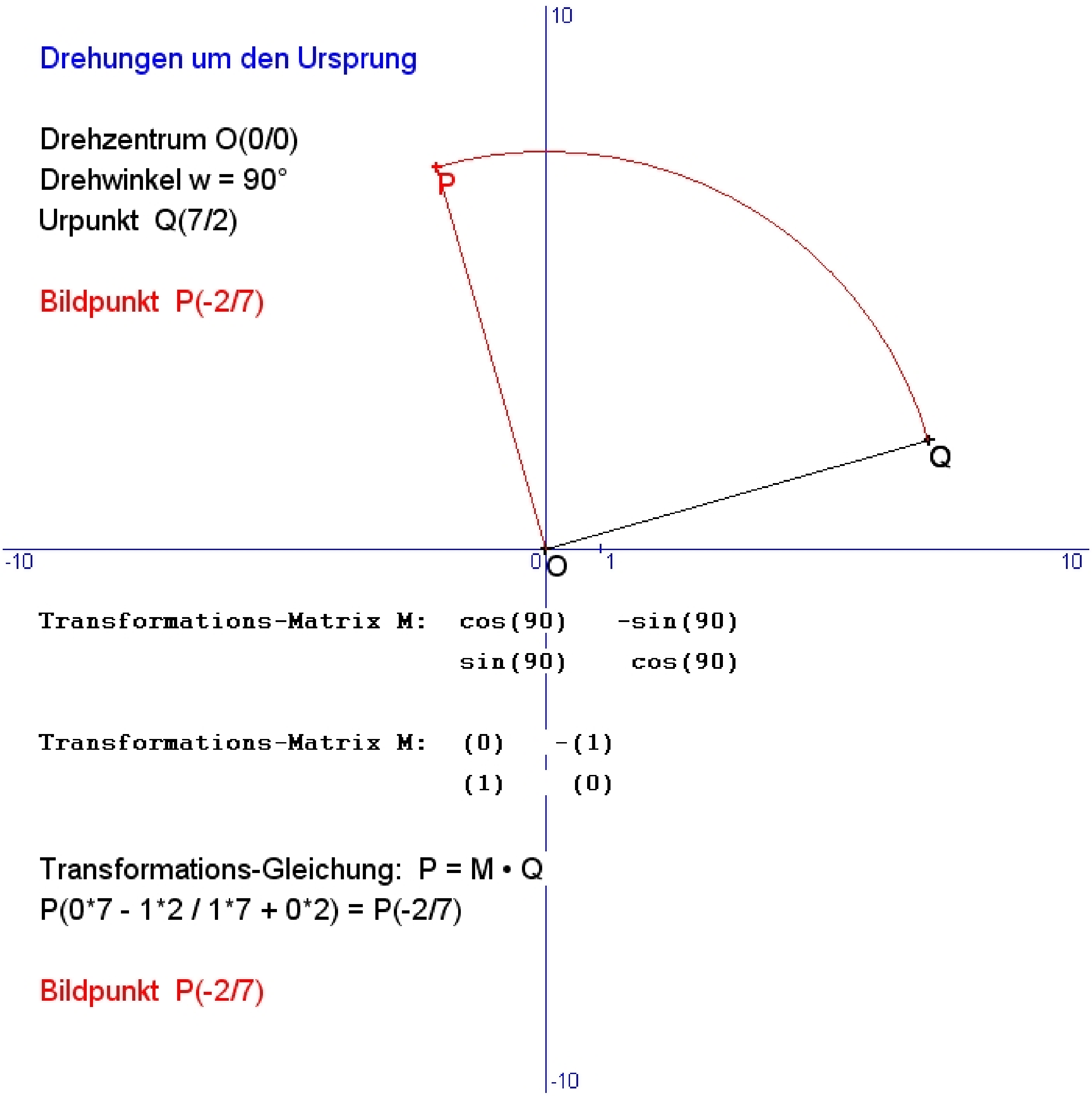
cos(b) = cos(a+w) = cos(a)*cos(w) - sin(a)*sin(w)
x2 / r = (x1/r)*cos(w) - (y1/r)*sin(w), d.h. x2 = x1*cos(w) - y1*sin(w)

sin(b) = sin(a+w) = sin(a)*cos(w) + cos(a)*sin(w)
y2 / r = (y1/r)*cos(w) + (x1/r)*sin(w), d.h. y2 = x1*sin(w) + y1*cos(w)

Koordinatengleichungen:

x2 = x1 * cos(w) - y1 * sin(w)
y2 = x1 * sin(w) + y1 * cos(w)

