

REIHENENTWICKLUNGEN

Eine kurze Einführung

[1] Reihen mit konstanten Gliedern [2]

[2] Potenzreihen [6]

[3] Reihenentwicklung von Funktionen [8]

[1] Reihen mit konstanten Gliedern

Gegeben sei eine unendliche Zahlenfolge $\{a_k\}$. Wir bilden nun die Summe der ersten n Glieder und bezeichnen sie als n -te Teilsumme s_n . $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$. Die Folge dieser Teilsummen $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ wird als REIHE $\{s_n\}$ bezeichnet. Die Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert s , wenn die Folge der Teilsummen gegen s konvergiert. Man schreibt dann $SUM(a_n) = s = \lim s_n$ für n gegen Unendlich.

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = SUM(a_n) = s$$

Für den Grenzwert einer Folge gilt, dass fast alle Glieder (d.h. alle bis auf endlich viele) beliebig nahe beim Grenzwert liegen.

Satz: Wenn eine Reihe $\{s_n\}$ konvergiert, dann bilden die Glieder a_n eine Nullfolge.

Beweis: $s = \lim s_n$. Für beliebig kleine Längen ϵ und für alle n ab einer Nummer N , d.h. für fast alle n gilt: $|s - s_n| < \epsilon$. Es sind $s_n = s_{n-1} + a_n$ und $|s_n - s_{n-1}| < |s - s_{n-1}|$. $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < |s - s_{n-1}| < \epsilon$. Also wird a_n beliebig klein und bildet eine Nullfolge.

Die Majorante einer Reihe

Wenn für fast alle Glieder a_n einer Reihe gilt $|a_n| \leq |b_n|$, dann nennt man die Reihe $\{b_n\}$ eine Majorante von $\{a_n\}$. Wegen $|a_n| \leq |b_n|$ gilt auch $SUM(a_n) \leq SUM(b_n)$. Daraus folgt: Wenn eine Majorante einen Grenzwert hat, dann hat auch die Reihe einen Grenzwert und heißt konvergent (Majorantenkriterium).

Die Minorante einer Reihe

Wenn für fast alle Glieder a_n einer Reihe gilt $|a_n| \geq |b_n|$, dann nennt man die Reihe $\{b_n\}$ eine Minorante von $\{a_n\}$. Wegen $|a_n| \geq |b_n|$ gilt auch $SUM(a_n) \geq SUM(b_n)$. Daraus folgt: Wenn eine Minorante keinen Grenzwert hat, dann hat auch die Reihe keinen Grenzwert und heißt divergent. (Minorantenkriterium).

Arithmetische Folgen und Reihen

Bei einer arithmetischen Folge $\{a_k\}$ ist die Differenz d von zwei benachbarten Gliedern immer konstant: $a_{k+1} - a_k = d$. Ist a_1 das Anfangsglied, dann gilt: $a_k = a_1 + (k-1)*d$.

Für die Summe der arithmetischen Reihe s_n gilt:

$$s_n = a_1 + (a_1 + 1*d) + (a_1 + 2*d) + \dots + (a_1 + (n-1)*d)$$

$$s_n = n * a_1 + d*(1+2+3+ \dots +(n-1)).$$

Die Summe $1+2+3+\dots+(n-1)$ wird einfach dadurch berechnet, dass fortlaufend k und $(n-k)$ addiert werden. Das ist immer n , und zwar genau $(n-1)/2$ Mal. Also ist die Summe $n*(n-1)/2$.

Für die arithmetische Reihe gilt daher:

$$s_n = n*a_1 + d*n*(n-1)/2 = (n/2) * [2*a_1 + d*(n-1)]$$

Unendliche arithmetische Reihen sind immer unbeschränkt und streng monoton wachsend und daher divergent.

Beispiel für eine arithmetische Folge: 1, 3, 5, 7,

Hier gilt: $a_1 = 1$ und $d = 2$ und $s_n = n/2*(2+2*(n-1)) = n^2$,

d.h. die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2 .

Geometrische Folgen und Reihen

Bei einer geometrischen Folge $\{b_k\}$ ist der Quotient q von zwei benachbarten Gliedern immer konstant: $b_{k+1} / b_k = q$. Ist b_1 das Anfangsglied, dann gilt: $b_k = b_1 * q^{k-1}$.

