

Grundkompetenzen in Mathematik

© Herbert Paukert

Eine heute allgemein akzeptierte Definition von „Kompetenz“ ist jene von Weinert (2001): „Kompetenzen sind die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“.

In dieser allgemeinen Definition steckt eine Fülle von tiefer gehenden Aussagen. Zunächst sind jene kognitiven Fähigkeiten gemeint, welche sowohl genetisch vererbt als auch durch die jeweilige Lernumwelt (z.B. Elternhaus, Schule) erworben werden. Dann wird der Schwerpunkt auf das individuelle Problemlöse-Verhalten gelegt und schließlich werden noch emotionale Einstellungen des Individuums miteinbezogen.

Offensichtlich steht hinter allen Kompetenzen eine allgemeine Intelligenz, sowohl in kognitiver als auch in emotionaler Hinsicht. In dieser kurzen Zusammenschau soll nur der Aspekt der kognitiven Intelligenz betrachtet werden.

[1] Faktorenanalytische Intelligenz-Modelle

Die quantitative Klassifizierung der Intelligenz durch eine einzige, globale Maßzahl wie den undifferenzierten Intelligenzquotienten IQ hat sich als nicht ausreichend erwiesen. Intelligentes Verhalten kann in verschiedene, voneinander relativ unabhängige Teilleistungen aufgegliedert werden. Was hat die Fähigkeit der räumlichen Vorstellungskraft mit verbaler Wortgewandtheit gemeinsam? Wohl sehr wenig. Daher erscheint es sinnvoller, die einzelnen Teilbereiche der menschlichen Intelligenz getrennt voneinander zu messen und differenziertere Modelle der Intelligenzstruktur zu entwerfen, als einen einheitlichen, durchschnittlichen Intelligenzquotienten zu berechnen. Ein so differenziertes Intelligenzprofil ist mit Sicherheit aussagekräftiger als nur die Angabe eines einzigen IQ-Wertes.

Der britische Forscher *Louis Thurstone* (1887 - 1955) entwickelte die faktorenanalytische Methode zur Erfassung intelligenten Verhaltens. Thurstone kommt nach umfangreichen faktorenanalytischen Untersuchungen von Testdaten, die er aus 56 verschiedenen Tests an insgesamt 240 Personen gewonnen hatte, zu seinen berühmten sieben Grundfaktoren der menschlichen Intelligenz (*seven primary mental abilities*).

Diese sieben Grundfaktoren sind voneinander relativ unabhängig und bilden die Basis für viele Intelligenztests, wie der Intelligenz-Struktur-Test (IST-70) von Rudolf Amthauer (1970) oder der Wilde-Intelligenz-Test (WIT) von Wilde, Jäger, Althoff (1983). Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang das Berliner Intelligenzstrukturmodell von Jäger (BIS, 1984). Weil die sieben Grundfaktoren nicht gänzlich unabhängig voneinander sind, sondern schwach positiv miteinander korrelieren, sehen manche Wissenschaftler darin einen Beweis für einen übergeordneten generellen Intelligenzfaktor, der dann in allen hierarchisch untergeordneten Grundfaktoren verschieden stark wirksam ist.

A. Die sieben Grundfaktoren der Intelligenz nach Thurstone:

P - perceptual speed, Wahrnehmungsgeschwindigkeit

- (a) speed of closure (Gestalterkennung)
- (b) flexibility of closure (Umstrukturierung)

S - space ability, räumliches Anschauungsvermögen

- (a) visualisation (Veranschaulichung)
- (b) spatial relations (Lagebeziehungen)

M - memory, mechanische Gedächtnisleistung

N - numerical ability, einfache Rechenfertigkeit

W - word fluency, motorische Wortflüssigkeit

V - verbal comprehension, sensorisches Sprachverständnis

R - reasoning, logisches Problemlösen

- (a) deduction (vom Allgemeinen zum Einzelfall)
- (b) induction (vom Einzelfall zum Allgemeinen)

B. Das Berliner Intelligenzstrukturmodell (BIS)

Die Kernannahmen in diesem Modell sind:

- (1) Die Struktur der Intelligenz ist hierarchisch gegliedert, d.h. es können unterschiedliche Generalitätsebenen (Abstraktionsstufen) zugeordnet werden. Auf höchster Stufe steht ein allgemeiner Generalfaktor der Intelligenz (GF), der auf allen untergeordneten Ebenen wirksam wird.
- (2) An jeder Intelligenzleistung sind neben emotionalen Bedingungen alle kognitiven Fähigkeiten beteiligt, jedoch mit unterschiedlicher Gewichtung.
- (3) Intelligenzleistungen können hinsichtlich verschiedener Aspekte klassifiziert werden. Grundlegend ist die bimodale Klassifikation in „Inhalte“ und in „Operationen“.