Beispiel einer Drehung



Transformationsgleichung von Schiebungen und Bewegungen

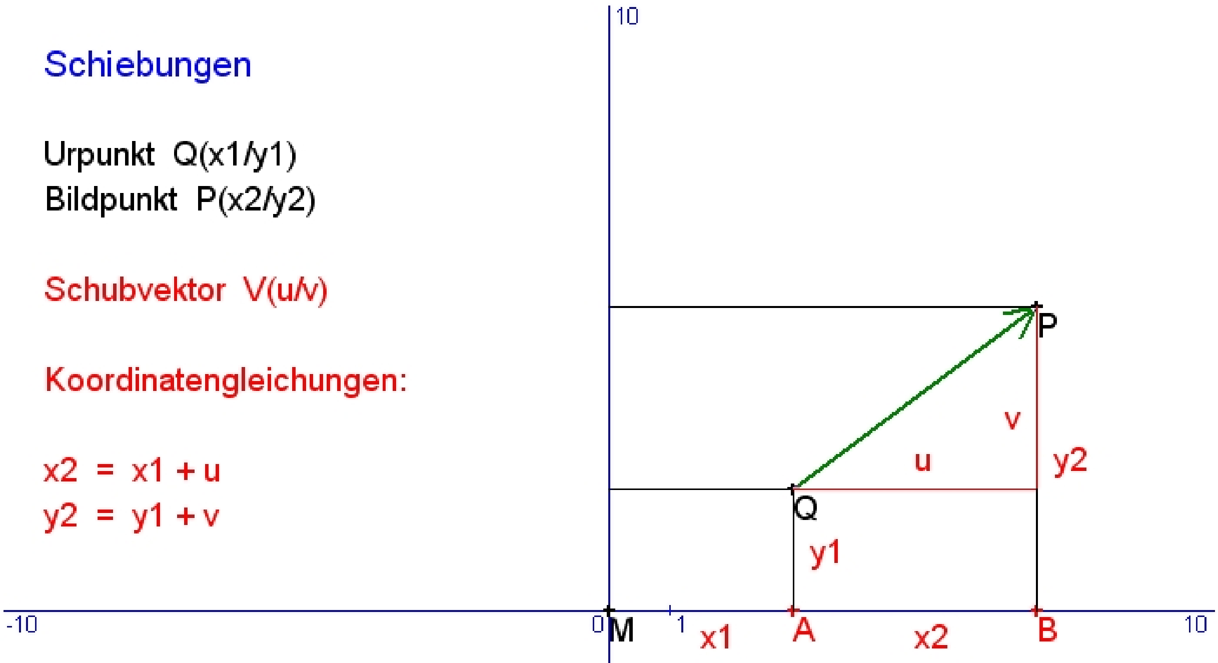
Schiebungen

Urpunkt Q(x1/y1)
Bildpunkt P(x2/y2)

Schubvektor V(u/v)

Koordinatengleichungen:

x2 = x1 + u
y2 = y1 + v

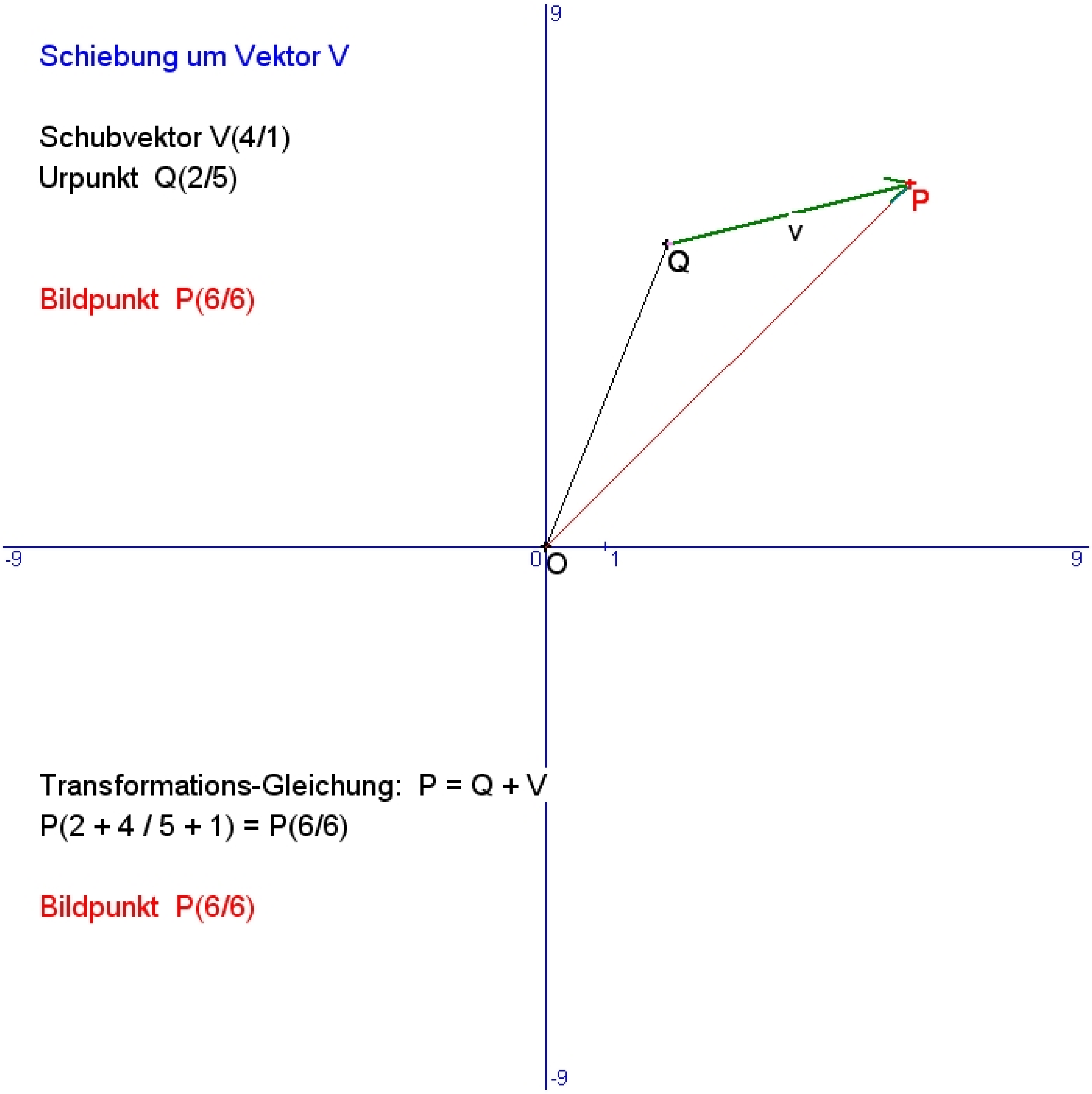


Bewegungen

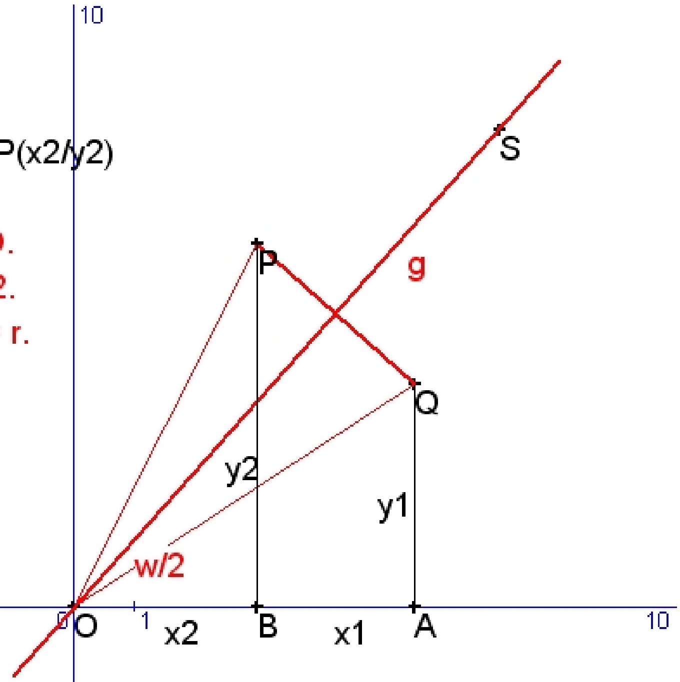
Eine Bewegung besteht aus einer Drehung D(M,w) und einer nachfolgenden Schiebung V(u/v):

x2 = x1*cos(w) - y1*sin(w) + u
y2 = x1*sin(w) + y1*cos(w) + v

Beispiel einer Schiebung



Transformationsgleichung von Spiegelungen



Spiegelungen

Urpunkt Q(x1/y1) und Bildpunkt P(x2/y2)