Für die Summe der geometrischen Reihe s_n gilt:

$$s_n = b_1 + (b_1 * q^1) + (b_1 * q^2) + \dots + (b_1 * q^{n-1})$$

$$s_n = b_1 * (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = b_1 * h$$

$$h = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$q*h = q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

$$h - q*h = 1 - q^n$$

$$h = (1 - q^n) / (1 - q)$$

Für die geometrische Reihe gilt daher: $s_n = b_1 * (1 - q^n) / (1 - q)$

Beispiel für eine geometrische Folge: 1, 2, 4, 8, 16,

Hier gilt: $b_1 = 1$ und $q = 2$ und $s(n) = 1 \cdot (1 - 2^n) / (1 - 2)$.

Die Summe der ersten n Zweierpotenzen ist $(2^n - 1)$.

Unendliche geometrische Reihen

Geometrische Reihe $\{ b_k \}$: $b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^n + \dots$

Es wurde gezeigt, dass für die n -te Teilsumme s_n einer geometrischen Reihe gilt:

$$s_n = b_1 \cdot (1 - q^n) / (1 - q)$$

Das Konvergenzverhalten der Reihe hängt offensichtlich vom Quotienten q ab.

Wenn $|q| \geq 1$ ist, dann ist die geometrische Reihe unbeschränkt und auch streng monoton wachsend und daher divergent.

Wenn $|q| < 1$ ist, dann kann mit der Teilsummenformel s_n für n gegen Unendlich ein Grenzwert berechnet werden. Für $|q| < 1$ ist die Folge $\{ q^n \}$ eine Nullfolge.

Also gilt: $\lim s_n = s = b_1 / (1 - q)$ für n gegen Unendlich.

Beispiel für eine geometrische Reihe: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$

Hier gilt: $b_1 = 1$ und $q = 1/2$. Die Reihe ist daher konvergent und ihre unendliche Reihensumme ist $s = 1 / (1 - 1/2) = 2$.

Unbedingt sei noch erwähnt, dass geometrische Reihen oft als Majoranten zur Konvergenzermittlung verwendet werden.

Drei Beispiele von besonderen Reihen

$$R1: s_n = 1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \dots + 1/(n \cdot (n+1))$$

$$a_n = 1/(n \cdot (n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$$

$$s_n = (1/1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + \dots + (1/n - 1/(n+1))$$

$$s_n = 1 - 1/(n+1)$$

$\lim s_n = 1$ für n gegen Unendlich.

Reihe R1 ist konvergent.

$$\mathbf{R2: } s_n = 1 + 1/4 + 1/9 + \dots + 1/n^2$$

$$a_n = 1/n^2 = 1/(n \cdot n) < 1/((n-1) \cdot n)$$

Daher ist die Reihe R1 eine Majorante.

Weil diese konvergiert, konvergiert auch die Reihe R2.

$$\mathbf{R3: } s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$$

$$s_n = 1 + 1/2 + (1/3+1/4) + (1/5+1/6+1/7+1/8) + (1/9+ \dots+1/16) + \dots$$

$$s_n > 1 + 1/2 + (1/4+1/4) + (1/8+1/8+1/8+1/8) + (1/16+ \dots+1/16) + \dots$$

$$s_n > 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots$$

Die so erhaltene Vergleichsreihe ist eine Minorante zur Reihe R3.

Sie ist offensichtlich divergent. So ist auch Reihe R3 divergent.

Das Quotientenkriterium

Satz: Hinreichend für die Konvergenz einer Reihe ist, dass für fast alle Glieder die Bedingung $a_{k+1} / a_k < 1$ gilt.

Beweis: Ab einer Grenznummer N gibt es eine Zahl q derart, dass

$a_{k+1} / a_k < q < 1$ für alle $k > N$ gilt. Daraus folgt:

$$a_{N+1} < a_N \cdot q$$

$$a_{N+2} < a_{N+1} \cdot q < a_N \cdot q^2$$

$$a_{N+3} < a_{N+2} \cdot q < a_{N+1} \cdot q^2 < a_N \cdot q^3$$

.....

$$s_{N+k} = (a_1 + a_2 + \dots + a_N) + (a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k})$$

$$s_{N+k} = s_N + (a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k})$$

$$s_{N+k} < s_N + (a_N \cdot q + a_N \cdot q^2 + \dots + a_N \cdot q^k)$$

Daher gibt es zur gegebenen Reihe eine geometrische Reihe als konvergente Majorante, weil $q < 1$ ist. Nach dem Majorantensatz ist auch die Reihe konvergent.