O P E R A T I O N

| | | | | | |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|------------------------------------|
| I N H A L T | <i>FK</i> | <i>FE</i> | <i>FM</i> | <i>FB</i> | <i>F = Figural (bildhaft)</i> |
| | <i>VK</i> | <i>VE</i> | <i>VM</i> | <i>VB</i> | |
| | <i>NK</i> | <i>NE</i> | <i>NM</i> | <i>NB</i> | <i>N = Numerisch (quantitativ)</i> |
| | | | | | |
| | K | E | M | B | |

K = Verarbeitungskapazität, **E** = Einfallsreichtum,
M = Merkfähigkeit, **B** = Bearbeitungsgeschwindigkeit

Inhaltsgebundene Fähigkeiten:

F = figural-bildhaft = anschauungsgebundenes Denken.

V = verbal = sprachgebundenes Denken.

N = numerisch = zahlengebundenes Denken.

Operative Fähigkeiten:

K = Verarbeitungskapazität = Verarbeitung komplexer Informationen bei Aufgaben, die nicht spontan lösbar sind.

E = Einfallsreichtum = flexible Ideenfülle bei der Lösung von Aufgaben.

M = Merkfähigkeit = aktives Einprägen, Wiedererkennen oder Reproduzieren von verschiedenartigem Material.

B = Bearbeitungsgeschwindigkeit = Arbeitstempo und Auffassungsgeschwindigkeit beim Lösen von einfachen Aufgaben.

Die Verknüpfung der drei Inhaltsbereiche mit den vier Grundoperationen ergibt zwölf Merkmalsfelder. Damit können fast alle intelligenten Leistungen beschrieben werden. Dazu wurde ein eigener Intelligenztest (BIS-Test, Jäger 1997) entwickelt. Dieser Test besteht aus insgesamt 45 verschiedenen Aufgabentypen, wobei jede Aufgabe immer einem der zwölf Merkmalsfelder zugeordnet werden kann (9 B-, 9 M-, 12 E- und 15 K-Aufgaben). So testen beispielsweise jeweils drei B-Aufgaben die Bearbeitungsgeschwindigkeit von figural-bildhaftem Material (z.B. BD = Buchstaben durchstreichen), von verbalem Material (z.B. UW = unvollständige Wörter erfassen) und von numerischem Material (z.B. RZ = Rechenzeichen erkennen). Die Durchführungszeit des Tests beträgt ca. 130 Minuten. Die Auswertung der Aufgaben erfolgt mit Lösungsschablonen und die so ermittelten Rohwerte werden für jeden Prüfling in ein Leistungsprotokoll eingetragen. Dann werden mit Hilfe von Normentabellen der jeweiligen Bezugsgruppen die Standardwerte ermittelt. Die Gütekriterien für Tests (Objektivität, Reliabilität und Validität) wurden in mehreren Kontrolluntersuchungen überprüft und sind in hohem Maße erfüllt.

[2] Mathematische Grundkompetenzen

Als Ausgangspunkt dient die am Anfang angeführte Definition des Kompetenz-Begriffs von Weinert. Entsprechend dem Berliner Intelligenzstrukturmodells (BIS) wird eine grundlegende Unterscheidung von Fachkompetenzen und Methodenkompetenzen getroffen.

a) **Fachkompetenzen** betreffen erstens das einschlägige Sachwissen und zweitens die sachgebundenen Fertigkeiten aus dem jeweiligen Fach.

b) **Methodenkompetenzen** umfassen die kognitiven Fähigkeiten, um erstens neues Wissen zu erwerben und zweitens selbständig Probleme zu lösen.