Spiegelachse g durch Ursprung O.
Der Steigungswinkel von g sei w/2.
Es gilt: Pg = Qg und OP = OQ = r.

Dreieck OAQ: a = Winkel(AOQ)
sin(a) = y1 / r und cos(a) = x1 / r
Dreieck OBP: b = Winkel(BOP)
sin(b) = y2 / r und cos(b) = x2 / r

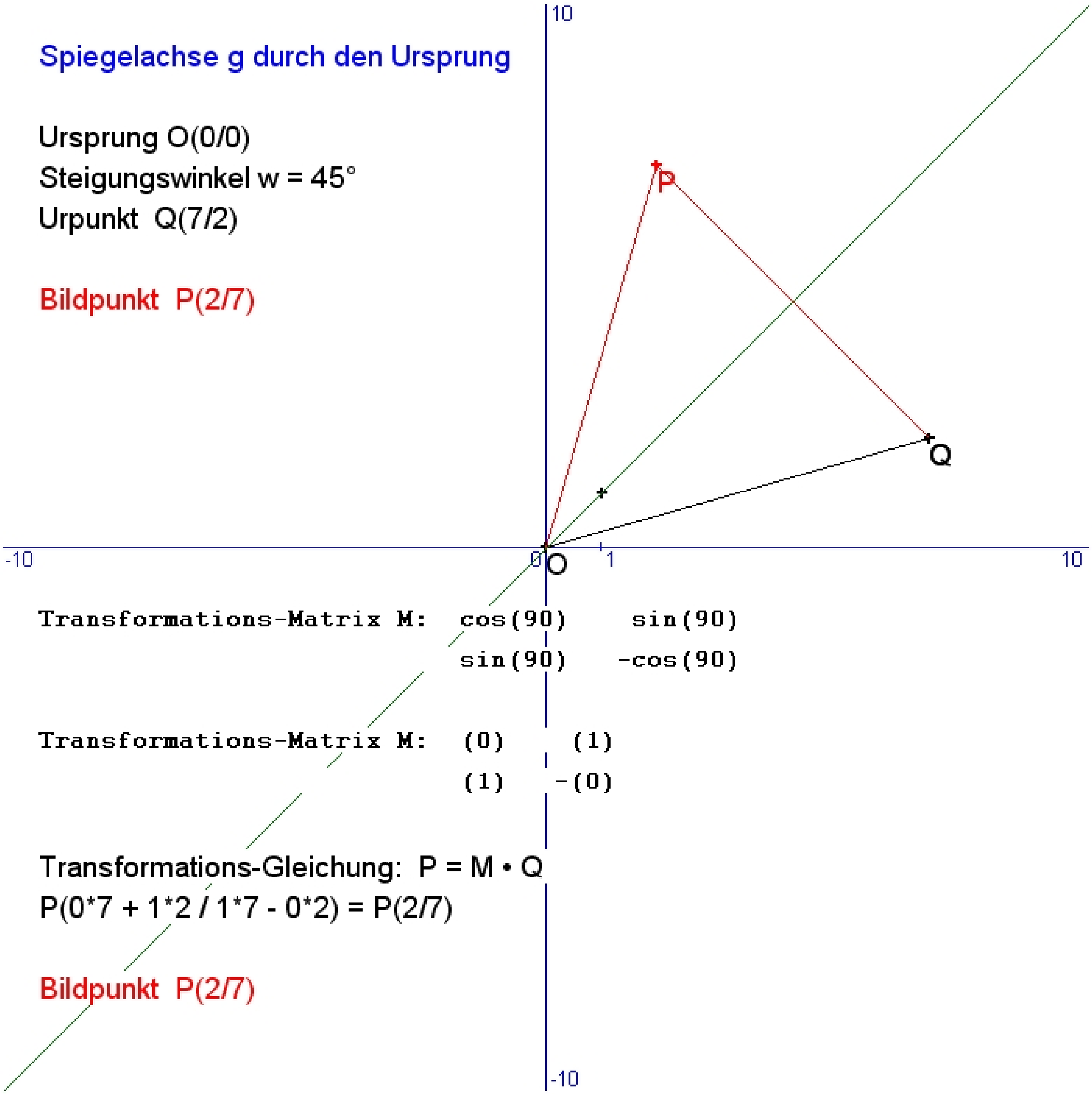
w/2 = (a+b)/2, also b = w - a.

cos(b) = cos(w-a) = cos(w)*cos(a) + sin(w)*sin(a)
x2 / r = (x1/r)*cos(w) + (y1/r)*sin(w), d.h. x2 = x1*cos(w) + y1*sin(w)