Umgekehrt gilt, dass eine Reihe divergiert, wenn $a_{k+1} / a_k > 1$ für fast alle k ist.

[2] Potenzreihen

Polynomfunktion n-ten Grades: $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$, mit $a_k =$ reell.

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n x^n$$

Unendliche Verlängerung des Polynoms:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Eine Polynomfunktion von unendlichem Grad heißt Potenzreihe. Die Gesamtheit aller reellen Zahlen x , wo die Potenzreihe einen bestimmten, endlichen Wert $f(x)$ annimmt, heißt Konvergenzbereich. Dort konvergiert die Potenzreihe gegen $f(x)$.

Satz: Wenn eine Potenzreihe an der Stelle x_0 konvergiert, dann konvergiert sie auch an allen Stellen x mit $|x| < |x_0|$.

Bew.: $\sum a_n \cdot x_0^n$ ist eine konvergente Majorante für $\sum a_n \cdot x^n$.

Satz: Wenn eine Potenzreihe an der Stelle x_0 divergiert, dann divergiert sie auch an allen Stellen x mit $|x| > |x_0|$.

Bew.: $\sum a_n \cdot x_0^n$ ist eine divergente Minorante für $\sum a_n \cdot x^n$.

Beispiel: $f(x) = 1 + 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x^4 + 6 \cdot x^6 + \dots = 1 + \sum p_n$ mit $p_n = 2 \cdot n \cdot x^{2 \cdot n}$

Nach dem Quotientenkriterium ist hinreichend für die Konvergenz, dass

$\lim (|p_{n+1}| / |p_n|) < 1$ für n gegen Unendlich.

$$[2 \cdot (n+1) \cdot x^{2 \cdot (n+1)}] / [2 \cdot n \cdot x^{2 \cdot n}] = (1 + 1/n) \cdot x^2$$

$\lim (1 + 1/n) \cdot x^2 = x^2$ für n gegen Unendlich.

Nun ist $x^2 < 1$ für alle $x < 1$.

Daher ist die Potenzreihe für alle $x < 1$ sicherlich konvergent.

$$f(x) = 1 + 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x^4 + 6 \cdot x^6 + \dots$$

$$f(1/2) = 1 + 2 \cdot (1/4) + 4 \cdot (1/16) + 6 \cdot (1/64) + \dots$$

$$f(1/2) = 1.88476 + R_6(1/2)$$

Bricht man die schrittweise Berechnung der Reihensumme an einer Stelle x nach dem n -ten Glied ab, dann erhält man nur einen Näherungswert für die unendliche Reihensumme. Die Differenz der beiden Werte nennt man dann das n -te Restglied $R_n(x)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n) + R_n(x)$$

Man kann Potenzreihen auch in folgender Form anschreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n = a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \dots + a_n \cdot (x-c)^n + \dots$$

Die Substitution $z = (x-c)$ erzeugt dann eine Potenzreihe in gewöhnlicher Form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \dots + a_n \cdot z^n + \dots$$

Es gibt auch Potenzreihen, deren Summe s_n sich direkt als Funktion von x darstellen lässt, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel:

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$$

$$x \cdot s_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + x^{n+1}$$

$$x \cdot s_n - s_n = -1 + x^{n+1}$$

$$s_n \cdot (x - 1) = -1 + x^{n+1}$$

$$s_n = (1 - x^{n+1}) / (1 - x)$$

[3] Reihenentwicklung von Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$, welche an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches $[a;b]$ beliebig oft differenzierbar ist, heißt dort „regulär“.

Beispielsweise ist die Funktion $1/\sqrt{x}$ regulär für alle reellen $x \neq 0$.