In der Mathematik werden die **Fachkompetenzen** durch eine stufenweise Aufgliederung der einzelnen Gegenstandsbereiche festgelegt. Ein Vergleich des Gymnasiums in Österreich, Deutschland und der Schweiz führt zu einer in der Komplexität ansteigenden Gliederung des Lehrstoffes in die nachfolgenden sechs Fachbereiche.

- F1, Arithmetik:** Zahlenmengen
Zahlendarstellungen
Rechenoperationen
Schluss- und Prozentrechnung
Textaufgaben
- F2, Algebra:** Lineare Gleichungen
Lineare Gleichungssysteme
Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme
Quadratische Gleichungen
Höhere Gleichungen
Fundamentalsatz der Algebra
Näherungsverfahren
- F3, Geometrie:** Geometrische Grundelemente
Rechteck, Dreieck und Kreis
Lehrsatz von Pythagoras und Anwendungen
Vielecke in der Ebene
Körper im Raum
Längen-, Flächen- und Raummaße
Vektorrechnung in der Ebene und im Raum
Linearkombination, Vektorprodukt, Spatprodukt
Analytische Geometrie
Kegelschnittslinien
Trigonometrie im rechtwinkligen und im allgemeinen Dreieck
Einfache Landvermessung
- F4, Funktionen:** Relation, Funktion, Eigenschaften, Umkehrfunktion
Lineare Funktionen, Polynomfunktionen, Rationale Funktionen
Wurzelfunktionen, Irrationale Funktionen
Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen
Trigonometrische Funktionen
- F5, Analysis:** Folgen und Reihen, Monotonie, Grenzwert
Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Differenzialquotient
Differenziationsregeln
Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben
Einfache Wirtschaftsmathematik
Stammfunktion, bestimmtes Integral
Integrationsregeln
Hauptsatz der Differenzial- und Integral-Rechnung
Anwendungen der Integralrechnung
- F6, Stochastik:** Statistik
Beschreibende Statistik
Korrelation und Regression
Beurteilende Statistik
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein Vergleich der in Österreich, Deutschland und der Schweiz beschriebenen **Methodenkompetenzen** führt zu nachfolgender Liste von sechs Methodenkompetenzen:

| | |
|--|--|
| M1, Modellieren und Darstellen | Erfassen einer Aufgabenstellung und Übersetzen in die Sprache der Mathematik. Dabei können Skizzen, Tabellen oder grafische Darstellungen verwendet werden. Planung der Problemlösung. |
| M2, Operieren und Berechnen | Praktische sachgebundene Fertigkeiten zur richtigen Lösung der Aufgabenstellung. Durchführung der Problemlösung. |
| M3, Verwendung von Werkzeugen | Hilfsmittel richtig einsetzen können. Datenlisten und Formelsammlungen, Computer und Tabellenkalkulation verwenden. Das Internet benutzen, um relevante Informationen zu finden. |
| M4, Transferieren | Gefundene Lösungen auf ähnliche Aufgaben übertragen können. |
| M5, Argumentieren und Kommunizieren | Aufgabe und Lösung präsentieren und auch sprachlich richtig und wohlgeformt kommunizieren können. |
| M6, Interpretieren und Reflektieren | Die Aufgabenstellung und ihre Lösung in einem umfassenden Kontext erkennen und über deren Bedeutung nachdenken. |

[3] Vorschlag zur einfachen Standardisierung von Mathematik-Schularbeiten in der Oberstufe

Vor der Erstellung einer Mathematikaufgabe sollten die fachlichen Aufgabenziele und die entsprechenden inhaltlichen Fachkompetenzen festgesetzt werden. Jede Aufgabe kann aus mehreren Teilaufgaben bestehen und sollte unbedingt eine Teilfrage enthalten, die nur mit den Methodenkompetenzen **M5** und **M6** zu beantworten ist. Für die Beurteilung einer Aufgabenlösung stehen dem Lehrer folgende vier Beurteilungskategorien zur Verfügung:

- TR:** Theoretische (gedankliche) Richtigkeit
- PR:** Praktische (rechnerische) Richtigkeit
- ORD:** Ordnung, Gliederung und Übersichtlichkeit
- GEN:** Genauigkeit der Ergebnisse