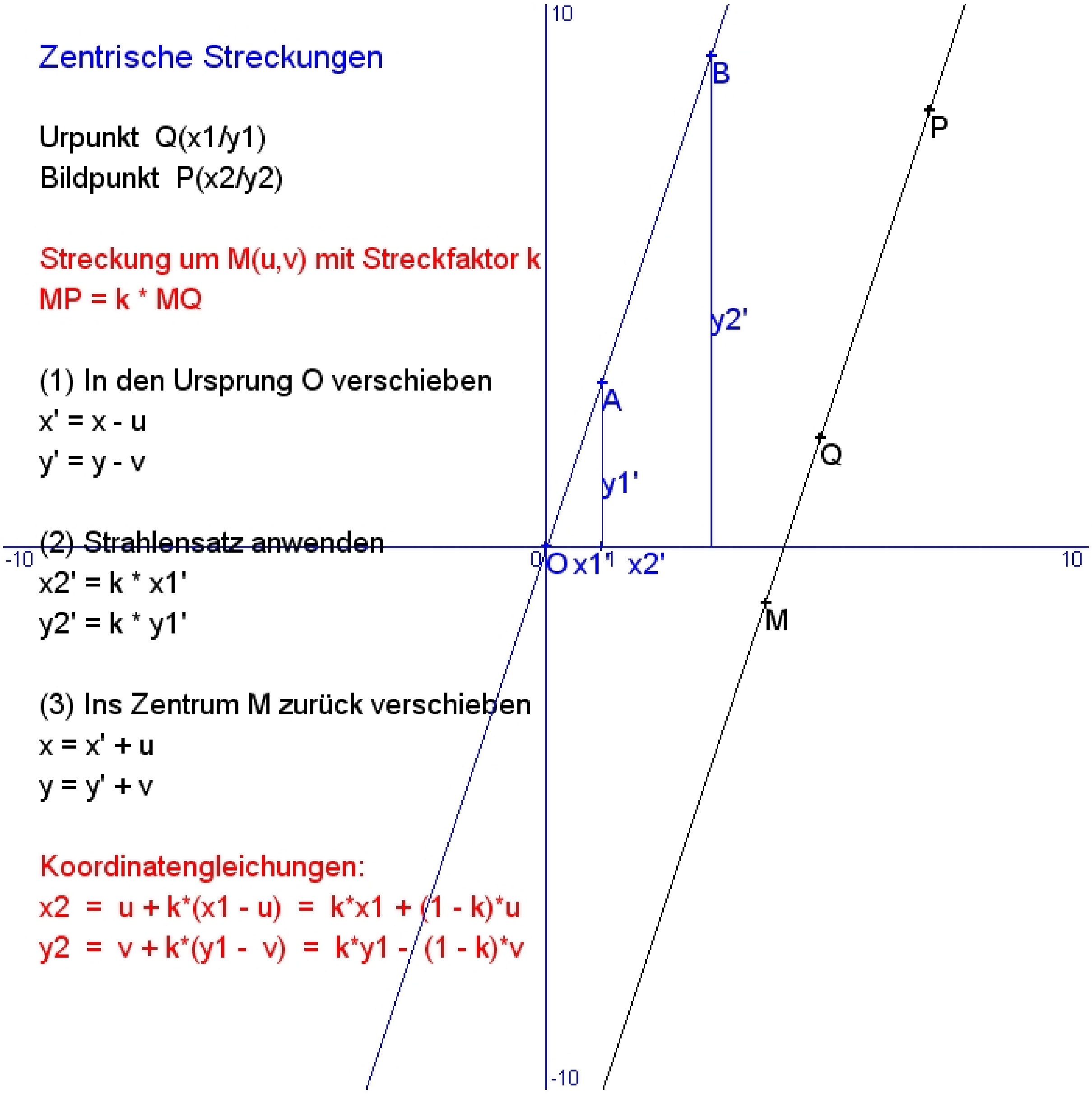
sin(b) = sin(w-a) = sin(w)*cos(a) - cos(w)*sin(a)
y2 / r = (y1/r)*cos(w) - (x1/r)*sin(w), d.h. y2 = x1*sin(w) - y1*cos(w)

Koordinatengleichungen:
x2 = x1 * cos(w) + y1 * sin(w)
y2 = x1 * sin(w) - y1 * cos(w)