Entwicklungssatz von Taylor: Es sei $y = f(x)$ eine in x_0 reguläre Funktion. Dann lassen sich die Funktionswerte in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 in eindeutiger Weise durch eine Potenzreihe (Taylorreihe) darstellen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n = f(x)$$

Beweis:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + a_3 \cdot (x-x_0)^3 + \dots + a_n \cdot (x-x_0)^n + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (x-x_0) + 3 \cdot a_3 \cdot (x-x_0)^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot (x-x_0) + \dots + (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot (x-x_0) + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-3} + \dots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (n+1)! \cdot a_{n+1} \cdot (x-x_0) + \dots \quad \text{Dabei ist } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

.....

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(x_0) = 2 \cdot a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$$

$$a_n = f^{(n)}(x_0) / n!$$

Die Funktion $f(x)$ lässt sich somit in $U(x_0)$ in eindeutiger Weise durch eine Potenzreihe darstellen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(x_0) / n!) \cdot (x-x_0)^n = f(x)$$

Die Umgebung $U(x_0)$ ist durch den Konvergenzbereich der Potenzreihe festgelegt und kann durch die Anwendung eines Konvergenzkriteriums bestimmt werden. Die Stelle x_0 heißt der Entwicklungspunkt und man sagt, dass $f(x)$ im Punkt x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist (Reihenentwicklung der Funktion).

Beispiele von Reihenentwicklungen

Beispiel 1: $y = \exp(x) = e^x$, regulär für alle reellen x , insbesondere für $x_0 = 0$

$$y = e^x, y' = e^x, y'' = e^x, y''' = e^x, \dots, y^{(n)} = e^x, \dots$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1, y'''(0) = 1, \dots, y^{(n)}(0) = 1$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1/2!, a_3 = 1/3!, \dots, a_n = 1/n!$$

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots + x^n/n! + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! = e^x$$

Es sei $p_n = a^n(x-x_0)^n$ das n -te Glied der Potenzreihe.

Quotientenkriterium überprüfen: $\lim (|p_{n+1}| / |p_n|) < 1$ für n gegen Unendlich.

$$\begin{aligned} |p_{n+1}| / |p_n| &= |x^{(n+1)} / (n+1)!| / |x^n / n!| = \\ &= |x / (n+1)| \end{aligned}$$

$\lim |x / (n+1)| = 0$ für n gegen Unendlich und für alle reellen x .

Die Funktion e^x lässt sich um den Punkt $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, welche sicher für alle endlichen reellen x konvergiert.

Beispiel 2: $y = \exp(-x) = e^{-x}$, regulär für alle reellen x , insbesondere für $x_0 = 0$

$$y = e^{-x}, y' = -e^{-x}, y'' = +e^{-x}, y''' = -e^{-x}, \dots, y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}, \dots$$

$$y^{(n)}(0) = (-1)^n \text{ und } a_n = (-1)^n / n!$$

$$e^{-x} = 1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + x^4/4! - \dots + (-1)^n x^n/n! + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n / n! = e^{-x}$$

Beispiel 3: $y = a^x$, mit einer beliebigen reellen Zahl a als Basis

$$a = e^{\ln(a)}$$

$$y = a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a) \cdot x}$$

$$y' = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x, y'' = (\ln(a))^2 \cdot a^x, \dots, y^{(n)} = (\ln(a))^n \cdot a^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(a))^n x^n / n! = a^x$$

Beispiel 4: $y = \ln(x)$, regulär für alle reellen $x > 0$, insbesondere für $x_0 = 1$

$$y = \ln(x),$$

$$y' = 1/x = x^{-1}$$

$$y'' = (-1) \cdot x^{-2}$$

$$y''' = (-1)(-2) \cdot x^{-3}$$

.....

$$y^{(n)} = (-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = -1, y'''(1) = 2!, \dots, y^{(n)}(1) = (-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)!$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1/2, a_3 = 1/3, \dots, a_n = (-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)! / n! = (-1)^{(n+1)} / n$$

$$\ln(x) = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + \dots + (-1)^{(n+1)} \cdot (x-1)^n / n + \dots$$

∞

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \cdot (x-1)^n / n = \ln(x)$$

Quotientenkriterium überprüfen: $\lim (|p_{n+1}| / |p_n|) < 1$ für n gegen Unendlich.

$$\begin{aligned} |p_{n+1}| / |p_n| &= | (-1)^{(n+2)} \cdot (x-1)^{(n+1)} / (n+1) | / | (-1)^{(n+1)} \cdot (x-1)^n / n | = \\ &= | (-1) \cdot (x-1) \cdot n / (n+1) | = | (1-x) / (1+1/n) | \end{aligned}$$

$\lim | (1-x) / (1+1/n) | < 1$ für n gegen Unendlich,

$= | 1-x | < 1$ für alle reellen x mit $0 < x < 2$.