Diese vier Auswertungskategorien werden jeweils mit 0, 1 oder 2 Punkten bewertet, wobei gilt: 0 Punkte = ganz falsch, 1 Punkt = teilweise richtig, 2 Punkte = ganz richtig. So können für eine Aufgabe maximal acht Punkte vergeben werden. Dabei ist zu beachten, dass die Kategorie TR ein Vetorecht besitzt, d.h. wenn in TR nur 0 Punkte erreicht werden, dann ist auch die ganze Aufgabe mit nur 0 Punkten zu bewerten. Damit ergibt sich nachfolgender Punkteschlüssel für die Bewertung einer Aufgabe:

- 0 Punkte = ganz falsch
- 1, 2 Punkte = wenig richtig
- 3, 4, 5 Punkte = teilweise richtig
- 6, 7 Punkte = fast richtig
- 8 Punkte = ganz richtig

Eine Schularbeit kann aus 4, 6 oder 8 mittelschweren Aufgaben bestehen. Die Aufgaben sollten deswegen mittelschwer sein, weil dann ihre Trennschärfe am größten ist.

Zur Erreichung einer positiven Note muss der überwiegende Teil der Aufgabe richtig gelöst sein, d.h. mehr als 50%. Dann werden folgende Notengrenzen für eine fünfstufige Notenskala festgelegt:

(a) Die Arbeit besteht aus 4 Aufgaben, d.h. maximal sind 32 Punkte erreichbar.

| | |
|---------------------|----------------------|
| Nicht Genügend (5): | 0,1,...,15,16 Punkte |
| Genügend (4): | 17,18,19,20 Punkte |
| Befriedigend (3): | 21,22,23,24 Punkte |
| Gut (2): | 25,26,27,28 Punkte |
| Sehr Gut (1): | 29,30,31,32 Punkte |

(b) Die Arbeit besteht aus 6 Aufgaben, d.h. maximal sind 48 Punkte erreichbar.

| | |
|---------------------|---------------------------|
| Nicht Genügend (5): | 0,1,2,...,22,23,24 Punkte |
| Genügend (4): | 25,26,27,28,29,30 Punkte |
| Befriedigend (3): | 31,32,33,34,35,36 Punkte |
| Gut (2): | 37,38,39,40,41,42 Punkte |
| Sehr Gut (1): | 43,44,45,46,47,48 Punkte |

(c) Die Arbeit besteht aus 8 Aufgaben, d.h. maximal sind 64 Punkte erreichbar.

| | |
|---------------------|--------------------------------|
| Nicht Genügend (5): | 0,1,2,3,.....,30,31,32 Punkte |
| Genügend (4): | 33,34,35,36,37,38,39,40 Punkte |
| Befriedigend (3): | 41,42,43,44,45,46,47,48 Punkte |
| Gut (2): | 49,50,52,52,53,54,55,56 Punkte |
| Sehr Gut (1): | 57,58,59,60,61,62,63,64 Punkte |

Das hier vorgestellte Auswertungsverfahren von Mathematikaufgaben sollte immer bei allen Schularbeiten eingehalten werden. Durch diese formale Standardisierung wird die Bewertung der Aufgaben transparent und auch objektiv nachvollziehbar. Zur praktischen Auswertung einer Schularbeit in einer ganzen Schulklasse wird ein einheitliches Tabellenkalkulationsblatt aus EXCEL allen Lehrern zur Verfügung gestellt.

Was die inhaltliche Standardisierung betrifft, so schlage ich ein „**teilzentrales Verfahren**“ vor. Die Hälfte der in einer Schularbeit verwendeten Aufgaben kann von einer zentralen Entwicklungsstelle für geeichte und standardisierte Prüfungsaufgaben bezogen werden. Die andere Hälfte der Aufgaben kann vom jeweiligen Lehrer erzeugt werden, wobei aber die oben beschriebenen formalen Standards eingehalten werden müssen. Dadurch wird inhaltlich jener Freiraum geschaffen, der durch die verschiedenen Schultypen mit ihren unterschiedlichen Schwerpunkten notwendig ist.