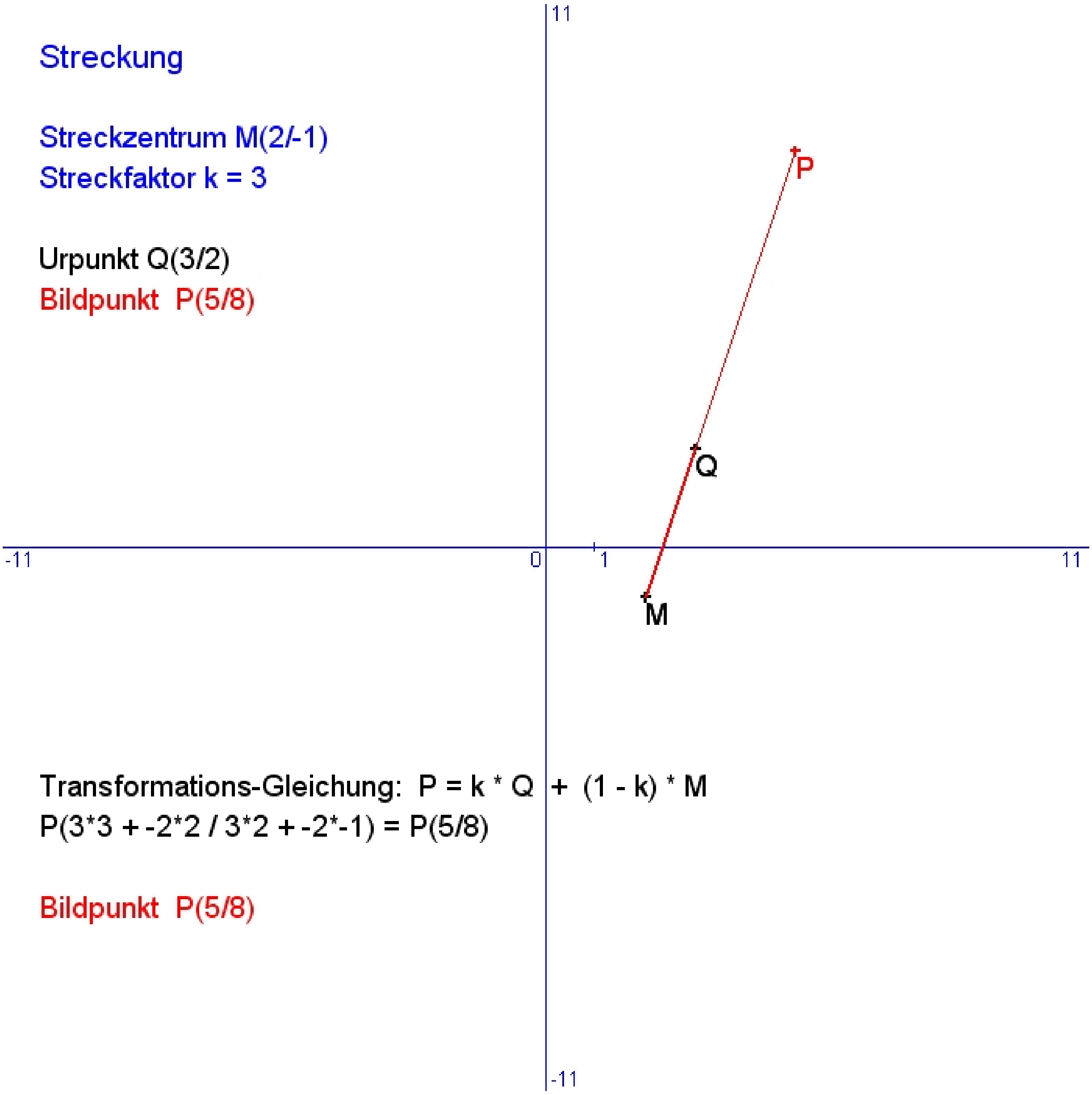
Beispiel einer Spiegelung



Transformationsgleichung von Streckungen



Beispiel einer Streckung



Hauptachsentransformation von Kegelschnitten

---

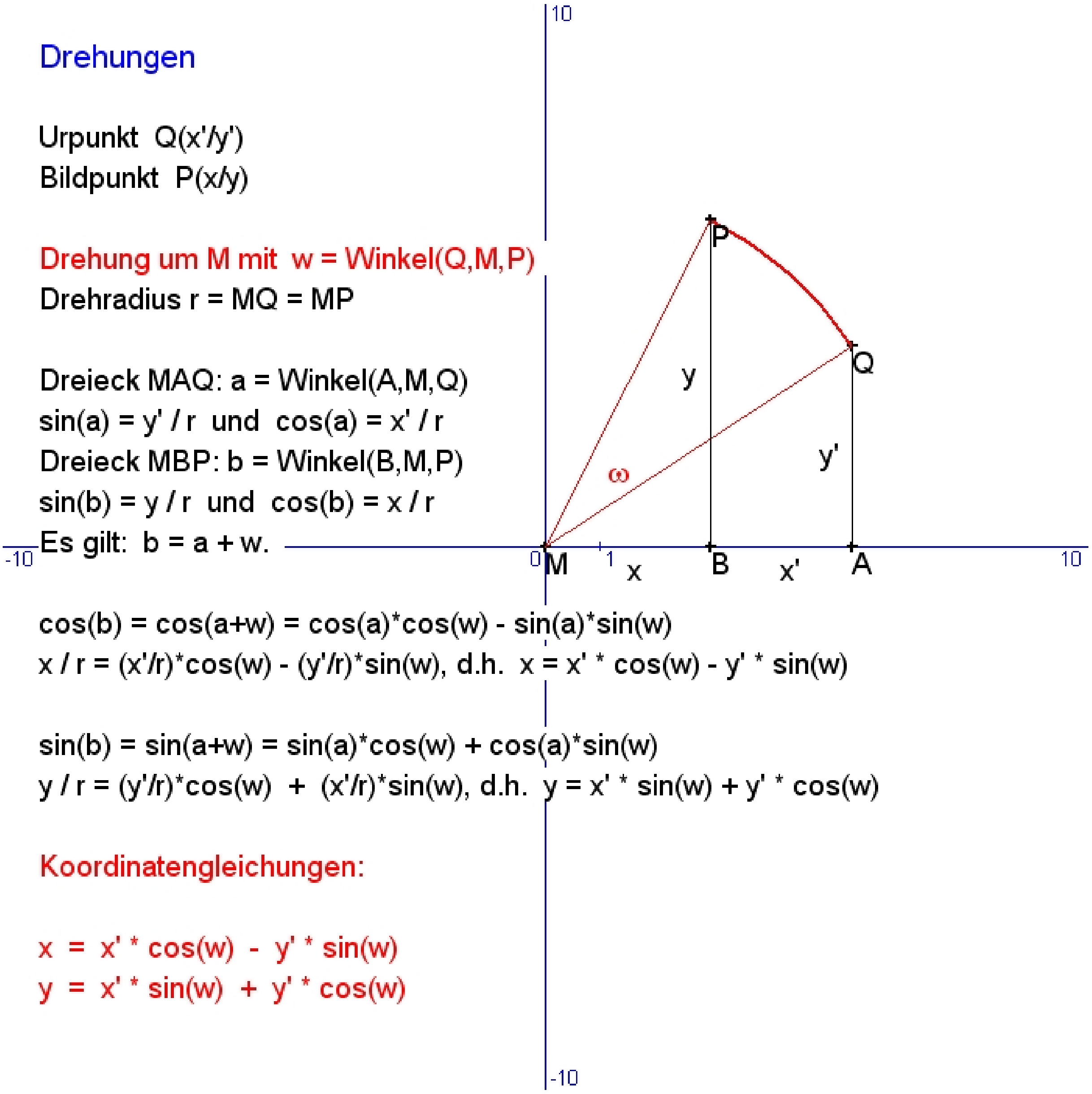
(1) Bewegungen von Punkten in der Ebene. Bewegungen sind Verkettungen von Drehungen und Schiebungen.