Die Funktion $\ln(x)$ lässt sich um den Punkt $x_0 = 1$ in eine Potenzreihe entwickeln, welche sicher für alle reellen x in dem offenen Intervall $(0;2)$ konvergiert.

Um den Logarithmus auch von beliebigen positiven reellen Zahlen in durch eine Reihe zu ermitteln, wird eine Substitution $z = (1+x) / (1-x)$ ausgeführt.

Umgekehrt gilt dann $x = (z-1)/(z+1)$. Wenn z in $(0; \infty)$, dann x in $(-1;1)$.

$$\ln(z) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$\ln(1+x) = x - (x)^2/2 + (x)^3/3 - (x)^4/4 + \dots + (-1)^{(n+1)} \cdot (x)^n / n + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - (-x)^2/2 + (-x)^3/3 - (-x)^4/4 + \dots + (-1)^{(n+1)} \cdot (-x)^n / n + \dots$$

$$\ln(z) = 2 \cdot x + 0 + 2 \cdot x^3/3 + 0 + 2 \cdot x^5/5 + 0 + 2 \cdot x^7/7 + 0 + \dots$$

$$\ln(z) = 2 \cdot [(z-1)/(z+1) + (1/3) \cdot ((z-1)/(z+1))^3 + (1/5) \cdot ((z-1)/(z+1))^5 + \dots]$$

∞

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [(z-1)/(z+1)]^{(2n-1)} / [2n-1] = \ln(z) \text{ für alle positiven reellen Zahlen } z.$$

Beispiel 5: $y = \sin(x)$, regulär für alle reellen x , insbesondere für $x_0 = 0$

$$\begin{array}{lll}
 y = \sin(x), & y(0) = 0, & a_0 = 0 \\
 y' = +\cos(x), & y'(0) = 1, & a_1 = 1 \\
 y'' = -\sin(x), & y''(0) = 0, & a_2 = 0 \\
 y''' = -\cos(x), & y'''(0) = -1, & a_3 = -1/3! \\
 y'''' = +\sin(x), & y''''(0) = 0, & a_4 = 0 \\
 y''''' = +\cos(x), & y'''''(0) = 1, & a_5 = 1/5!
 \end{array}$$

$$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{(2n-1)} / (2n-1)!] * x^{2n-1} = \sin(x)$$

Quotientenkriterium überprüfen: $\lim (|p_{n+1}| / |p_n|) < 1$ für n gegen Unendlich.

$$\begin{aligned}
 |p_{n+1}| / |p_n| &= |(-1)^{(2n+1)} / (2n+1)! * x^{(2n+1)}| / |(-1)^{(2n-1)} / (2n-1)! * x^{(2n-1)}| = \\
 &= |x^2 / (2n+1)|
 \end{aligned}$$

$\lim |x^2 / (2n+1)| = 0$ für n gegen Unendlich und für alle reellen x .

Die Funktion $\sin(x)$ lässt sich um den Punkt $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, welche sicher für alle endlichen reellen x konvergiert.

Beispiel 6: $y = \cos(x)$, regulär für alle reellen x , insbesondere für $x_0 = 0$

Weil $\cos(x)$ die Ableitung von $\sin(x)$ ist, gilt folgende Reihenentwicklung:

$$\cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$$

Beispiel 7: $y = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$$\begin{aligned}
 y &= (1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots) + i * (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots) \\
 y &= 1 + i \cdot x + (i \cdot x)^2/2! + (i \cdot x)^3/3! + (i \cdot x)^4/4! + (i \cdot x)^5/5! + \dots = e^{i \cdot x}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Eulersche Gleichung: **$\cos(x) + i \cdot \sin(x) = e^{i \cdot x}$**