Drehungen

Urpunkt Q(x'/y')
Bildpunkt P(x/y)

Drehung um M mit w = Winkel(Q,M,P)
Drehradius r = MQ = MP

Dreieck MAQ: a = Winkel(A,M,Q)
sin(a) = y' / r und cos(a) = x' / r
Dreieck MBP: b = Winkel(B,M,P)
sin(b) = y / r und cos(b) = x / r
Es gilt: b = a + w.



cos(b) = cos(a+w) = cos(a)*cos(w) - sin(a)*sin(w)
x / r = (x'/r)*cos(w) - (y'/r)*sin(w), d.h. x = x' * cos(w) - y' * sin(w)

sin(b) = sin(a+w) = sin(a)*cos(w) + cos(a)*sin(w)
y / r = (y'/r)*cos(w) + (x'/r)*sin(w), d.h. y = x' * sin(w) + y' * cos(w)

Koordinatengleichungen:

x = x' * cos(w) - y' * sin(w)
y = x' * sin(w) + y' * cos(w)

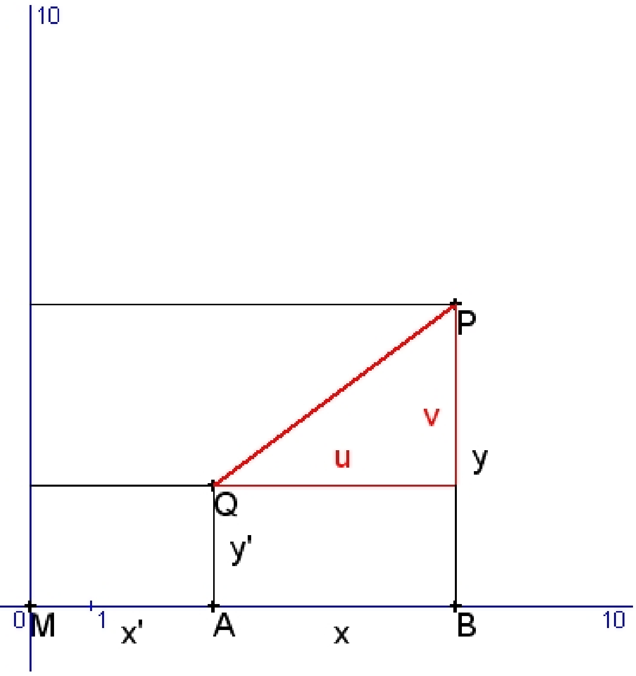
Schiebungen

Urpunkt Q(x'/y')
Bildpunkt P(x/y)

Schubvektor V(u/v)

Koordinatengleichungen:

$x = x' + u$
$y = y' + v$



Bewegungen

Eine Bewegung besteht aus einer Drehung D(M,w) und einer nachfolgenden Schiebung V(u/v):

(1a) $x = x' \cos(w) - y' \sin(w) + u$
(1b) $y = x' \sin(w) + y' \cos(w) + v$

Für die umgekehrte Bewegung, V(-u/-v) und dann D(M,-w), gilt:

(2a) $x' = (x - u) \cos(w) + (y - v) \sin(w)$
(2b) $y' = -(x - u) \sin(w) + (y - v) \cos(w)$

---

(2) Bewegungen von Kegelschnitten aus der Hauptlage in eine allgemeine Lage in der Ebene und ihre Rückkehr von der allgemeinen Lage in die Hauptlage.

Wenn nun ein Kegelschnitt in Hauptlage vorliegt, dann fallen seine Hauptachsen mit den Achsen des Koordinatensystems zusammen und sein Mittelpunkt M ist der Ursprung des Koordinatensystems. Beispielsweise gilt für die Ellipse (EL'): $b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2$.

Wird eine Bewegung ausgeführt, dann werden für x' und y' die Formeln (2a) und (2b) eingesetzt. Nach Einsetzen und Umformen wird aus der Hauptgleichung (EL') die allgemeine Gleichung (EL):

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Diese quadratische Form f(x,y) = 0 nennt man auch eine "Quadrik". Will man aus einer vorgegebenen Quadrik den entsprechenden Kegelschnitt gewinnen (Hauptachsentransformation), so müssen aus den Koeffizienten A, B, . . . F die Hauptachsenlängen a und b ermittelt werden. Dabei ist folgendermaßen vorzugehen:

[1] Bestimung des Kurventyps
[2] Ermittlung des Schubvektors V(u,v)
[3] Ermittlung des Drehwinkels w
[4] Bestimmung der Hauptachsenlängen a und b

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ [G1].

[1] Bestimmung des Kurventyps: Um das Verhalten im Unendlichen zu ermitteln, wird durch x^2 dividiert: $A+By/x+Cy^2/x^2+D/x+Ey/x^2+F/x^2 = 0$.
Mit $k = (y/x)$ und für x gegen Unendlich gilt dann: $A + Bk + Ck^2 = 0$.
$g = DISK = (B^2 - 4AC)$. Für Hyperbeln ist $g > 0$ (2 reelle Asymptoten).
Für Parabeln ist $g = 0$ (1 reelle A.). Für Ellipsen ist $g < 0$ (0 reelle A.).

[2] Schiebung: $x = x' + u$ und $y = y' + v$.

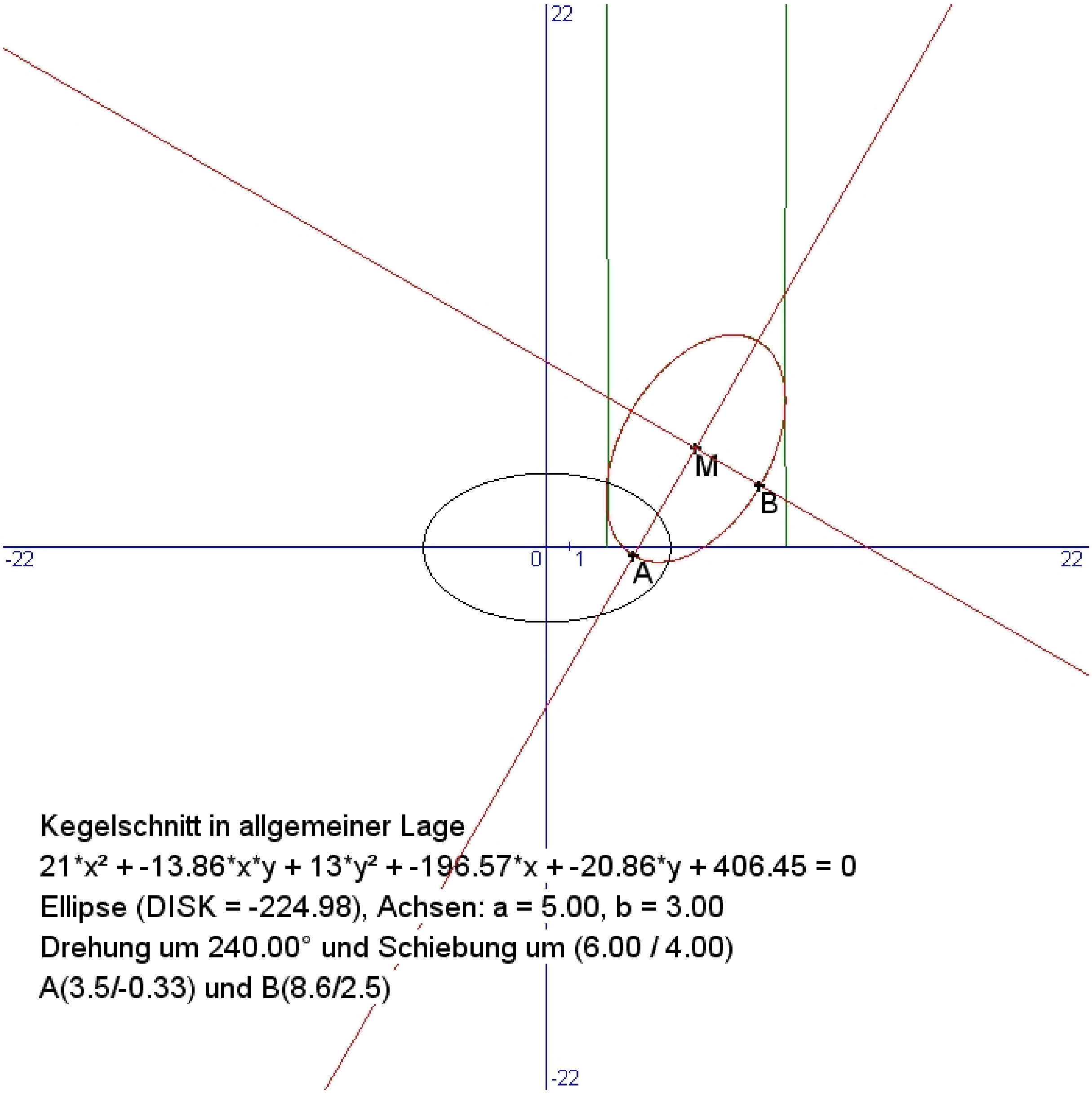
$A(x'+u)^2 + B(x'+u)(y'+v) + C(y'+v)^2 + D(x'+u) + E(y'+v) + F = 0$.
$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + r x' + s y' + t = 0$.
$r = (2Au+Bv+D)$.
$s = (Bu+2Cv+E)$.
$t = (Au^2+Cv^2+Buv+Du+Ev+F)$.
u und v sind so zu bestimmen, dass $r = 0$ und $s = 0$ werden.
Damit ist die Schiebung V(u/v) ermittelt. Nachdem sie durchgeführt wird, ergibt sich für den nur mehr gedrehten Kegelschnitt:
$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + t = 0$ [G2].

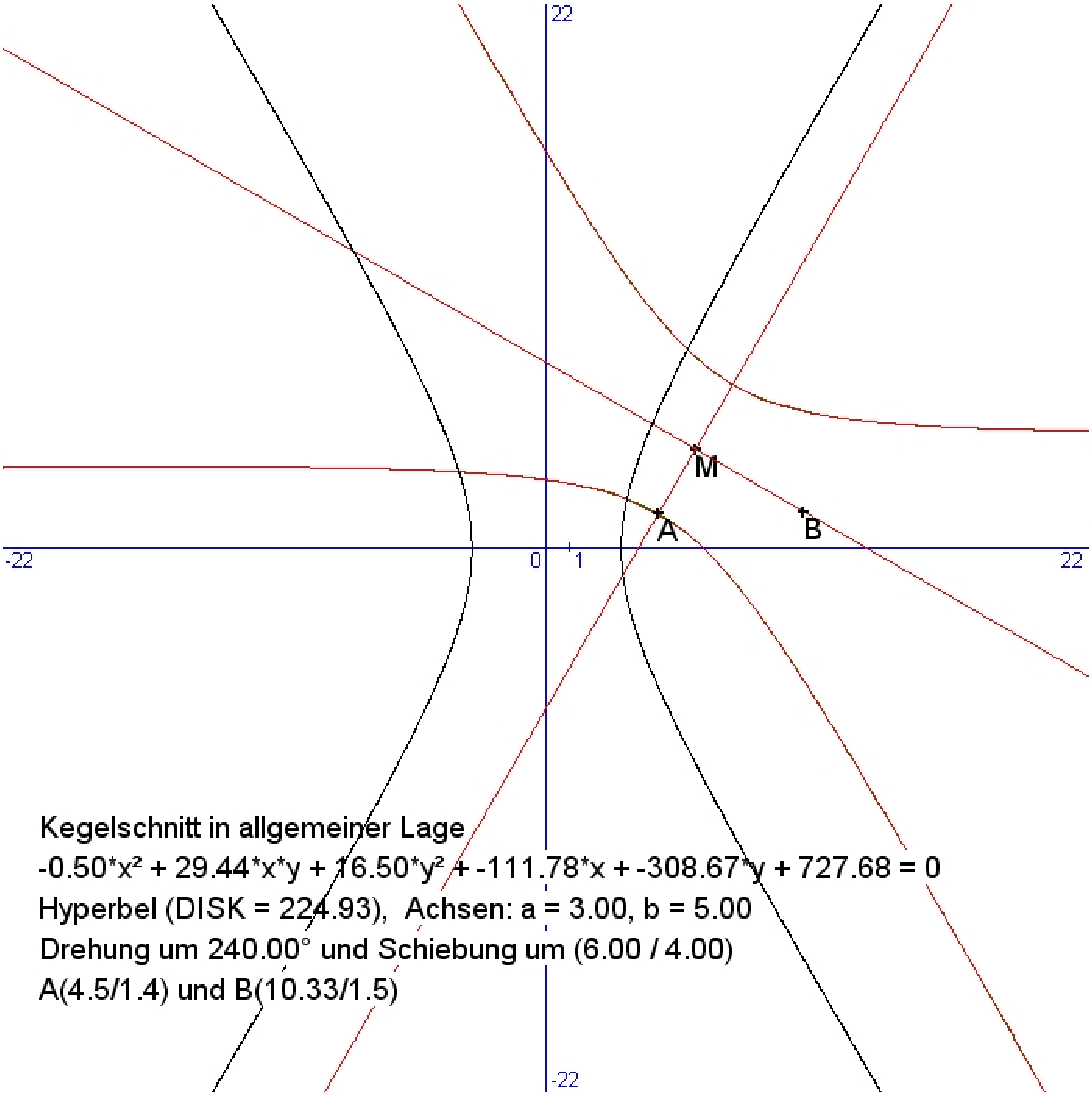
[3] Drehung: $x' = x''\cos(w) - y''\sin(w)$ und $y' = x''\sin(w) + y''\cos(w)$.

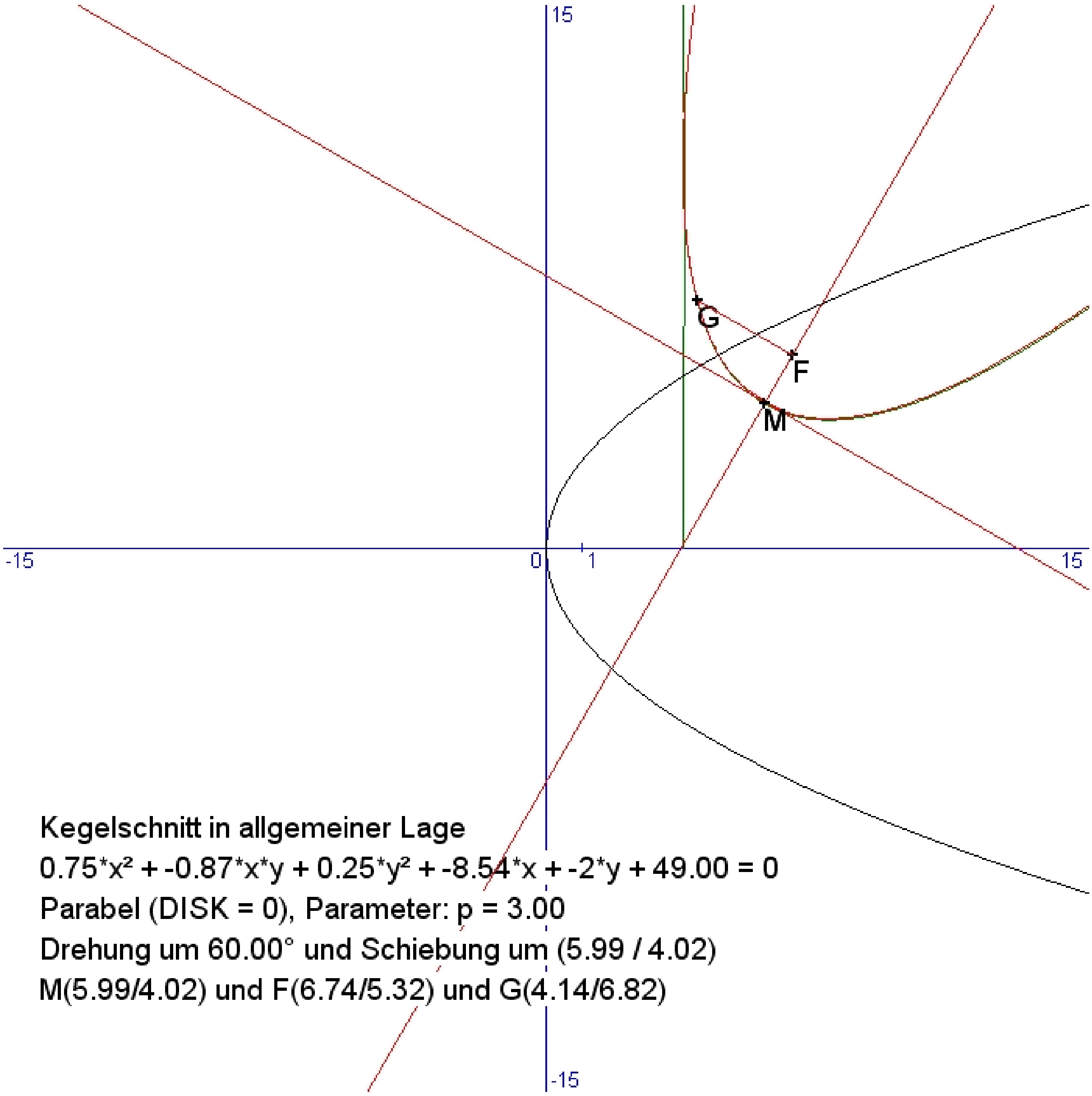
Setzt man x' und y' in [G2], erhält man $i\,x''^2 + h\,x''y'' + j\,y''^2 + t = 0$.
Der Winkel w ist so zu bestimmen, dass der Koeffizient $h = 0$ wird.
$h = -2A\sin(w)\cos(w) + B(\cos^2(w) - \sin^2(w)) + 2C\sin(w)\cos(w) = 0$.
$-A\sin(2w) + B\cos(2w) + C\sin(2w) = 0$, d.h. $B\cos(2w) = (A - C)\sin(2w)$.
Also ist $\tan(2w) = B/(A - C)$. Für den Kegelschnitt in Hauptlage gilt:
$i\,x''^2 + j\,y''^2 + t = 0$ [G3].

[4] Für die Hauptachsenlängen gilt dann: $a^2 = - t / i$ und $b^2 = - t / j$.

----
(3) Beispiele von Hauptachsen-Transformationen




22
-22
0
1
22
-22
M
A
B
Kegelschnitt in allgemeiner Lage
-0.50*x² + 29.44*x*y + 16.50*y² + -111.78*x + -308.67*y + 727.68 = 0
Hyperbel (DISK = 224.93), Achsen: a = 3.00, b = 5.00
Drehung um 240.00° und Schiebung um (6.00 / 4.00)
A(4.5/1.4) und B(10.33/1.5)


15
-15
0
1
15
-15
G
F
M
Kegelschnitt in allgemeiner Lage
0.75*x² + -0.87*x*y + 0.25*y² + -8.54*x + -2*y + 49.00 = 0
Parabel (DISK = 0), Parameter: p = 3.00
Drehung um 60.00° und Schiebung um (5.99 / 4.02)
M(5.99/4.02) und F(6.74/5.32) und G(4.14/6.82)

ENDE von MATHE 8